第 17 卷 第 4 期　　控 制 与 决 策　　2002 年 7 月
Vol 17 No. 4　　Control and Decision　　July 2002

文章编号: 1001-0920(2002)04-0484-03

AHP 法中判断矩阵的比例标度构造法

黄德才[1], 胥 琳[2]
(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310014; 2. 浙江工业大学 经贸管理学院, 浙江 杭州 310014)

摘 要: 指出AHP 法中现有标度方法的主要缺陷是: 标度"粒度"太粗且标度值不能反映方案间的实际重要程度和关系, 容易导致判断信息损失, 破坏方案间重要程度的传递性。为此提出一种比例标度和对应判断矩阵构造方法, 其特点是标度值能较为准确地标度方案的重要程度, 所构造的判断矩阵是完全一致的, 因而大大提高了AHP 方法决策的可靠性和实用性。

关键词: 判断矩阵; 一致性检验; AHP 法
中图分类号: O 223　　**文献标识码**: A

Proportion criteria and method for building comparison matrices in the analytic hierarchy process

HUANG De-cai[1], *XU Lin*[2]
(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China;
2. College of Business and Administration, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)

Abstract: Proportion criteria and method for building comparison matrices in the analytic hierarchy process are presented. The proportion criteria can represent the real importance of candidates and their importance relations, and the comparison matrices built by the new criteria do not need consistency checking. The new method can enhance the reliability and efficiency of decision making, making AHP more simple and convenient in practical application.

Key words: comparison matrix; consistency checking; AHP method

1 引 言

层次分析方法(AHP)的关键步骤是构造判断矩阵, 即根据给定的方案重要性标度, 通过方案之间的两两比较而获得判断矩阵, 且该矩阵还要有满意的一致性才能使用[1]。然而, 判断矩阵常常不能通过一致性检验。为解决这一问题, 人们提出了各种改进判断矩阵一致性的方法[2, 3]和新标度方法[4]。不一致的初始判断矩阵可改造为具有满意一致性的另一种判断矩阵, 但改造后的矩阵已不是原先专家给出的矩阵, 有时与初始判断矩阵相距甚远, 而由此作出的决策, 其可靠性自然值得怀疑。文献[5]说明应根据实际问题的不同选择不同的标度方法。

尽管标度法比较多, 但如何选择与实际问题相适应的标度仍是一个难题。本文将举例说明, AHP 法中判断矩阵一致性检验错误的主要原因是现有标度存在以下缺陷: 1) 标度值不能真实反映方案的重要程度和相互关系; 2) 标度"粒度"太粗导致分辨

收稿日期: 2001-06-05; **修回日期**: 2001-08-24
基金项目: 浙江省自然科学基金项目(601076)
作者简介: 黄德才(1958—), 男, 四川安岳人, 教授, 博士, 从事决策理论与方法、生产排序等研究; 胥琳(1969—), 女, 湖南株洲人, 讲师, 硕士, 从事计算机辅助管理决策、系统工程等研究。

率低下。这些缺陷不仅破坏了因素间重要程度的传递性, 而且导致判断信息和积累优势度的损失, 使原先重要性有差别的方案在整体排序后变得无差别, 从而导致一致性检验错误。为此, 本文提出了基本比例标度方法和对应的判断矩阵构造方法。根据该方法构造的判断矩阵是完全一致性的, 因而不需进行一致性检验, 并且特征向量也容易获得, 从而大大提高了 AHP 方法的实用性和决策可靠性。

2　实例分析

在进行实例分析之前, 首先给出一个重要的定理:

定理 1　设 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 为正实数, $P = (p_{ij})_{n\times n}$ 为如下 n 阶矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k_1 & k_1k_2 & k_1k_2k_3 & \cdots & k_1\cdots k_{n-1} \\ 1/k_1 & 1 & k_2 & k_2k_3 & \cdots & k_2\cdots k_{n-1} \\ 1/k_1k_2 & 1/k_2 & 1 & k_3 & \cdots & k_3\cdots k_{n-1} \\ 1/k_1k_2k_3 & 1/k_2k_3 & 1/k_3 & 1 & \cdots & k_4\cdots k_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/k_1\cdots k_{n-1} & 1/k_2\cdots k_{n-1} & 1/k_3\cdots k_{n-1} & 1/k_4\cdots k_{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

