第 17 卷 第 4 期　　控 制 与 决 策　　2002 年 7 月
Vol. 17 No. 4　　Control and Decision　　July 2002

文章编号: 1001-0920(2002)04-0397-05

多维分段广义正交多项式算子及其在分布参数系统辨识中的应用

吴　斌, 钟宜生
(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘　要: 在一维分段广义正交多项式的基础上, 提出多维分段广义正交多项式及其相应的正交多项式算子的定义, 总结归纳了多维分段广义正交多项式算子的基本性质和主要运算规则, 并将二维分段广义正交多项式算子法应用于一类非线性分布参数系统的辨识。数值算例表明, 即使在存在量测噪声的情况下, 使用较小的分段数和正交基项数也能得到较好的辨识效果。

关键词: 广义正交多项式算子; 分布参数系统; 参数辨识
中图分类号: TP 13　　文献标识码: A

Multidimensional piecewise general orthogonal polynomials operator and its applications to parameter identification of distributed parameter systems

WU Bin, ZHONG Yi-sheng
(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Multidimensional general orthogonal polynomials and its operator are proposed. Its basic properties and operational rules are set up in a systematic way. Two-dimensional general orthogonal polynomials operator method is applied to the parameter identification of a kind of nonlinear distributed parameter system. The numerical example shows that a better result under considering the measuring noise can be obtained, using fewer numbers of piecewise and orthogonal basis.

Key words: general orthogonal polynomials operator; distributed parameter system; parameter identification

1 引　　言

正交函数应用于动态系统参数辨识, 已取得了较好的效果。正交函数分析法的主要特点是运用运算阵, 将微分方程或积分方程所描述的问题转换为代数方程描述的问题, 从而简化了原问题。但是许多研究多限于线性系统和集中参数系统, 而在控制工程及其它领域中, 存在着大量非线性和分布参数等现象, 对于非线性分布参数系统的辨识要比线性分布参数系统的辨识困难得多。一些研究者采用块脉冲函数[1]、Walsh函数[2]及连续正交多项式[3]对这一

收稿日期: 2001-06-15; 修回日期: 2001-10-15
基金项目: 国家自然科学基金重点基金项目(69934010); 清华大学信息学院基础创新研究基金项目(985 信息-01-基金-01)
作者简介: 吴斌(1970—), 女, 福建连江人, 博士后研究人员, 从事正交函数及其应用、鲁棒控制等研究; 钟宜生(1958—), 男, 江西万载人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制及其应用等研究。

问题进行研究。

本文在一维分段广义正交多项式[4]的基础上,首先定义了多维分段广义正交多项式及其算子,并推导出多维分段广义正交多项式算子的基本性质和主要运算规则,从而使分段广义正交多项式分析法能建立在较为严格的数学理论基础上,为误差分析和收敛性分析奠定了基础;然后将二维分段广义正交多项式算子法应用于一类非线性分布参数系统的参数辨识,结合最小二乘法,得到了系统模型参数。数值算例表明,在存在量测噪声的情况下,即使采用较少的分段数和正交基项数,该方法也能得到较精确的辨识结果;同时,由于分段正交多项式系兼具块脉冲和连续正交多项式的优点,所以它比单独使用上述两类正交函数能得到更为精确而简便的算法。

2 多维分段广义正交多项式算子及其性质

记

$$E_n=\{z=[z_1,\cdots,z_n],a^{(i)}\le z_i\le b^{(i)},\ i=1,2,\cdots,n,a^{(i)},b^{(i)}\in R\}$$

为 n 维欧氏空间中一个子区域。式中 R 表示全体实数集合。在 E_n 上构造一个 n 维完备的广义正交多项式系 $\{\phi_{i_1,\cdots,i_n}(z_1,\cdots,z_n),i_k=0,1,\cdots,m_k-1,k=1,2,\cdots,n\}$。

设 $L^n_{2,w}(E_n)$ 为 E_n 上满足

$$\int_{a^{(1)}}^{b^{(1)}}\cdots\int_{a^{(n)}}^{b^{(n)}}w(z_1,\cdots,z_n)\times[f(z_1,\cdots,z_n)]^2\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n<\infty$$

的 n 维平方可积函数 $f(z_1,\cdots,z_n)$ 所生成的空间,其中 $w(z_1,\cdots,z_n)$ 为权函数。$\forall f,g\in L^n_{2,w}(E_n)$,定义内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{a^{(1)}}^{b^{(1)}}\cdots\int_{a^{(n)}}^{b^{(n)}}w(z_1,\cdots,z_n)\times f(z_1,\cdots,z_n)g(z_1,\cdots,z_n)\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n$$

