第 17 卷 第 4 期 控 制 与 决 策 2002 年 7 月
Vol. 17 No. 4 Control and Decision July 2002

文章编号: 1001-0920(2002)04-0423-04

复杂系统可靠性多级综合的熵法第二近似限

孙有朝
(南京航空航天大学 民航学院, 江苏 南京 210016)

摘 要: 根据信息量相等的原理, 将部件或分系统的试验信息折合为产品的等效试验信息, 导出了指数寿命型系统的部件或分系统试验信息等效折合的基本公式。根据单元可靠性评定的基本理论, 给出了基于信息理论的复杂系统可靠性第二近似限的基本模型。计算实例说明了模型的具体应用, 并与传统方法的评定结果进行比较, 说明了模型的正确性和实用性。

关键词: 复杂系统; 信息量; 信息熵; 可靠性综合; 可靠性第二近似限
中图分类号: TB 114.3; O 213.2 文献标识码: A

Information entropy method of reliability second approximate confidence limit for complex system

SUN You-chao
(Civil Aviation College, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The test data of the parts or subsystems are converted into the equivalent test data of the system based on the principle of the information quantity equivalence. The basic formulae of entropy method are presented for the exponential distribution system composed of success-failure parts or subsystems. The general models of entropy method synthesis assessment for system reliability second approximate confidence limits are established. Examples are given to illuminate the application of the models. Comparing with the results of traditional methods, the models are valid and practicable and the assessment results are satisfactory.

Key words: complex system; information quantity; information entropy; reliability synthesis; reliability second approximate confidence limit

1 引 言

为了对复杂系统的可靠性进行有效评估, 需要对组成复杂系统的子系统、组合件以及零部件的大量试验和使用信息进行金字塔式多级综合。其基本步骤为: 首先, 将组成系统的各低装配级的试验或使用数据折合为系统的等效数据; 然后, 将折合的等效数据与系统的实际试验数据进行综合, 得到系统的综合信息; 最后, 根据单元可靠性的评定原理, 求出系统可靠性参数的近似限。系统可靠性多级综合的关键是试验数据的折合, 即将组成系统的各低装配级的试验数据折算成系统的等效试验数据。

试验或使用数据通常来自服从某一分布的总体, 可能是成败型或指数型的, 也可能是正态型或威布尔型的。成败型系统是指试验结果仅分为成功和

收稿日期: 2001-05-06; 修回日期: 2001-06-28
基金项目: 航空科学基金项目(98J52082); 教育部高等学校骨干教师计划项目(M0076-MH)
作者简介: 孙有朝(1965—), 男, 河南南阳人, 副教授, 博士, 从事机电一体化、可靠性维修性工程等研究。

失败两种结果的系统。在工程实际中,组成复杂系统的零部件或子系统的试验和使用数据可视为成败型的,而复杂系统由于其复杂性通常可视为指数寿命型的。本文研究由成败型单元或分系统组成的指数寿命型系统的可靠性多级综合问题。为了区别起见,将此近似限称为第二近似限。

2 分系统的实际试验信息

设系统由 N 个相互独立的不同成败型分系统组成,第 i 个分系统试验 n_i 次,失败 f_i 次,成功 $s_i(=n_i-f_i)$ 次。第 i 个分系统在每次试验中出现成功信息的概率为 p_i,出现失败信息的概率为 $1-p_i$。由信息理论知,第 i 个分系统在每次试验中提供的平均信息量为[1,2]

$$H_i=-[p_i\ln p_i+(1-p_i)\ln(1-p_i)] \quad (1)$$

由此可知,第 i 个分系统在 n_i 次试验中提供的信息量为 n_iH_i。根据信息量的可加特性,可求出在全部实际试验中,组成系统的 N 个相互独立的不同成败型分系统提供的总信息量

$$I=\sum_{i=1}^{N}n_iH_i=-\sum_{i=1}^{N}n_i[p_i\ln p_i+(1-p_i)\ln(1-p_i)] \quad (2)$$

