

文章编号: 1001-0920(2002)04-0415-04

一类模糊系统的逼近问题

刘晓华^{1,2}, 冯恩民¹, 陈卫田³, 王秀红²

(1. 大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024; 2. 烟台师范学院 数学与计算机科学系, 山东 烟台 264025; 3. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165)

摘要: 对于一类模糊系统, 首次给出了它们可在紧论域上以任意要求的精度逼近任意 C^1 函数的构造性充分条件, 同时导出了可用于计算所需模糊规则条数的显式公式。对于多项式函数情形, 证明了所给结果比文献[1]中结果保守性要小。

关键词: 模糊系统; 隶属函数; 模糊规则

中图分类号: TP 273.4

文献标识码: A

On the approximation problem of a class of fuzzy systems

LIU Xiao-hua^{1,2}, FENG En-min¹, CHEN Wei-tian³, WANG Xiu-hong²

(1. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. Department of Mathematics and Computer Science, Yantai Teachers Normal College, Yantai 264025, China; 3. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu 273165, China)

Abstract: Constructive sufficient conditions are established, under which a class of fuzzy systems can approximate any C^1 functions to any required accuracy on a compact domain. Explicit formulas which can be used to calculate the number of needed fuzzy rules are derived simultaneously. For the case that the C^1 functions are polynomials, it is also proved that our results are less conservative than the ones in reference [1].

Key words: fuzzy system; membership function; fuzzy rule

1 引言

目前, 模糊逻辑控制器越来越广泛地应用于实际问题^[2]。为了保证模糊控制器的成功应用, 人们开始研究模糊系统的逼近性质。文献[2]~[7]针对不同类型的模糊系统, 证明了它们在紧致集上可以逼近任何连续函数, 但所给结果仅仅是存在性的, 而没

有给出在给定精度下计算模糊规则条数的公式, 这给具体应用带来不便。

在实际问题中, 人们必须把模糊系统构造出来, 而其中首要的问题是必须确定模糊规则的数目。目前, 唯一的关于规则条数的构造性充分条件是由文献[1]给出的, 但其结果仅是针对多项式直接建立的。本文对文献[2]中定义的一类相当广泛的模糊

收稿日期: 2001-04-10; 修回日期: 2001-06-25

基金项目: 山东省自然科学基金项目(Y2000G08)

作者简介: 刘晓华(1959—), 男, 山东烟台人, 教授, 在职博士生, 从事自适应控制理论、模糊控制理论研究; 冯恩民(1939—), 男, 辽宁绥中人, 教授, 博士生导师, 从事运筹学与控制论的理论及应用研究。

系统进行研究,并建立其逼近任意 C^1 函数的构造性充分条件。

2 预备知识

定义 1 设 a 和 b 为有限实数,当且仅当 $x \in (a, b)$ 时, $\mu(a, b)(x) > 0$, 且 $0 < \mu(a, b)(x) < 1$, 则称 $\mu(a, b): R \rightarrow R$ 为隶数函数。

定义 2 对于函数 $g(\vec{x})$, 其中 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U^m \subset R^m$, 当且仅当 $\partial g / \partial x_i (1 \leq i \leq m)$ 都连续时, 则称其为 C^1 函数。

记模糊系统 $S = S(T, T^*, I, T^*, \mu(a, b))$, 其中 T 和 T^* 表示 t -范数, T^* 表示 t -协范数, I 表示模糊隐含规则。

1) 单点模糊化: 对于每个 \vec{x}^0 , 有一个定义在论域 U 上的模糊集, 其隶属函数 $A(\vec{x})$ 定义为: 当 $\vec{x} = \vec{x}^0$ 时, $A(\vec{x}) = 1$; 当 $\vec{x} \neq \vec{x}^0$ 时, $A(\vec{x}) = 0$ 。

2) 规则基: 由 k 条具有如下形式的模糊规则组成

$$\begin{aligned} &\text{If } x_1 \text{ is } A_{1j}, x_2 \text{ is } A_{2j}, \dots, x_m \text{ is } A_{mj} \\ &\text{Then } y \text{ is } B_j, 1 \leq j \leq k \end{aligned}$$

其中, $A_{ij}(x_i) = \mu(a_{ij}^1, a_{ij}^2)$ 是 A_{ij} 的隶属函数, $B_j(y) = \mu(b_j^1, b_j^2)(y)$ 是 B_j 的隶属函数, $a_{ij}^1 < a_{ij}^2 \in R, b_j^1 < b_j^2 \in R$ 。即当且仅当 $A_j(\vec{x}^0) > 0$ 时, 其中 $A_j(\vec{x}) = T(A_{1j}(x_1), \dots, A_{mj}(x_m))$, 第 j 条规则才起作用。