由内积诱导范数 $\|f\|_{L^n_{2,w}}=\langle f,f\rangle^{1/2}$,$L^n_{2,w}(E_n)$ 构成一个可分的 Hilbert 空间。此外,权函数 $w(z_1,\cdots,z_n)$ 满足

$$w(z_1,\cdots,z_n)=w(z_1)\cdots w(z_n)=\prod_{i=1}^n w(z_i)$$

其中 $w(z_i)$ 为一维广义正交多项式的权函数。记

$$N_m=\mathrm{span}\{\phi_{i_1,\cdots,i_n}(z_1,\cdots,z_n),i_k=0,1,\cdots,m_k-1,k=1,2,\cdots,n\}$$

则 N_m 为 $\prod_{i=1}^n m_i$ 维的 Hilbert 空间。

现对 E_n 上一个给定时间区域 $t=[t_1,\cdots,t_n]$,$t_i\in[t_0^{(i)},t_f^{(i)}]$ 的每一个坐标作如下分割

$$[t_0^{(i)},t_f^{(i)}]=[t_0^{(i)},t_1^{(i)}]\cup\cdots\cup[t_{N-1}^{(i)},t_N^{(i)}]$$

$$t_N^{(i)}=t_f^{(i)}$$

其中 N 为正整数。令

$$\Delta_j^{(i)}=t_j^{(i)}-t_{j-1}^{(i)},\quad p_j^{(i)}=\frac{b^{(i)}-a^{(i)}}{\Delta_j^{(i)}}$$

$$q_j^{(i)}=\frac{-b^{(i)}t_{j-1}^{(i)}+a^{(i)}t_j^{(i)}}{\Delta_j^{(i)}},\quad z_i=p_j^{(i)}t_i+q_j^{(i)}$$

$$w_i(t_1,\cdots,t_n)=w[p_i^{(1)}t_1+q_i^{(1)},\cdots,p_i^{(n)}t_n+q_i^{(n)}]$$

$$\phi_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}(t_1,\cdots,t_n)=\phi_{j_1,\cdots,j_n}[p_j^{(1)}t_1+q_j^{(1)},\cdots,p_j^{(n)}t_n+q_j^{(n)}]$$

定义 1 作如下多维正交函数系

$$\bar\phi=\{\bar\phi_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}(t_1,\cdots,t_n),i_k=1,\cdots,N,j_k=0,1,\cdots,k=1,\cdots,n\}$$

$$\bar\phi_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}(t_1,\cdots,t_n)=\begin{cases}\phi_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}(t_1,\cdots,t_n)\\ \quad(t_1,\cdots,t_n)\in\bigcup_{k=1}^n[t_{i-1}^{(k)},t_i^{(k)})\\ \phi_{N,j_1,\cdots,N,j_n}(t_1,\cdots,t_n)\\ \quad(t_1,\cdots,t_n)\in\bigcup_{k=1}^n[t_{N-1}^{(k)},t_N^{(k)})\\ 0,\quad 其\ 它\end{cases}\tag{1}$$

$$\bar w(t_1,\cdots,t_n)=\begin{cases}w_{i_1,\cdots,i_n}(t_1,\cdots,t_n),& t\in\bigcup_{j=1}^n[t_{k-1}^{(j)},t_k^{(j)})\\ w_{N,\cdots,N}(t_1,\cdots,t_n),& t\in\bigcup_{j=1}^n[t_{N-1}^{(j)},t_N^{(j)})\end{cases}\tag{2}$$

则称函数系 $\bar\phi$ 为 n 维分段广义正交多项式系,简记为 n-PGOPs。该函数系具有如下基本性质:

性质 1

$$\phi_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}(t_1,\cdots,t_n)=\phi_{i_1,j_1}(t_1)\cdots\phi_{i_n,j_n}(t_n)=\prod_{k=1}^n\phi_{i_k,j_k}(t_k)\tag{3}$$

性质 2

$$\langle\bar\phi_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}(t_1,\cdots,t_n),\bar\phi_{i_1,k_1,\cdots,i_n,k_n}(t_1,\cdots,t_n)\rangle=\begin{cases}0,& j_p\ne k_p,\\ \prod_{k=1}^n\dfrac{r_{jk}}{p_{i_k}^{(k)}},& j_p=k_p,\end{cases}\quad p=1,2,\cdots,n\tag{4}$$