3 系统的等量折合试验信息

3.1 指数寿命型系统的等效试验信息

设系统等量折合的失效次数为 z,任务时间为 t_0,总试验时间为 τ,失效率为 λ,等效任务数为 $\eta(=\tau/t_0)$。指数分布为连续型概率分布,其信息量不能直接用式(1)计算。但是指数分布具有无记忆特性,在每个等效任务数(任务时间为 t_0)内,系统均具有相同的可靠度 $R(t_0)$ 和不可靠度 $1-R(t_0)$。将此"离散"后的 $R(t_0)$ 和 $1-R(t_0)$ 作为信息源中离散信息所示事件出现的概率,式(1)便可以应用。因此对指数寿命型系统,在其折合试验中,每个等效任务数内应提供的信息量

$$\bar{H}=-[R(t_0)\ln R(t_0)+(1-R(t_0))\ln(1-R(t_0))] \quad (3)$$

则系统在 η 个等效任务数内应提供的总信息量

$$\bar{I}=\eta\bar{H}=-\eta[R(t_0)\ln R(t_0)+(1-R(t_0))\ln(1-R(t_0))] \quad (4)$$

根据总信息量相等的原则(令 $\bar{I}=I$),并利用 λ 的 MLE $\hat{\lambda}=z/\tau$ 和 $R(t_0)=\hat{R}(t_0)=\exp(-\hat{\lambda}t_0)=\exp(-z/\eta)$,便可导出 N 个部件或分系统的实际试验信息等效为指数寿命型系统的等量折合试验信息

$$\begin{cases}\eta=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(s_i\ln s_i+f_i\ln f_i-n_i\ln n_i)}{R(t_0)\ln R(t_0)+(1-R(t_0))\ln(1-R(t_0))}\\ z=-\eta\ln R(t_0)\end{cases} \quad (5)$$

3.2 $R(t_0)$ 的确定

在工程实际中,式(5)中 $R(t_0)$ 可根据系统或产品的实际可靠性结构模型,用部件或分系统的试验信息来具体确定。下面给出 N 个部件或分系统组成几种常见可靠性结构模型时 $R(t_0)$ 的极大似然估计(MLE)公式。

1) 串联可靠性模型

$$R(t_0)=\prod_{i=1}^{N}\hat{p}_i=\prod_{i=1}^{N}\frac{s_i}{n_i} \quad (6)$$

2) 并联可靠性模型

$$R(t_0)=1-\prod_{i=1}^{N}(1-\hat{p}_i)=1-\prod_{i=1}^{N}\frac{f_i}{n_i} \quad (7)$$

3) $k/N(G)$ 模型[3]

$$R(t_0)=\prod_{i=1}^{N}\hat{p}_i\Big[1+\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\hat{p}_i}{\hat{p}_i}+\sum_{j>i=1}^{N}\frac{(1-\hat{p}_i)(1-\hat{p}_j)}{\hat{p}_i\hat{p}_j}+\cdots+\sum_{N-k>\cdots j>i=1}^{N}\frac{(1-\hat{p}_i)(1-\hat{p}_j)\cdots(1-\hat{p}_{N-k})}{\hat{p}_i\hat{p}_j\cdots\hat{p}_{N-k}}\Big] \quad (8)$$

4) $2/3(G)$ 模型

$$R(t_0)=\frac{s_1s_2}{n_1n_2}+\frac{s_2s_3}{n_2n_3}+\frac{s_1s_3}{n_1n_3}-2\frac{s_1s_2s_3}{n_1n_2n_3} \quad (9)$$

4 系统可靠性熵法第二近似限的基本模型

设系统实际试验的失效次数为 Z',等效任务数为 η';系统综合的失效次数为 Z_s,等效任务数为 η_s。由式(5),有

$$Z_s=z+Z',\quad \eta_s=\eta+\eta' \quad (10)$$

当系统没有进行实际试验,即 $\eta'=0$ 时,有

$$Z_s=z,\quad \eta_s=\eta \quad (11)$$

本文主要研究基于信息理论的系统可靠性近似限的熵法评定问题。为与其它近似限评定方法加以区别和比较,这里用 s-Classical 法表示基于信息

论折合思想的经典法, 用 s-Bayes 法表示基于信息论折合思想的Bayes 法。此时, 由式(10) 或(11) 求得综合信息 Z_s 和 η_s 后, 再将系统整体视为一个指数寿命型单元, 即可根据指数型单元可靠性评定的基本原理[4], 求出系统可靠性的熵法第二近似限。下面给出系统可靠性熵法第二近似限的基本模型。