3) 模糊推理: 对于 $\vec{x} = \vec{x}^0$, 则有 $B(y) = T^*(B^1(y), B^2(y), \dots, B^k(y))$

其中 $B_j(y) = \begin{cases} I(A_j(\vec{x}^0), B_j(y)), & A_j(\vec{x}^0) > 0 \\ 0, & A_j(\vec{x}^0) = 0 \end{cases}$

4) 去模糊方法: $y^0 = S(\vec{x}^0) \in \text{supp}(B)$, 其中 $\text{supp}(B)$ 表示模糊集 B 的支撑。

容易看出, 当对每个区间 $[c_i, d_i] (1 \leq i \leq n)$ 都进行等分割时, 对 $S(\vec{x}^0)$ 而言, 唯一没有确定的参数是模糊规则条数 k 。

3 模糊控制器逼近多变量 C^1 函数的构造性条件

考虑定义在紧致集 $D = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_m, d_m] \subset R^m$ 上的 C^1 函数 $g(\vec{x})$ 。令 $M_g^i = \max_D |\partial g(\vec{x}) / \partial x_i|, 1 \leq i \leq m$, 记 $f(\vec{x}) =$

阶多项式函数, 则有

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \sum_{r_1+\dots+r_m=1, r_i=1}^{n-1} r_i f_{r_1 \dots r_m} x_i^{r_i-1} \times \prod_{j=1, j \neq i}^m x_j^{r_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

令 $f_{x_i} = \partial f(\vec{x}) / \partial x_i$, 并记

$$M_{f^1}^i = \max_D |f_{x_i}^1|$$

$$M_{f^2}^i = \max_D \left\{ \sum_{r_1+\dots+r_m=1, r_i=1}^{n-1} r_i |f_{r_1 \dots r_m}| \times \prod_{j=1, j \neq i}^m x_j^{r_j} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

由定义, 立即可得如下引理:

引理 1 $M_{f^1}^i \leq M_{f^2}^i, i = 1, 2, \dots, m$ 。

3.1 $S(\vec{x})$ 逼近多变量 C^1 函数的构造性充分条件

定理 1 对于任意定义在 $D = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_m, d_m] \subset R^m$ 上的 C^1 函数 $g(\vec{x})$, 以及任意给定的 $\epsilon > 0$, 假设对 $a > 0$, 有 $I(a, 0) = 0$, 则当模糊规则条数 k 满足 $k \geq \lceil \frac{1}{\epsilon} [\text{int}(mM_g^i(d_i - c_i) / \epsilon) + 1] \rceil$ 时, 有 $\sup_D |g(\vec{x}) - S(\vec{x})| < \epsilon$ 。

证明 只需证明 $k = \lceil \frac{1}{\epsilon} [\text{int}(mM_g^i(d_i - c_i) / \epsilon) + 1] \rceil$ 时, 有 $\sup_D |g(\vec{x}) - S(\vec{x})| < \epsilon$ 即可。

对任意的 $\vec{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_m^1) \in D$ 和 $\vec{x}^2 = (x_1^2, \dots, x_m^2) \in D$, 若定义 $g_j = g(x_1^2, \dots, x_j^2, \dots, x_m^1), 1 \leq j \leq m-1, g_0 = g(\vec{x}^1), g_m = g(\vec{x}^2)$, 则有

$$\begin{aligned} |g(\vec{x}^1) - g(\vec{x}^2)| &= \\ & \left| \sum_{j=1}^m (g_{j-1} - g_j) \right| \leq \sum_{j=1}^m |g_{j-1} - g_j| \quad (1) \end{aligned}$$

由 $g(\vec{x})$ 是 C^1 函数及 $M_g^j (1 \leq j \leq m)$ 和 $g_j (0 \leq j \leq m)$ 的定义, 可得

$$|g(\vec{x}^1) - g(\vec{x}^2)| \leq \sum_{j=1}^m M_g^j |x_j^1 - x_j^2| \quad (2)$$