则矩阵 P 是完全一致的, 且最大特征值 n 对应的特征向量为

$$X = (k_1k_2\cdots k_{n-1}, k_2k_3\cdots k_{n-1}, \cdots, k_{n-1}, 1)^{\mathrm{T}} \quad (2)$$

证明略。

为了便于计算, 下面仅用 AHP 法中使用最多的 1～9 标度[1,5] 为例, 说明现有标度法所存在的缺陷。其它标度也存在类似问题, 这里不再赘述。

例 1　对于定理 1 中矩阵, 分别令 $n = 3, 4$, $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 3$, 则可得到如下两个矩阵 P 和 Q

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1/3 & 1 & 3 & 9 \\ 1/9 & 1/3 & 1 & 3 \\ 1/27 & 1/9 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

由定理 1 知 P 和 Q 都是完全一致的正互反矩阵, P 对应于最大特征值 3 的特征向量为 $(9, 3, 1)^{\mathrm{T}}$, 归一化后为 $(0.692, 0.231, 0.077)^{\mathrm{T}}$。

矩阵 P 可看成方案 A, B, C 相对于某一指标 H 按 1～9 标度比较所得的判断矩阵。因为 $a_{12} = 3$, $a_{23} = 3$, 所以 A 比 B 略微重要, B 比 C 略微重要。由 AHP 方法可知[1], P 的特征向量 $(0.692, 0.231, 0.077)^{\mathrm{T}}$ 的分量分别是方案 A, B, C 的重要性权值, 且 A 的重要性权值是 B 的 3 倍。这就是说, 若按 1～9 标度, 只有当 A 的重要程度是 B 的 3 倍时, 我们才说 A 比 B 略微重要, 但在实践中至少应该说 A 比 B 重要得多。

此外, 由于 $a_{13} = 9$ 且矩阵是完全一致的, 则按 1～9 标度得出 A 比 C 绝对重要。也就是说, 只要 A 比 B 略微重要, B 比 C 略微重要, 就有 A 比 C 绝对重要。按照这样推理, 若增加一个方案 D, 且 D 比 C 略微重要, 这时完全一致的判断矩阵只能是 Q, 但 1～9 标度中根本没有 27 这一标度值。

出现以上问题的原因是现有的各种标度法的标度值没有比较准确地表达方案的实际重要性, 导致判断矩阵构造法无法通过方案之间重要程度的传递关系得到矩阵 Q 中标度值 27。

3　比例标度与判断矩阵比例构造法

3.1　比例标度

在日常生活中, 对 A 和 B 两个方案进行重要性比较时, 我们经常听到“A 比 B 重要 5 倍”这样的说法, 其表达的实际意思是“A 的重要程度是 B 的 5 倍”。为此, 我们提出如下两种比例标度。对于以上标度, 当方案 A 比 B 的标度值为 1.2 时, 它表达的实际意义是“A 的重要程度是 B 的 1.2 倍”; 当方案 A 比 B 的标度值为 2 时, 它表达的实际意义是“A 的重要程度是 B 的 2 倍”。两种基本比例标度如表 1 所示。

表 1　两种基本比例标度

序号	相同	略微重要	较为重要	重要	重要得多	绝对重要
1	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
2	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2

例 2　对于例 1 的 3 个方案 A, B, C, 当 A 比 B 略微重要, B 比 C 略微重要时, 按表 1 的第 2 种标度, A 比 B 的重要标度为 1.2, B 比 C 的重要标度为 1.2, 于是 A 比 C 重要标度为 1.44 (= 1.2 × 1.2)。虽然表

中没有 1.44 这个标度值,但根据比例关系和传递性可知 A 比 C 的标度值为 1.44,且其标度值更符合 A 与 C 之间的重要程度关系。这就是将表 1 所定义的标度称为基本比例标度的原因。

例 2 表明,比例标度法不仅能较准确地标度方案的重要性和重要关系,而且更加灵活,并可自行定义。

3.2 判断矩阵的比例构造法

设有 n 个方案 $A_1, A_2, \cdots, A_n$。对于两方案 A_i 和 A_j 的比较,现作如下规定:如果 A_i 重要程度不低于 A_j,则根据标度表直接得到 A_i 与 A_j 比较的标度值 $p_{ij} \geq 1$,然后得到 A_j 与 A_i 比较的标度值 $p_{ji} = 1/p_{ij}$;如果 A_i 重要程度低于 A_j,则先根据标度表得到 A_j 与 A_i 比较的标度值 $p_{ji} \geq 1$,然后得到 A_i 与 A_j 比较的标度值 $p_{ij} = 1/p_{ji}$。

