第17卷 第5期　　控 制 与 决 策　　2002年9月
Vol 17 No. 5　　Control and Decision　　Sept 2002

文章编号: 1001-0920(2002)05-0563-04

# 预测控制优化变量的集结策略

杜晓宁, 席裕庚
(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

**摘　要**: 为减少预测控制的在线计算量, 提出了对优化变量进行集结的优化策略。通过一个集结矩阵将原优化变量与集结后的变量联系起来, 从而为多种预测控制算法建立一个统一的框架。分析了现有的几种典型优化策略的集结表述, 说明了所提出的集结优化框架具有一定的普适性, 并在此框架下提出一种新的具有输入衰减形式的集结优化算法。

**关键词**: 预测控制; 集结优化; 集结矩阵; 滚动时域
**中图分类号**: TP 273　　**文献标识码**: A

# Aggregation optimization strategy in model predictive control

*DU Xiao-ning, XI Yu-geng*
(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract**: An aggregation optimization strategy is proposed to reduce the on-line computational burden of model predictive control (MPC). A uniform framework is built for a class of simplified strategies, in which the original optimized variables are connected with the aggregated ones through the aggregation matrix, so the on-line optimization of MPC is turned into a low-dimensional programming of aggregated variables or the aggregated matrix. Several existing typical MPC algorithms are described and unified under this framework. Based on this framework, a new aggregation strategy with input decaying form is also presented.

**Key words**: model predictive control; aggregation optimization; aggregation matrix; receding horizon

## 1 引　　言

预测控制与最优控制的区别在于它不是一次计算出使性能指标达到最优的控制律, 而是通过滚动优化的方式逐次计算。由于受对象的复杂特性及运行现场环境限制, 其优化问题一般表现为一个不易直接求解的多变量多约束的非线性规划问题, 这个问题的计算在每一时刻都要进行, 因此其优化方法对于算法的实时效率非常关键。提高计算效率的一个直接想法就是减少优化变量的维数, 以获得一个低阶优化问题。为减少在线优化的计算量, 文献[1]提出了一步近似算法, 即只需在线求解当前控制量, 对未来的控制序列则近似进行求解。文献[2]则采用饱和函数近似来处理输入约束, 但难以得出解析表达式。文献[3]在预测函数控制中利用Blocking技术来降低优化自由度。文献[4]先将约束集分为起作用约束集、不起作用约束集和不确定约束集, 一旦起作用约束集确定了, 则优化就可以解析地通过求解

**收稿日期**: 2001-05-15; **修回日期**: 2001-09-10
**基金项目**: 国家自然科学基金项目(69934020); 国家973计划项目(G1998030415)
**作者简介**: 杜晓宁(1973—), 女, 陕西西安人, 博士生, 从事预测控制、满意决策与控制研究; 席裕庚(1946—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事预测控制、复杂系统控制理论和智能机器人等研究。

Lagrangian 方程而转化为一个低维的优化问题。

本文提出了对优化变量进行集结的优化策略，为多种预测控制的简化算法建立了一个统一的框架，基于此框架可衍生出许多行之有效的算法。通过选取合适的集结矩阵和集结优化变量，将每一时刻的在线优化问题转化为一个低维的优化问题，从而降低了在线计算的负担。本文进一步给出了现有的几种典型优化算法的集结表述，并提出一种新的具有输入衰减形式的集结优化算法。

## 2 预测控制算法的一般描述

考虑如下一般形式的非线性系统

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \tag{1}$$

其中，$x(0)$ 已知，$x(k)$ 和 $u(k)$ 分别为状态和输入矢量，$f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$（原点为一个平衡点）且在原点连续。状态和输入矢量满足如下约束

$$x(k) \in \Omega_x \subseteq R^n, \quad u(k) \in \Omega_u \subseteq R^m \tag{2}$$

其中，$\Omega_x$ 和 $\Omega_u$ 分别为 $R^n$ 和 $R^m$ 上的紧集，且均包括原点为内点。

预测控制在每一时刻模型预测的基础上，需求解一个未来有限时域上的开环优化问题，$k$ 时刻的约束优化问题可描述为

$$\min_{u(k), u(k+1), \cdots, u(k+N-1)} \sum_{i=1}^{N} [l_x(x(k+i|k)) + l_u(u(k+i-1|k))]$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x(k+i|k) = \\ f(x(k+i-1|k), u(k+i-1|k)) \\ x(k+i|k) \in \Omega_x \\ u(k+i-1|k) \in \Omega_u \\ i = 1, 2, \cdots, N \\ x(k|k) = x(k) \end{cases} \tag{3}$$

其中，$x(k+i|k)$ 为系统的预测状态向量，$N$ 为滚动预测时域，$l_x(\cdot)$ 和 $l_u(\cdot)$ 为正半定函数，且满足 $l_x(\mathbf{0}) = 0$，$l_u(\mathbf{0}) = 0$。

