

文章编号: 1001-0920(2002)04-0503-03

Wiener 状态滤波器设计新方法

孙书利, 邓自立

(黑龙江大学 自动化系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 基于经典稳态 Kalman 滤波理论, 应用射影理论, 对完全可观完全可控的系统提出了设计 Wiener 状态滤波器的新方法, 可统一处理稳定或不稳定系统的最优预报、滤波和平滑问题, 估值器具有 ARMA 递推形式, 且具有渐近稳定性。仿真例子说明了该算法的有效性。

关键词: 射影理论; Wiener 状态滤波器; Kalman 滤波方法

中图分类号: O 211. 64 文献标识码: A

New approach of designing Wiener state filters

SUN Shu-li, DENG Zi-li

(Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

Abstract: Based on classical steady-state Kalman filtering theory and the projection theory, a new algorithm of designing Wiener state filter for completely observable and controllable systems is presented, which can handle the optimal prediction, filtering and smoothing for stable or unstable systems in a unified framework. The filters have the ARMA recursive form and have asymptotic stability. A simulation example shows their effectiveness.

Key words: projection theory; Wiener state filter; Kalman filtering method

1 引言

文献[1]采用时域上的现代时间序列分析方法, 对完全可观系统提出一种统一的稳态 Kalman 滤波器, 可统一处理滤波、预报和平滑问题。但其缺点是滤波器是非渐近稳定的, 要求计算最优初值, 且要进行伪交换。

目前, 对 Wiener 状态估值器的报道很少。虽然文献[2]用频域上的多项式方法处理 Wiener 状态预报问题, 但不能处理平滑和滤波, 且要求解 Diophantine 方程。而文献[3]用现代时间序列分析方法, 采用 Gevers-Wouters 算法建立了 ARMA 新息

模型。本文基于 Kalman 滤波理论, 对完全可观完全可控系统给出一种递推的 Wiener 状态滤波器, 可统一处理预报、滤波和平滑问题。该算法避免了用 Gevers-Wouters 算法建立 ARMA 新息模型, 避免了求解 Diophantine 方程与伪交换, 且滤波器具有渐近稳定性, 从而避免了最优初值的计算。

2 问题阐述与引理

考虑离散定常线性随机系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t) \quad (2)$$

收稿日期: 2001-03-01; 修回日期: 2001-05-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(69774019); 黑龙江省自然科学基金项目(F01-15)

作者简介: 孙书利(1971—), 男, 山东冠县人, 助教, 从事 Wiener 滤波、Kalman 滤波等研究; 邓自立(1938—), 男, 辽宁锦州

© 1994-2011, (教授), 从事状态估计、最优滤波和信息处理等研究。ing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中, 状态 $x(t) \in R^n$, 观测 $y(t) \in R^m$, 观测噪声 $v(t) \in R^m$, 模型噪声 $w(t) \in R^r$, Φ, Γ, H 是适当维数的常值阵。

假设 1 $w(t)$ 和 $v(t)$ 是零均值和方差各为 Q 和 R 的独立白噪声。

假设 2 初始状态 $x(0)$ 独立于 $w(t)$ 和 $v(t)$, 且 $E x(0) = \mu_0, E[(x(0) - \mu_0)(x(0) - \mu_0)^T] = P_0$ 。

假设 3 系统是完全可观完全可控的。

问题是基于观测 $(y(t+N), y(t+N-1), \dots)$, 求状态 $x(t)$ 的 Wiener 滤波器 $\hat{x}(t|t+N)$, 它们具有以 $y(t+N)$ 作为输入的传递矩阵表达式形式。对 $N = 0, N > 0$ 或 $N < 0$, 分别称其为 Wiener 状态滤波器、平滑器或预报器。

引理 1 系统(1)和(2)有如下的 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})\epsilon(t) \quad (3)$$

其中, $A(q^{-1}) = D(q^{-1})I_m - H \text{adj}(I_n - \Psi q^{-1})K_p q^{-1} = \Phi - K_p H, K_p = \Phi K, K_p$ 为稳态 Kalman 预报增益, K 为稳态 Kalman 滤波增益; $D(q^{-1}) = \det(I_n - \Psi q^{-1})$ 是稳定的。