其中 $r_{jk}=\int_{a^{(k)}}^{b^{(k)}}w(z_k)\phi_j^2(z_k)\mathrm{d}z_k$。

性质 3 当 $i_p\ne k_p(p=1,2,\cdots,n)$ 时

$$\bar{\phi}_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}(t_1,\cdots,t_n)\bar{\phi}_{k_1,j_1,\cdots,k_n,j_n}(t_1,\cdots,t_n) = 0$$

显然, $\bar{\phi}$形成了完备的正交函数系, 对于空间 $L^n_{2,w}(E_n)$ 上的任意函数 $f(z_1,\cdots,z_n)$, 均可展开成如下广义付立叶级数形式

$$f(z_1,\cdots,z_n) = \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{j_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{i_n=1}^{N}\sum_{j_n=0}^{\infty} f_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}\bar{\phi}_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}(z_1,\cdots,z_n) \tag{5}$$

其中

$$f_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n} = \frac{1}{\bar{r}_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}}\int_0^{(1)}\cdots\int_0^{(n)}\bar{w}(t_1,\cdots,t_n)\times f(t_1,\cdots,t_n)\bar{\phi}_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}(t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n \tag{6}$$

$$\bar{r}_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n} = \int_0^{(1)}\cdots\int_0^{(n)}\bar{w}(t_1,\cdots,t_n)\bar{\phi}^2_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}\times(t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n \tag{7}$$

通常, 对 $f(z_1,\cdots,z_n)$ 作有限项的 N 段广义正交多项式逼近, 则 $f(z_1,\cdots,z_n)$ 可近似表示为

$$f(z_1,\cdots,z_n) \approx f_m(z_1,\cdots,z_n) = \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{j_1=0}^{m_1-1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N}\sum_{j_n=0}^{m_n-1} f_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}\bar{\phi}_{i_1,j_1,\cdots,i_n,j_n}(z_1,\cdots,z_n) \tag{8}$$

令

$$M = \prod_{k=1}^{n}(Nm_k)$$

$$F^{\mathrm{T}} = [f_{1,0,\cdots,1,0},\cdots,f_{N,m_1-1,\cdots,N,m_n-1}] \in R^M \tag{9}$$

则式(8) 可表示成如下向量形式

$$f_m(z_1,\cdots,z_n) = F^{\mathrm{T}}\bar{\phi}(z_1,\cdots,z_n) \tag{10}$$

定义 2　对任意给定的一组自然数 $m_k(k=1,2,\cdots,n)$ 和 $L^n_{2,w}(E_n)$ 中任一函数, 作算子 G_n 如下

$$G_nf(t_1,\cdots,t_n) = F^{\mathrm{T}} \in R^M$$

其中 F^{T} 如上定义, 称 G_n 为空间 $L^n_{2,w}(E_n)$ 到 R^M 的 n 维分段广义正交多项式算子, 简记为 G_n。

定义 3　对于函数向量 $f(x) \in R^p$, $f_i(x) \in L^n_{2,\bar{w}}(E_n)$, $f(x)$ 在多维广义正交多项式算子作用下, 其象空间表示为

$$G_nf(x) = \begin{bmatrix} G_nf_1(x) \\ G_nf_2(x) \\ \vdots \\ G_nf_p(x) \end{bmatrix} \tag{11}$$

定义 4　对于向量矩阵 $A(x) \in R^{p\times q}$, $a_{ij}(x) \in L^n_{2,\bar{w}}(E_n)$, 在 N 段多维广义正交多项式算子作用下, 其象为

$$G_nA(x) = \begin{bmatrix} G_na_{11}(x) & \cdots & G_na_{1q}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_na_{p1}(x) & \cdots & G_na_{pq}(x) \end{bmatrix} \tag{12}$$

这样定义的多维分段广义正交多项式算子具有如下基本性质:

性质 4　多维分段广义正交多项式算子是一个线性、连续、有界的算子。

性质 5　在归一化的分段广义正交多项式系下, $\| G_n \| = 1$。

性质 6　对于 $L^n_{2,w}(E_n)$ 空间中的任一函数 $f(t_1,\cdots,t_n)$, 有如下关系成立

$$\| f(t_1,\cdots,t_n) \|_{L^2_{2,\bar{w}}} \geq \| G_nf(t_1,\cdots,t_n) \|_{R^M} \tag{13}$$

$$\| G_nf(t_1,\cdots,t_n)\bar{\phi}(t_1,\cdots,t_n) \|_{L^2_{2,\bar{w}}} = \| G_nf(t_1,\cdots,t_n) \|_{R^M} \tag{14}$$