令 $k_i = \text{int}(mM_{i1}(d_i - c_i) / \epsilon) + 1, 1 \leq i \leq m$,

则 $k = \sum_{i=1}^m k_i$ 。对每个 $1 \leq i \leq m$, 将 $[c_i, d_i]$ 等分成 k_i 个子区间 $[c_i + (j-1)(d_i - c_i) / k_i, c_i + j(d_i - c_i) / k_i], 1 \leq j \leq k_i$, 则 $c_i + (2j-1)(d_i - c_i) / 2k_i$ 是 $[c_i + (j-1)(d_i - c_i) / k_i, c_i + j(d_i - c_i) / k_i]$ 的中心点。令 $a_{ij} = c_i + (2j-1)(d_i - c_i) / 2k_i, 1 \leq j \leq k_i, 1 \leq i \leq m$, 对任给的 $\epsilon > 0$, 可定义如下一组开集

$$O_{ij} = \left\{ \vec{x} \mid \frac{\epsilon}{2mM_g^i} < a_{ij} - x_i < \frac{\epsilon}{2mM_g^i} \right\}$$

$$1 \quad j \quad k_i, \quad 1 \quad i \quad m$$

容易推得

$$[c_i, d_i] =$$

$$\prod_{j=1}^{k_i} \left[c_i + \frac{(j-1)(d_i - c_i)}{k_i}, c_i + \frac{j(d_i - c_i)}{k_i} \right] \subset \prod_{j=1}^{k_i} O_{ij}, \quad i = 1, \dots, m$$

由此可知 $D \subset \left(\prod_{j=1}^{k_1} O_{1j} \right) \times \dots \times \left(\prod_{j=1}^{k_m} O_{mj} \right)$ 。定义

$\prod_{i=1}^m k_i$ 个 R^m 的开集为 $O_{h_1 \dots h_m} = O_{1h_1} \times \dots \times O_{mh_m}, 1$

$$h_j = k_j, 1 \leq j \leq m, \text{ 显然有 } D \subset \left(\prod_{j=1}^{k_1} O_{1j} \right) \times \dots \times$$

$$\left(\prod_{j=1}^{k_m} O_{mj} \right) = O_{h_1 \dots h_m}, \text{ 其中 } \prod_{j=1}^{k_j} O_{hj} \text{ 表示}$$

所有 $O_{h_1 \dots h_m}$ 的并。记 $O_{h_1 \dots h_m}$ 的中心为 $\vec{a}_{h_1 \dots h_m} = (a_{1h_1}, \dots, a_{mh_m})$ 。

第 2 节定义的模糊系统中的隶属函数为

$$A_{jk} = \mu(a_{jh_j} - \frac{\epsilon}{2mM_g^j}, a_{jh_j} + \frac{\epsilon}{2mM_g^j})(x_j)$$

$$1 \quad h_j \quad k_j, \quad 1 \quad j \quad m$$

$$B_{h_1 \dots h_m}(y) =$$

$$\mu(g(\vec{a}_{h_1 \dots h_m}) - \epsilon/2, g(\vec{a}_{h_1 \dots h_m}) + \epsilon/2)(y)$$

$$1 \quad h_j \quad k_j, \quad 1 \quad j \quad m$$

对于每个 $\vec{x}^0 \in D$, 总有 $y^0 = S(\vec{x}^0) \in \text{supp}(B)$, 从而有 $B(y^0) > 0$, 即 $B(y^0) = T^*(B_{h_1 \dots h_m}(y^0)) > 0, 1 \leq h_j = k_j, 1 \leq j \leq m$ 。因此存在 h_j^0 , 使得 $B_{h_1^0 \dots h_m^0}(y^0) > 0, 1 \leq h_j^0 = k_j, 1 \leq j \leq m$ 。

现在证明 $|g(\vec{x}^0) - S(\vec{x}^0)| < \epsilon$ 。由 $B_{h_1^0 \dots h_m^0}(y^0) > 0$ 意味着 $A_{h_1^0 \dots h_m^0}(\vec{x}^0) = T(A_{1h_1^0}(x_1^0), \dots, A_{mh_m^0}(x_m^0)) > 0$ 。由此及 $A_{jh_j}(x_j)$ 的定义, 可以保证 $\vec{x}^0 \in O_{h_1^0 \dots h_m^0} \subset D$, 因此利用式(2)可推得

$$|g(\vec{x}^0) - g(\vec{a}_{h_1^0 \dots h_m^0})| \leq \sum_{i=1}^m M_g^i |x_i^0 - a_{ih_i^0}| < \sum_{i=1}^m M_g^i \frac{\epsilon}{2mM_g^i} = \frac{\epsilon}{2} \quad (3)$$