证明 系统(1)和(2)在假设 1 ~ 假设 3 下, 有稳态 Kalman 预报器^[2]

$$\hat{x}(t+1|t) = \Psi \hat{x}(t|t-1) + K_p y(t)$$

$$y(t) = H \hat{x}(t|t-1) + \epsilon(t)$$

于是有

$$y(t) = H(I_n - \Psi q^{-1})^{-1} K_p q^{-1} y(t) + \epsilon(t)$$

即有

$$\det(I_n - \Psi q^{-1}) \epsilon(t) =$$

$$[\det(I_n - \Psi q^{-1}) I_m -$$

$$H \text{adj}(I_n - \Psi q^{-1}) K_p q^{-1}] y(t)$$

这引出式(3), 由文献[2]知 $D(q^{-1})$ 是稳定的。

引理 2 系统(1)和(2)在假设 1 ~ 假设 3 下, 有 Wiener 滤波器形式的稳态最优白噪声估值器

$$\hat{w}(t|t+N) =$$

$$D^{-1}(q^{-1}) F_N(q^{-1}) A(q^{-1}) y(t+N) \quad (4)$$

$$\hat{v}(t|t+N) =$$

$$D^{-1}(q^{-1}) G_N(q^{-1}) A(q^{-1}) y(t+N) \quad (5)$$

其中

$$F_N(q^{-1}) = \sum_{j=1}^N M_w(j) q^{j-N}$$

$$M_w(j) = Q \Gamma^T [(I_n - KH)^T \Phi^T]^{j-1} \times H^T (H \Sigma H^T + R)^{-1}$$

$$G_N(q^{-1}) = \sum_{j=0}^N M_v(j) q^{j-N}$$

$$M_v(0) = R [H \Sigma H^T + R]^{-1}$$

$$M_v(j) = -R K^T [\Phi^T (I_n - KH)^T]^{j-1} \times \Phi^T H^T (H \Sigma H^T + R)^{-1}, \quad j > 0$$

$$K = \Sigma H^T [H \Sigma H^T + R]^{-1}$$

Σ 是满足 Riccati 方程

$$\Sigma = \Phi \Sigma - \Sigma H^T (H \Sigma H^T + R)^{-1} H \Sigma \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T$$

的唯一正定解。

证明 由文献[2]有 $\hat{w}(t|t+N), \hat{v}(t|t+N)$ 的非递推形式

$$\hat{w}(t|t+N) = \sum_{j=1}^N M_w(j) \epsilon(t+j)$$

$$\hat{v}(t|t+N) = \sum_{j=0}^N M_v(j) \epsilon(t+j)$$

由模型(3)有

$$\epsilon(t) = D^{-1}(q^{-1}) A(q^{-1}) y(t)$$

代入上式, 引理 2 即可得证。

引理 3 输出 $y(t)$ 有如下 Wiener 预报器

$$\hat{y}(t+i|t) = D^{-1}(q^{-1}) J_i(q^{-1}) y(t) \quad (6)$$

其中

$$J_i = \begin{cases} D(q^{-1}) q^i, & i = 0 \\ H \Phi^{-1} \text{adj}(I_n - \Psi q^{-1}) K_p, & i > 0 \end{cases}$$

证明 当 $i > 0$ 时, 由式(1)有

$$\hat{x}(t+i|t) = \Phi^{-1} \hat{x}(t+1|t)$$

由式(2)并利用上式和引理 1 的证明过程, 有

$$\hat{y}(t+i|t) = H \Phi^{-1} \hat{x}(t+1|t) = H \Phi^{i-1} (I_n - \Psi q^{-1})^{-1} K_p y(t)$$

于是

$$D(q^{-1}) \hat{y}(t+i|t) =$$

$$H \Phi^{i-1} \text{adj}(I_n - \Psi q^{-1}) K_p y(t)$$

当 $i = 0$ 时, 有

$$\hat{y}(t+i|t) = y(t+i)$$

综合上述两种情形即可得证。

引理 4^[2] 系统在假设 3 下, 有非递推表达式

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega [y(t+i) - \sum_{j=0}^{i-1} H \Phi^{i-1-j} \Gamma \hat{w}(t+j) - v(t+i)] \quad (7)$$

其中规定 $\Phi^0 = 0 (i < 0)$, 且 $j = 0$, 并定义

$$\Omega = [H^T, (H \Phi)^T, \dots, (H \Phi^{\beta-1})^T]^T$$

伪逆

$$\Omega^{-} = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T = [\Omega, \Omega, \dots, \Omega_{\beta-1}]$$