4.1　系统可靠性 s-Classical 第二近似下限 $\bar{R}_{L,s\text{-}C}$

设系统失效次数变量为 k, 则指数单元有替换定时截尾失效率非随机化最优置信上限可表示为

$$\sum_{k=0}^{Z_s}\frac{(\lambda_{s;U,s\text{-}C}\tau_s)^k}{k!}\exp(-\lambda_{s;U,s\text{-}C}\tau_s)=1-\gamma \tag{12}$$

由此可得

$$\lambda_{s;U,s\text{-}C}=\chi^2_{2Z_s+2,\gamma}/(2\tau_s) \tag{13}$$

$$\bar{R}_{L,s\text{-}C}=\exp(-\lambda_{s;U,s\text{-}C}t_0)=\exp[-\chi^2_{2Z_s+2,\gamma}/(2\eta_s)] \tag{14}$$

其中, $\lambda_{s;U,s\text{-}C}$ 表示系统失效率的非随机化最优置信上限, $\tau_s(=\eta_s t_0)$ 表示系统综合的总试验时间, t_0 为系统的任务时间, $\chi^2_{2Z_s+2,\gamma}$ 表示自由度为 $2Z_s+2$ 的 χ^2 分布的 γ 分位数。

由式(13) 可求出给定可靠度 R 时系统工作时间(即可靠寿命) 的下限

$$t_{R;L,s\text{-}C}=\frac{1}{\lambda_{s;U,s\text{-}C}}\ln\frac{1}{R} \tag{15}$$

4.2　系统可靠性 s-Classical 第二近似上限 $\bar{R}_{U,s\text{-}C}$

设替换定时截尾失效率非随机化最优置信下限为 $\lambda_{s;L,s\text{-}C}$, 则有

$$\sum_{k=Z_s}^{\infty}\frac{(\lambda_{s;L,s\text{-}C}\tau_s)^k}{k!}\exp(-\lambda_{s;L,s\text{-}C}\tau_s)=1-\gamma \tag{16}$$

由此可得

$$\lambda_{s;L,s\text{-}C}=\chi^2_{2Z_s,1-\gamma}/(2\tau_s) \tag{17}$$

$$\bar{R}_{U,s\text{-}C}=\exp(-\lambda_{s;L,s\text{-}C}t_0)=\exp[-\chi^2_{2Z_s,1-\gamma}/(2\eta_s)] \tag{18}$$

$$t_{R;U,s\text{-}C}=\frac{1}{\lambda_{s;L,s\text{-}C}}\ln\frac{1}{R} \tag{19}$$

式中 $t_{R;U,s\text{-}C}$ 表示给定可靠度 R 时系统工作时间(即可靠寿命) 的上限。

4.3　系统可靠性 s-Classical 随机化最优第二近似下限 $\bar{R}'_{L,s\text{-}C}$

根据单元可靠性评定的基本原理, 系统失效率的随机化最优置信上限 $\lambda'_{s;U,s\text{-}C}$ 满足

$$u\sum_{k=0}^{Z_s}\frac{(\lambda'_{s;U,s\text{-}C}\tau_s)^k}{k!}\exp(-\lambda'_{s;U,s\text{-}C}\tau_s)+(1-u)\sum_{k=0}^{Z_s-1}\frac{(\lambda'_{s;U,s\text{-}C}\tau_s)^k}{k!}\exp(-\lambda'_{s;U,s\text{-}C}\tau_s)=1-\gamma \tag{20}$$

用不完全 Γ 函数可表示为

$$uI_{\lambda'_{s;U,s\text{-}C}\tau_s}(Z_s+1)+(1-u)I_{\lambda'_{s;U,s\text{-}C}\tau_s}(Z_s)=\gamma \tag{21}$$