基于比例标度的判断矩阵构造法(BL 法)的计算步骤如下:

Step 1: 1) 输入方案数 n 和方案 $A_1, A_2, \cdots, A_n$;

2) 定义判断矩阵 $P = (p_{ij})_{n\times n}$ 且 $p_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 和特征向量 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 且 $w_i = 0(i = 1, 2, \cdots, n)$。

Step 2: 分别取 $i = 1, 2, \cdots, n$,对 A_i 和 A_{i+1} 进行比较,其标度值记为 $k(i)$。

Step 3: 构造判断矩阵:

1) $i = 1$;

2) 若 $i > n$ 则转 Step 4,否则 $j = i$;

3) 若 $i = n$ 则 $w_i = 1$,否则 $w_i = k(i) \times k(i+1) \times \cdots \times k(n-1)$;

4) 若 $j = i$ 则 $p_{ii} = 1$,否则 $p_{ij} = k(i) \times k(i+1) \times \cdots \times k(j-1)$, $p_{ji} = 1/p_{ij}$, $j = j + 1$;

5) 若 $j \leq n$ 则转 4),否则 $i = i + 1$ 并转 2)。

Step 4: 输出判断矩阵 P 和对应特征向量 W 并结束。

定理 2 由 BL 方法构造的判断矩阵 P 是完全一致的。

证明 由于算法所得矩阵 P 满足定理 1 的条件,因而 P 是完全一致的。□

下面用一个简单例子来说明比例构造法的具体应用。

例 3 设有 5 个方案 $X_1, X_2, \cdots, X_5$。对某一属性 H, X_i 比 X_{i+1} 略微重要,用表 1 的第 1 种标度得到其标度值为 1.1$(i = 1, 2, 3, 4)$。由定理 1 和定理 2 知,判断矩阵的特征向量为 $((1.1)^4, (1.1)^3, (1.1)^2, 1.1, 1)$,所以整体排序后的重要性权值向量为(0.239 8, 0.218 0, 0.198 2, 0.180 2, 0.163 8)。

若 X_i 比 X_{i+1} 较为重要,则选择表 1 的第 2 种标度得到其标度值为 1.4$(i = 1, 2, 3, 4)$,其判断矩阵的特征向量为 $((1.4)^4, (1.4)^3, (1.4)^2, 1.4, 1)$,整体排序后的重要性权值向量为(0.351 0, 0.250 7, 0.179 1, 0.127 9, 0.091 3)。

参考文献(References):

[1] 宣家骥. 多目标决策[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1989. 283-289.

[2] Ma Wei-ye. A practical approach to modifying pairwise matrices and two criteria of modificatory effectiveness [J]. *J of Syst Sci & Syst Eng*, 1993, 2(4): 334-338.

[3] 刘万里, 雷治军. 关于 AHP 中判断矩阵校正方法的研究 [J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(6): 30-39.
(Liu Wan-li, Lei Zhi-jun. Study on rectification method for the judgment matrix in AHP[J]. *Syst Eng — Theory & Pract*, 1997, 17(6): 30-39.)

[4] 徐泽水. 关于层次分析中几种标度的模拟评估[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(7): 58-62.
(Xu Ze-shui. A simulation-based evaluation of several scales in the analytic hierarchy process[J]. *Syst Eng — Theory & Pract*, 2000, 20(7): 58-62.)

[5] 陈迁, 王浣尘. AHP 方法判别尺度的合理定义[J]. 系统工程, 1996, 14(5): 18-20.
(Chen Qian, Wang Huan-chen. Proper definition of criteria in AHP[J]. *Syst Eng*, 1996, 14(5): 18-20.)

(上接第 483 页)

[4] Fang H, Gong G, Qian M P. Annealing of iterative stochastic schemes[J]. *SLAM J Contr Optim*, 1997, 35(6): 1881-1907.

[5] 潘正君, 康立山, 陈毓屏. 演化计算[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[6] Z 米凯利维兹. 演化程序 — 遗传算法与数据编码的结合[M]. 周家驹, 何险峰译. 北京: 科学出版社, 2000.

[7] M Srinivas, L M Patnail. Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithms [J]. *IEEE Trans on Syst, Man & Cybern*, 1994, 24(4): 656-666.