性质 7

$$\lim_{m_i\to\infty} \| f(t_1,\cdots,t_n) - G_nf(t_1,\cdots,t_n)\times\bar{\phi}(t_1,\cdots,t_n) \|_{L^2_{2,\bar{w}}} = 0 \tag{15}$$

至此, 已将多维分段广义正交多项式算子的定义、性质作了较全面的概括。

3　多维分段广义正交多项式算子的运算规则

为使多维分段广义正交多项式算子法成为一套较完整的分析法, 并将其在控制领域中推广应用, 类似于 Laplace 算子, 需建立一系列建立在严格数学理论基础上的运算规则。本节给出有关多维分段广义正交多项式算子的主要运算规则。

规则 1(代数运算规则)

1) 设 $f(t_1,\cdots,t_n)$, $g(t_1,\cdots,t_n) \in L^n_{2,w}(E_n)$, k_1, $k_2 \in R$, 则有

$$G_n[k_1f(t_1,\cdots,t_n) + k_2g(t_1,\cdots,t_n)] = k_1G_nf(t_1,\cdots,t_n) + k_2G_ng(t_1,\cdots,t_n) \tag{16}$$

2) 若 $f(t_1,\cdots,t_n) \equiv k \in R$, 并令

$$e_i^{\mathrm{T}} = [\underbrace{1,0,\cdots,0}_{m_i},\underbrace{1,0,\cdots,0}_{m_i},\cdots,\underbrace{1,0,\cdots,0}_{m_i}] \in R^{Nm_i}$$

则有

$$G_n[f(t_1,\cdots,t_n)] = k[e_1^{\mathrm{T}} \otimes \cdots \otimes e_n^{\mathrm{T}}] \tag{17}$$

式中 $\otimes$ 表示 Kronecker 乘积。

规则 2(积分运算规则)

1) 正向积分运算

$$G_n\Big[\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_n} f(t_1,\cdots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\Big] =$$
$$[G_n f(t_1,\cdots,t_n)][P_{F_1}\otimes\cdots\otimes P_{F_n}] \tag{18}$$

2) 反向积分运算

$$G_n\Big[\int_{t_f}^{t_1}\cdots\int_{t_f}^{t_n} f(t_1,\cdots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\Big] =$$
$$[G_n f(t_1,\cdots,t_n)][P_{B_1}\otimes\cdots\otimes P_{B_n}] \tag{19}$$

其中 P_{F_i} 和 P_{B_i} 分别为一维分段广义正交多项式算子的正向和反向积分运算阵, 其结构分别为

$$P_{F_i} = \begin{bmatrix} P_1^{(i)} & Q_{1,2}^{(i)} & Q_{1,3}^{(i)} & \cdots & Q_{1,N}^{(i)} \\ 0 & P_2^{(i)} & Q_{2,3}^{(i)} & \cdots & Q_{2,N}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Q_{N-1,N}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_N^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$P_j^{(i)} = \frac{\Delta_j^{(i)}}{b-a}\times$$
$$\begin{bmatrix} -\frac{b_0}{a_0}-a & -\frac{1}{a_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_1+D_1 & B_1 & A_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{m_i-2} & 0 & 0 & \cdots & B_{m_i-2} & A_{m_i-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{m_i-1} & B_{m_i-1} \end{bmatrix}$$

$$Q_{j,k}^{(i)} = \frac{\Delta_j^{(i)}}{b-a}\begin{bmatrix} E_0 & 0 & \cdots & 0 \\ E_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_{m_i-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_i = -[A_i\phi_{i+1}(a) + B_i\phi_i(a) + C_i\phi_{i-1}(a)]$$

$$E_i = \int\phi_i(z)\,\mathrm{d}z,\quad i = 0,1,\cdots$$

其中 A_i, B_i, C_i, a_i, b_i 分别为定义在 $[a,b]$ 上的广义正交多项式的微分递推系数及代数递推系数, 它们由所采用的具体正交多项式而定。