由上式可知, $\lambda'_{s;U,s\text{-}C}$ 的范围为

$$\lambda'_{s;U,s\text{-}C}\in[\chi^2_{2Z_s,\gamma}/(2\tau_s),\chi^2_{2Z_s+2,\gamma}/(2\tau_s)] \tag{22}$$

式(21) 可写成

$$uI_{-\eta_s\ln\bar{R}'_{L,s\text{-}C}}(Z_s+1)+(1-u)I_{-\eta_s\ln\bar{R}'_{L,s\text{-}C}}(Z_s)=\gamma \tag{23}$$

由此可确定出 $\bar{R}'_{L,s\text{-}C}$ 的范围为

$$\bar{R}'_{L,s\text{-}C}\in[\exp(-\chi^2_{2Z_s+2,\gamma}/(2\eta_s)),\exp(-\chi^2_{2Z_s,\gamma}/(2\eta_s))]$$

4.4　系统可靠性 s-Bayes 第二近似下限 $\bar{R}_{L,s\text{-}B}$

根据指数型单元, 有替换定时截尾试验 Bayes 评定的基本方法。基于 Reformulation 方法, 有

$$\begin{cases}\lambda_{s;U,s\text{-}B}=\chi^2_{2Z_s,\gamma}/(2\tau_s)\\ \bar{R}_{L,s\text{-}B}=\exp[-\chi^2_{2Z_s,\gamma}/(2\eta_s)]\end{cases} \tag{24}$$

基于 Box-Tiao 方法, 有

$$\begin{cases}\lambda_{s;U,s\text{-}B}=\chi^2_{2Z_s+1,\gamma}/(2\tau_s)\\ \bar{R}_{L,s\text{-}B}=\exp[-\chi^2_{2Z_s+1,\gamma}/(2\eta_s)]\end{cases} \tag{25}$$

5　算　　例

例 1　不同成败型部件或分系统组成的串联系统, $N=4$, $(f_1,n_1)=(0,45)$, $(f_2,n_2)=(2,45)$, $(f_3,n_3)=(f_4,n_4)=(1,41)$。求 $\gamma=0.8$ 和 0.9 时系统可靠性熵法第二近似下限 $\bar{R}_{L,s\text{-}C}$ 和 $\bar{R}_{L,s\text{-}B}$。

解　将式(6) 代入式(5), 利用已知数据, 经折合可得 $\eta=57.9072$, $z=5.4924$。系统自身没有试验数据, 由式(11) 可知 η 和 z 即为系统综合的等效任务数和失效次数。将其代入式(14) 和式(24), 利用 χ^2 分布分位数表, 便可得出系统可靠性熵法第二近似下限。

当 $\gamma=0.8$ 时, 有

$\bar{R}_{L,s\text{-}C}=0.86373$,　$\bar{R}_{L,s\text{-}B}=0.88146$

当 $\gamma=0.9$ 时, 有

$\bar{R}_{L,s\text{-}C}=0.84291$,　$\bar{R}_{L,s\text{-}B}=0.86158$

为了便于与传统评定方法所得结果进行比较和验证, 本例及下例引入文献[4] 中经典第二近似下限、Bayes第二近似下限及经典法随机化最优置

表 1 例 1 各种评定结果的比较

R_{L}	$R_{L,C}$	$R_{L,s\text{-}C}$	$\|R_{L,s\text{-}C}-R_{L,C}\|$	$R_{L,B}$	$R_{L,s\text{-}B}$	$\|R_{L,s\text{-}B}-R_{L,B}\|$
$\gamma=0.8$	0.852 61	0.863 73	1.112%	0.876 02	0.881 46	0.544%
$\gamma=0.9$	0.827 24	0.842 91	1.567%	0.851 83	0.861 58	0.975%