另一方面, $B_{h_1^0 \dots h_m^0}(y^0) > 0$ 意味着 $B_{h_1^0 \dots h_m^0}(S(\vec{x}^0)) > 0$, 由定义立即可得

$$|g(\vec{a}_{h_1^0 \dots h_m^0}) - S(\vec{x}^0)| < \epsilon/2 \quad (4)$$

利用式(3)和(4), 可得

$$\begin{aligned} & |g(\vec{x}^0) - S(\vec{x}^0)| \\ & |g(\vec{x}^0) - g(\vec{a}_{h_1^0 \dots h_m^0})| + |g(\vec{a}_{h_1^0 \dots h_m^0}) - S(\vec{x}^0)| < \\ & \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

由于上式对每个 $\vec{x}^0 \in D$ 均成立, 于是有 $\sup_x |g(\vec{x}) - S(\vec{x})| < \epsilon$ 。定理得证。

由定理 1 知, 对于给定的逼近精度 $\epsilon > 0$, 模糊控制器 $S(\vec{x}^0)$ 逼近给定 C^1 函数 $g(\vec{x})$ 需要的模糊规则条数为

$$k = \prod_{i=1}^m [\text{int}(mM_g^i(d_i - c_i)/\epsilon) + 1] \quad (5)$$

注 1 定理 1 首次直接针对多变量 C^1 函数给出了构造性充分条件, 并建立了逼近精度与模糊规则条数之间的关系。

多项式 $f(\vec{x})$ 是特殊的 C^1 函数, 因此下述推论显然成立。

推论 1 对任意定义在 $D = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_m, d_m] \subset R^m$ 上的多项式函数 $f(\vec{x})$, 以及任意给定的 $\epsilon > 0$, 假设对 $a = 0$, 有 $I(a, 0) = 0$, 则当模糊规则条数 k 满足 $k = \prod_{i=1}^m [\text{int}(mM_{f^i}(d_i - c_i)/\epsilon) + 1]$

时, 有 $\sup_x |g(\vec{x}) - S(\vec{x})| < \epsilon$ 。

对于不确定的多变量函数, 也可给出所需规则条数的一个估计。

推论 2 对定义在 $D = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_m, d_m] \subset R^m$ 上的未知函数 $g(\vec{x})$, 以及任意给定的 $\epsilon > 0$, 假设对 $a = 0$, 有 $I(a, 0) = 0$, 且已知正常数 $M_{gu}^i, 1 \leq i \leq m$, 使得 $|\partial g / \partial x_i| \leq M_{gu}^i, 1 \leq i \leq m$, 则当 $k = \prod_{i=1}^m [\text{int}(mM_{gu}^i(d_i - c_i)/\epsilon) + 1]$ 时, 有 $\sup_x |g(\vec{x}) - S(\vec{x})| < \epsilon$ 。

3.2 模糊规则数量的比较

当要逼近的函数为多变量多项式函数时, 本文推论 1 和文献[1] 都直接给出了构造性充分条件。现将针对定义在 $D = [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1]$ 的同一多项式函数

$$f(\vec{x}) = \sum_{r_1 + \dots + r_m = 0}^n f_{r_1, \dots, r_m} \prod_{j=1}^m x_j^{r_j} \left[\prod_{j=1}^m r_j \right] \binom{n}{r_j}$$

进行比较。

由推论 1 知, 对于给定的逼近精度 $\epsilon > 0$, 模糊控制器 $S(\vec{x}^0)$ 逼近给定的多项式函数需要的模糊规则条数为

$$k_f^{\text{pl}} = \prod_{i=1}^m [\text{int}(mM_{f^i}/\epsilon) + 1] \quad (6)$$

其中

$$M_{f^i}^i = \max_{x \in [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1]} |f(x_i)|, \quad 1 \leq i \leq m$$

利用文献[1]中的充分条件不能直接计算出模糊控制器所需的模糊规则条数,而必须进行一次以上的检验。由文献[1]中的充分条件,需要首先计算

$$k_{f^2}^{\text{mpl}} = [2\text{int}(mM_{f^2}/\epsilon) + 3]^m \quad (7)$$

其中 $M_{f^2} = \prod_{i=1}^m M_{f^i}^2$, 而

$$M_{f^i}^i = \prod_{r_1+\dots+r_m=1, r_i=1}^{n-1} r_i |f_{r_1, \dots, r_m}|$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

然后根据文献[1]中提供的检验关系式进行检验,若检验关系式满足,则模糊规则条数即为 $k_{f^{\text{mpl}}}$;若不满足,则将 $k_{f^{\text{mpl}}}$ 增加1。重复以上过程,直到检验关系式满足为止。若记由文献[1]中充分条件计算出的模糊规则条数为 $k_{f^2}^*$,则由以上分析,显然有 $k_{f^2}^{\text{mpl}} > k_{f^2}^*$ 。