规则 3(元素乘积运算规则)

$$G_n[t_1\cdots t_n\bar{\Phi}(t_1,\cdots,t_n)] = H_{t_1}\otimes\cdots\otimes H_{t_n} \tag{20}$$

式中

$$H_{t_i} = \text{block-diag}[H_1,\cdots,H_N]$$

$$H_i =$$
$$\begin{bmatrix} -\frac{b_{i0}^*}{a_{i0}^*} & \frac{1}{a_{i0}^*} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{c_{i1}^*}{a_{i1}^*} & -\frac{b_{i1}^*}{a_{i1}^*} & \frac{1}{a_{i1}^*} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{b_{i,m_i-2}^*}{a_{i,m_i-2}^*} & \frac{1}{a_{i,m_i-2}^*} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{c_{i,m_i-1}^*}{a_{i,m_i-1}^*} & -\frac{b_{i,m_i-1}^*}{a_{i,m_i-1}^*} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$a_{i,j}^* = a_j\frac{b-a}{\Delta_i},\quad c_{i,j}^* = c_j$$

$$b_{i,j}^* = a_j\frac{at_i - bt_{i-1}}{\Delta_i} + b_j$$

至此, 已将本文所要用到的有关运算规则做了归纳。因篇幅所限, 详细推导过程略去。

4 非线性分布参数系统辨识的二维 PGOPO 法

分布参数系统是一类既随时间变化又随空间变化的无限维系统, 其控制问题涉及偏微分方程的求解, 处理起来较集中参数系统更为复杂, 因此寻求新的处理方法是很有意义的。本文就多维分段广义正交多项式算子法在非线性分布参数系统参数辨识问题中的应用进行探讨。

考虑如下二阶分布参数系统

$$a\frac{\partial^2 y^{k_1}(x,t)}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2 y^{k_2}(x,t)}{\partial x\partial t} + c\frac{\partial^2 y^{k_3}(x,t)}{\partial x^2} +$$
$$d\frac{\partial^2 y^{k_4}(x,t)}{\partial t} + e\frac{\partial^2 y^{k_5}(x,t)}{\partial x} + f y^{k_6}(x,t) =$$
$$u^{k_7}(x,t) \tag{22}$$

初值条件为

$$y(x,0) = f(x),\quad y(0,t) = g(t)$$
$$\partial y^{k_2}(x,t)/\partial x\big|_{t=0} = k(x)$$
$$\partial y^{k_1}(x,t)/\partial t\big|_{t=0} = h(x)$$
$$\partial y^{k_3}(x,t)/\partial x\big|_{x=0} = l(t)$$

设系统的量测方程为 $z(x,t) = y(x,t) + e(x,t)$, 待辨识的参数为 a,b,c,d,e,f。

分别对 x 和 t 二次积分后, 式(22) 转换为

$$a\int\int\int\int\Big[y^{k_1}(x,t) - y^{k_1}(x,0) - t\frac{\partial y^{k_1}}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x +$$
$$b\int\int\int\int\Big[y^{k_2}(x,t) - y^{k_2}(0,x) -$$
$$\int\Big(\frac{\partial y^{k_1}}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + c\int\int\int\int\Big[y^{k_3}(x,t) -$$
$$y^{k_3}(0,t) - x\frac{\partial y^{k_3}}{\partial x}\Big|_{x=0}\Big]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t +$$

$$d\iiint\!\!\int[y^{k_4}(x,t)-y^{k_4}(x,0)]\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}x+$$
$$e\iiint\!\!\int[y^{k_5}(x,t)-y^{k_5}(0,t)]\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t\mathrm{d}x+$$
$$f\iiiint\!\!\int y^{k_6}(x,t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}x=$$
$$\iiiint\!\!\int u^{k_7}(x,t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}x \qquad (23)$$

在二维分段广义正交多项式算子的作用下, 由上式得

$$a\{G[y^{k_1}]-G[f^{k_1}]-G[th]\}(I\otimes P_{Fx}^2)+b\{G[y^{k_2}]-G[g^{k_2}]-G[k](I\otimes P_{Fx})\}(P_{Ft}\otimes P_{Fx}+c\{G[y^{k_3}]-G[g^{k_3}]-G[xl]\}(P_{Ft}^2\otimes I)+d\{G[y^{k_4}]-G[f^{k_4}]\}(P_{Ft}\otimes P_{Fx}^2)+e\{G[y^{k_5}]-G[g^{k_5}]\}(P_{Ft}^2\otimes P_{Fx})+f\{G[y^{k_6}]\}(P_{Ft}^2\otimes P_{Fx}^2)\approx\{G[u^{k_7}]\}(P_{Ft}^2\otimes P_{Fx}^2) \qquad (24)$$