信第二近似下限的计算结果, 依次分别记为 $R_{L,C}$, $R_{L,B}$ 和 $R'_{L,C}$。本例结果与其它几种评定方法的结果比较见表 1。

例 2 不同成败型部件或分系统组成的并联系统, $N=2$, $(f_1,n_1)=(3,6)$, $(f_2,n_2)=(2,7)$。求 $\gamma=0.9$ 时系统可靠性熵法第二近似下限 $R_{L,s\text{-}C}$ 和 $R_{L,s\text{-}B}$。

解 将式(7) 代入式(5), 利用已知数据, 经计算得 $\eta=20.352\,2$, $z=3.137\,3$。查相关数表并经插值计算, 可得 $R_{L,s\text{-}C}=0.713\,8$, $R_{L,s\text{-}B}=0.721\,4$。

本例中 $R'_{L,C}\in[0.635\,3, 0.730\,3]$, $R_{L,B}=0.716\,4$。

6 结 论

1) 将信息论与可靠性工程理论相结合, 利用信息量相等的原理对部件或分系统的试验信息进行折合, 为大型复杂系统的可靠性多级综合评定探索出一条新的途径。由实例可以看出, 利用这些模型对系统进行可靠性评定, 其结果与传统评定方法的评定结果非常接近, 说明了本文模型的正确性和实用性。

2) 现代高新技术产品多是可靠性要求高的复杂系统。通过对复杂系统及其各子系统进行可靠性综合评估, 能有效地发现影响复杂系统整体可靠性的薄弱环节, 从而为复杂系统的可靠性设计提供理论指导。

3) 本文重在方法研究, 并未涉及信息的模糊性和环境因子等参数。实际应用中, 如能综合考虑这些因素的影响, 其折合信息将更合理和完备, 其评定结果将更接近于真值。

参考文献(References):

[1] 王崇彦, 陆锦辉. 信息论基础[M]. 北京: 兵器工业出版社, 1992. 40-60.

[2] 孙有朝, 施军. 求解具有多层试验数据成败型单元混联系统可靠性近似限的信息论方法[J]. 航空学报, 1999, 20(6): 553-557.
(Sun Youchao, Shi Jun. Information theory method of calculating approximate confidence lower limit for series-parallel or parallel-series system reliability with hierarchical success-failure test data[J]. *J of Aeron*, 1999, 20(6): 553-557.)

[3] 施军. $K/N(G)$ 系统可靠性评定的熵(法) 近似限[J]. 航空学报, 1998, 19(1): 30-34.
(Shi Jun. Approximate limit of the entropy (method) for reliability assessment of a $K/N(G)$ system[J]. *J of Aeron*, 1998, 19(1): 30-34.)

[4] 周源泉, 翁朝曦. 可靠性评定[M]. 北京: 科学出版社, 1990. 37-40.

(上接第 422 页)

[4] 于乃润, 万百五. 工业过程稳态优化中的迭代学习控制[J]. 控制理论与应用, 1996, 13(6): 717-723.
(Yu Nairun, Wan Baiwu. The iterative learning control for the dynamics in steady-state optimization of industrial processes[J]. *J of Control Theory & Appl*, 1996, 13(6): 717-723.)

[5] 于乃润, 万百五. 纯滞后工业过程稳态优化中的迭代学习控制[J]. 控制与决策, 1997, 12(2): 163-166.
(Yu Nairun, Wan Baiwu. Iterative learning control in steady-state optimization of industrial processes with delay[J]. *Control & Decision*, 1997, 12(2): 163-166.)

[6] 阮小娥, 万百五. 具有滞后的饱和非线性工业过程控制系统的迭代学习控制[J]. 自动化学报, 2001, 27(2), 219-223.
(Ruan Xiaoe, Wan Baiwu. The iterative learning control for saturated nonlinear industrial control systems with delay[J]. *Acat Automatica Sinica*, 2001, 27(2): 219-223.)

[7] Chen Y Q, Moore K L. Improved path following for an omni-directional vehicle via practical iterative learning control using local symmetrical double-integration[A]. *Proc of the 3rd Asian Control Conf* [C]. Shanghai, 2000. 1878-1883.

[8] Chen Y, Dou H, Tan K K. Local-symmetrical-integral-type iterative learning control[J]. *Control Theory & Appl*, 2000, 17(3), 347-352.