对 $k_{f^{\text{mpl}}}$ 与 $k_{f^2}^*$ 进行比较,可得如下定理:

定理2 对 $k_{f^{\text{mpl}}}$, $k_{f^2}^{\text{mpl}}$ 及 $k_{f^2}^*$, 有 $k_{f^{\text{mpl}}} < k_{f^2}^{\text{mpl}} < k_{f^2}^*$ 。

证明 由

$$k_{f^{\text{mpl}}} = \prod_{i=1}^m \text{int}\left(\frac{2mM_{f^i}^1 + \epsilon}{\epsilon}\right)$$

$$\prod_{i=1}^m \frac{2mM_{f^i}^1 + \epsilon}{\epsilon} = \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^m \prod_{i=1}^m \left(M_{f^i}^1 + \frac{\epsilon}{2m}\right) \quad (8)$$

$$k_{f^2}^{\text{mpl}} = [2\text{int}\left(\frac{M_{f^2}}{\epsilon}\right) + 3]^m >$$

$$\left(\frac{2M_{f^2}}{\epsilon} + 1\right)^m = \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^m \left(M_{f^2} + \frac{\epsilon}{2}\right)^m \quad (9)$$

令 $M_2 = \prod_{i=1}^m M_{f^i}^1 + \frac{\epsilon}{2} = \prod_{i=1}^m \left(M_{f^i}^1 + \frac{\epsilon}{2m}\right)$, 则由引理1得

$$M_2 = M_{f^2} + \epsilon/2 \quad (10)$$

由于 $M_{f^i}^1 + \frac{\epsilon}{2m} > 0, i = 1, 2, \dots, m$, 显然可得

$$\prod_{i=1}^m \left(M_{f^i}^1 + \frac{\epsilon}{2m}\right) < \left[\frac{\prod_{i=1}^m \left(M_{f^i}^1 + \frac{\epsilon}{2m}\right)}{m}\right]^m = \left[\frac{M_2}{m}\right]^m$$

由上式及式(10)有

$$\prod_{i=1}^m \left(M_{f^i}^1 + \frac{\epsilon}{2m}\right) < \left(\frac{M_2}{m}\right)^m < \left(M_{f^2} + \frac{\epsilon}{2}\right)^m \quad (11)$$

则由式(8), (9) 和 (11) 可得 $k_{f^{\text{mpl}}} < k_{f^2}^{\text{mpl}} < k_{f^2}^*$ 。

注2 从定理2可以看出,对于多变量函数情

形,由本文充分条件给出的模糊规则条数比文献[1]中充分条件给出的模糊规则条数要少,因此本文结果比[1]中结果保守性要小。另外,利用本文充分条件导出的模糊规则条数式(5),可直接计算出所需的模糊规则的数目,而文献[1]中给出的公式,要进行至少一次以上的检验才能确定所需的模糊规则的数目。

4 结 论

本文通过采用与文献[1]不同的方法,得到以下主要结果:1)首次针对一类模糊系统,直接给出了它们逼近任意 C^1 函数的构造性充分条件;2)给出了计算模糊规则条数的显式公式,该公式直接建立了逼近精度与模糊规则条数之间的关系;3)在逼近同一多项式函数时,可以证明,由本文公式计算得到的规则条数比用文献[1]中公式得到的规则条数要少得多。另外,寻找具有更小保守性的构造性充分条件,还有待于进一步研究。

参考文献(References):

- [1] Hao Ying. Sufficient conditions on general systems as function approximators[J]. *Automatica*, 1994, 30(3): 521-525.
- [2] J L Castro. Fuzzy logic controllers are universal approximators[J]. *IEEE Trans on Syst, Man & Cybern*, 1995, 25(4): 629-635.
- [3] J J Buckley. Universal fuzzy controllers[J]. *Automatica*, 1992, 28(6): 1245-1248.
- [4] B Kosko. Fuzzy systems as universal approximators [A]. *Proc of IEEE Int Conf on Fuzzy Syst*[C]. San Diego, 1992. 1153-1162.
- [5] L X Wang. Fuzzy systems are universal approximators [A]. *Proc of IEEE Int Conf on Fuzzy Syst*[C]. San Diego, 1992. 1163-1170.
- [6] L X Wang, J M Mendel. Fuzzy basic functions, universal approximation and orthogonal least-squares learning [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1992, 3(4): 807-814.
- [7] X J Zeng, M G Singh. Approximation theory of fuzzy systems — SISO case[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Syst*, 1994, 2(2): 162-176.