式中 P_{Fx} 和 P_{Ft} 分别表示对 x 和 t 的一维正向积分运算阵。显然, 在分段广义正交多项式算子的作用下, 偏微分方程(22) 转换为算子象空间中由代数方程所描述的系统。此时未知参数的最小二乘估计可表示为

$$\theta=G[u^{k_7}](P_{Ft}^2\otimes P_{Fx}^2)T^{\mathrm{T}}(TT^{\mathrm{T}})^{-1} \qquad (25)$$

上式中待辨识的参数有 6 个, 方程个数为 $N_1N_2m_1m_2$。只要选择足够大的分段数和正交基项数, 便可由式(25) 得到未知参数的最小二乘解。其中

$$\theta=[a,b,c,d,e,f]$$

$$T=\begin{bmatrix}\{G[y^{k_1}]-G[f^{k_1}]-G[th]\}(I\otimes P_{Fx}^2)\\ \{G[y^{k_2}]-G[g^{k_2}]-G[k]\}(P_{Ft}\otimes P_{Fx})\\ \{G[y^{k_3}]-G[g^{k_3}]-G[xl]\}(P_{Ft}^2\otimes I)\\ \{G[y^{k_4}]-G[f^{k_4}]\}(P_{Ft}\otimes P_{Fx}^2)\\ \{G[y^{k_5}]-G[g^{k_5}]\}(P_{Ft}^2\otimes P_{Fx})\\ \{G[y^{k_6}]\}(P_{Ft}^2\otimes P_{Fx}^2)\end{bmatrix}$$

5　数值算例分析

考虑如下分布参数系统的辨识问题

$$a\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}+b\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+cy(x,t)=u(x,t)$$
$$y(x,0)=0,\quad y(0,t)=0$$
$$x\in[0,1],\quad t\in[0,1]$$

参数 a, b, c 的真实值分别为 2, 4, 1。在 $u(x,t)=xt+4x+2t$ 下得到模拟量测数据, 根据本文提出的算法, 辨识结果如表 1 所示。其中 GOPs 指不分段的一般正交多项式系。

表 1　辨识结果

噪声方差	a	b	c
0(PGOPO 法 $N=2, m=3$)	2.000	4.000	1.000
0(GOPs 法, $m=8$)	2.00	4.00	1.00
0.01(PGOPO 法)	1.982 9	3.992 6	0.979 9
0.04(PGOPO 法)	2.041 3	3.948 4	1.096 0

由表 1 可以看到, 采用分段广义正交多项式方法, 在存在量测噪声的情况下, 辨识结果较好; 即使使用较少的分段数和正交基项数, 也能得到较高的辨识精度。

6　结　　论

本文提出了多维分段广义正交多项式及其相应算子的概念, 推导出有关多维分段广义正交多项式算子的基本性质及其主要运算规则, 从而使正交多项式分析法能建立在较严格的数学理论基础上, 为误差分析及收敛性分析打下基础。使用二维分段广义正交多项式算子, 对一类非线性分布参数系统的参数辨识问题进行研究, 在算子的作用下, 将原偏微分方程所描述的系统转化为算子象空间中关于未知系数的代数方程所描述的系统。结合最小二乘法, 即使存在量测噪声, 使用较少的分段数和正交基项数也能得到较高的辨识精度。

参考文献(References):

[1] Sinha M S P, Rajamani V S, Sinha A K. Identification of non-linear distributed system using Walsh function [J]. *Int J Control*, 1980, 32(4): 669-676.

[2] Hsu N S, Cheng B. Identification of non-linear distributed systems via block-pulse functions [J]. *Int J Control*, 1982, 36(2): 281-291.

[3] Mohan B M, Datta K B. Identification of non-linear distributed systems via orthogonal functions [J]. *Int J Control*, 1990, 52(3): 795-800.

[4] Hu Y Z, Davison E J. A PMGOP method of parameter identification for a class of continuous nonlinear systems [J]. *Int J Control*, 1995, 62(2): 349-378.

[5] Gu Xingsheng, Hu Y Z. System analysis and parameter identification of linear time-varying delay systems via piecewise multiple Chebyshev polynomials [J]. *Control Theory & Appl*, 1991, 8(2): 154-161.