3 Wiener 状态滤波器

定理 1 对系统(1)和(2)有如下渐近稳定的 Wiener 递推滤波器

$$D(q^{-1})\hat{x}(t|t+N) = K_N(q^{-1})y(t+N) \quad (8)$$

其中

$$K_N(q^{-1}) = \frac{\beta^{-1}}{i=0} \Omega [J_{i-N}(q^{-1}) - \Lambda^N(q^{-1}) - \Delta^N(q^{-1})]$$

$$\Lambda^N(q^{-1}) = \frac{i-1}{j=0} H \Phi^{i-1-j} \Gamma F_{N-j}(q^{-1}) A(q^{-1})$$

$$\Lambda^0 = 0, \quad \Delta^N(q^{-1}) = G_{N-i}(q^{-1}) A(q^{-1})$$

证明 对式(7)两边同时取射影,有

$$\hat{x}(t|t+N) = \frac{\beta^{-1}}{i=0} \Omega [y(t+i|t+N) - \frac{i-1}{j=0} H \Phi^{i-1-j} \Gamma \hat{w}(t+j|t+N) - \hat{v}(t+i|t+N)]$$

将式(4)~(6)代入上式即可得证。

4 仿真例子

对于系统(1)和(2), 给定 $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, H = [1, 0], Q = 1, R = 1$, 求状态 $x(t)$ 的 Wiener 滤波器 $\hat{x}(t|t)$ 。

用迭代法解 Riccati 方程可求得

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2.1712 & 1.7808 \\ 1.7809 & 1.5205 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.6847 \\ 0.5616 \end{bmatrix}$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 0.8423 \\ 0.5616 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} -0.8423 & 1.5 \\ -0.5616 & 1 \end{bmatrix}$$

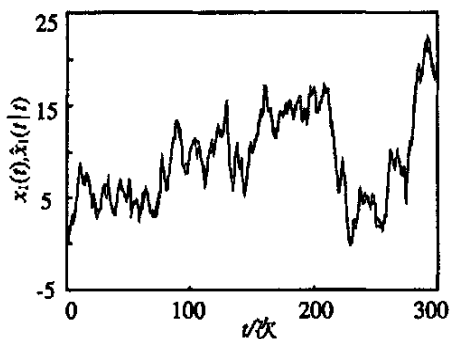


图 1 $x_1(t)$ 和 Wiener 状态滤波器 $\hat{x}_1(t|t)$

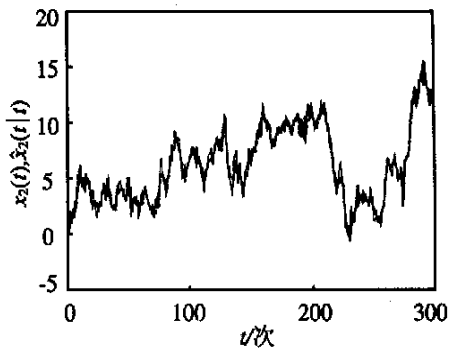


图 2 $x_2(t)$ 和 Wiener 状态滤波器 $\hat{x}_2(t|t)$

ARMA 新息模型为

$$(1 - q^{-1})y(t) = (1 - 0.1577q^{-1})\epsilon(t)$$

由式(8)可得 Wiener 滤波器为

$$D(q^{-1})\hat{x}(t|t) = K_0(q^{-1})y(t)$$

其中

$$K_0(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.6847 + 0.1577q^{-1} \\ 0.5616 \end{bmatrix}$$

$$D(q^{-1}) = 1 - 0.1577q^{-1}$$

仿真结果如图 1 和图 2 所示, 其中虚线为估计值。

5 结 论

本文基于 Kalman 滤波理论, 对完全可观完全可控系统给出一种递推的 Wiener 状态滤波器, 可统一处理稳定或不稳定系统的预报、滤波和平滑问题。算法直接利用稳态 Kalman 预报器建立 ARMA 新息模型, 避免了采用 Gevers-Wouters 算法建立 ARMA 新息模型。本文提出的算法避免了求解 Diophantine 方程与伪交换, 且滤波器具有渐近稳定性, 避免了最优初值的计算, 从而大大减少了计算负担。

参考文献(References):

- [1] 邓自立, 刘玉梅. 一种统一的稳态 Kalman 估值器[J]. 信息与控制, 1999, 28(4): 249-253. (Deng Z L, Liu Y M. A unified steady-state Kalman estimator[J]. *Inf or & Control*, 1999, 28(4): 249-253.)
- [2] 邓自立. 最优滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000.
- [3] Chisci L, Mosca E. Polynomial equations for the linear MMSE state estimation[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(5): 623-626.
- [4] 孙书利, 邓自立. 带多重观测滞后 Wiener 状态滤波器 [A]. 2000 中国控制与决策学术年会论文集[C]. 沈阳: 东北大学出版社, 2000. 193-196.