求解上述问题得到最优控制序列 $\{u^*(k|k), u^*(k+1|k), \cdots, u^*(k+N-1|k)\}$，取 $k$ 时刻控制律为 $u(k) = u^*(k|k)$ 并作用于系统。到下一采样时刻，重复上述优化过程，得到 $u(k+1)$，依次进行，即形成滚动优化。记优化变量

$$U(k) = [u^T(k|k) \quad \cdots \quad u^T(k+N-1|k)]^T \tag{4}$$

显然，优化问题(3) 的求解取决于 $U(k)$ 的维数，这通常是一个高维优化问题。

## 3 预测控制优化变量集结策略

从第 2 节对预测控制算法的描述中可以看出，若控制变量的维数为 $m$，优化时域为 $N$，则优化问题(3) 的计算复杂性将取决于 $mN$。由于预测控制采用的是滚动优化方式，在每一时刻求出的最优控制序列中，只有当前控制量作用于对象，其余未来的控制量在实施或以后的计算中都没有采用，精确地对其优化求解并不必要。因此，如果能采用某种集结方式，将原来的优化变量用一组低维的集结变量代替，则可大大减少在线优化计算量，从而满足实时优化的要求。取集结变换的形式为

$$U(k) = HV(k) \tag{5}$$

其中，$V(k) = [v_1^T(k) \quad v_2^T(k) \quad \cdots \quad v_s^T(k)]^T$，$s(s < N)$ 为集结优化变量，$v_i(k) \in R^m$，$H$ 为 $Nm \times sm$ 维集结矩阵，可表示为

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \cdots & H_{Ns} \end{bmatrix} \tag{6}$$

其中 $H_i = [H_{i1}^T \quad \cdots \quad H_{is}^T]^T$ 为 $m \times sm$ 维矩阵。则通过集结后，每一时刻在线求解的优化问题可表示为

$$\min_{V(k) \text{或} H} \sum_{i=1}^{N} [l_x(x(k+i|k)) + l_u(H_iV(k))]$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x(k+i|k) = f(x(k+i-1|k), H_iV(k)) \\ x(k+i|k) \in \Omega_x, \quad H_iV(k) \in \Omega_u \\ i = 1, 2, \cdots, N \\ x(k|k) = x(k) \end{cases} \tag{7}$$

因为集结优化变量 $V(k)$ 的维数 $sm$ 小于原优化变量 $U(k)$ 的维数 $Nm$，故在线优化的计算量可以大大降低。该集结滚动优化策略不受模型的限制，对一般的线性和非线性系统均适用。

## 4 几种典型优化策略的集结表述

### 4.1 分段集结优化策略

分段集结优化的思想是通过对控制时域进行不同的分段来达到快速计算的效果，即对近期目标进行精确优化，对未来远期目标采用粗略优化。这样虽然性能指标有一定的损失，但可通过预测控制的滚动优化方式逐步改善。将优化时域 $N$ 集结为 $s$ 段，设第 $j(j = 1, 2, \cdots, s)$ 段的长度为 $l_j$，则有

$$N = \sum_{j=1}^{s} l_j \tag{8}$$

记 $v_i(k) = v(k+i-1|k)$，$i = 1, 2, \cdots, s$，则新的集

结优化变量与原优化变量 $\mathrm{u}(k+i|k)$ $(i=0,1,\cdots,N-1)$ 之间的关系可表示为

$$\mathrm{u}(k+i|k)=\begin{cases}\mathrm{v}(k|k), & i=0,1,\cdots,l_1-1\\ \mathrm{v}(k+1|k), & i=l_1,l_1+1,\cdots,l_1+l_2-1\\ \vdots & \\ \mathrm{v}(k+s-1|k) & \\ & i=\sum_{j=1}^{s-1}l_j,\ \sum_{j=1}^{s-1}l_j+1,\cdots,\sum_{j=1}^{s}l_j-1\end{cases}\tag{9}$$

此时集结矩阵 H 可表示为

$$\mathrm{H}=\begin{array}{c}\overbrace{\hphantom{\mathrm{I}_m\ \mathbf{0}_m\ \cdots\ \mathbf{0}_m}}^{s}\\ \left[\begin{array}{cccc}\mathrm{I}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{I}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m\\ \mathbf{0}_m & \mathrm{I}_m & \cdots & \mathbf{0}_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0}_m & \mathrm{I}_m & \cdots & \mathbf{0}_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathrm{I}_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathrm{I}_m\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}l_1\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}l_2\\ \vdots\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}l_s\end{array}\tag{10}$$

其中, $\mathrm{I}_m$ 为 $m\times m$ 单位矩阵, $\mathbf{0}_m$ 为 $m\times m$ 零矩阵。

下面分析这种分段集结优化方法对于已有预测控制算法中简化控制策略的覆盖性。

1) 取控制时域 $M$ 小于优化时域 $N$: 这是通常预测控制算法中为减少优化计算量最常采取的一种策略, 即在 $k$ 时刻优化中假设控制量 $\mathrm{u}(k)$ 的变化只到控制时域 $k+M$ 为止, 之后便保持不变, 即 $\mathrm{u}(k+i|k)=\mathrm{u}(k+M-1|k)$, $i=M,\cdots,N-1$。不难看出, 这相当于 $s=M+1$, 集结矩阵(10) 中取 $l_1=\cdots=l_M=1$ $(l_s=N-M)$ 时的情况。

2) 粗控制细优化: 文献[5] 提出了控制在连续若干个 N SM 采样周期内保持不变, 但优化仍要对每一采样时刻进行以光滑各点输出的策略。这相当于等距离的分段集结优化, H 阵中所有分块的 $l_i$ 均等于 N SM 的特例。

3) 单值预测控制: 单值预测控制算法是控制时域仅取为 1, 对未来第 $N$ 步输出进行预测的一种简化算法[6], 此时性能指标中仅含有未来第 $N$ 步的输出预测。该算法相当于 $s=1$, 集结矩阵(10) 中 $l_s=N$ 时的情况。

4) 指数增长式控制时段: 文献[7] 提出"越远离当前时刻的控制输入越可以粗略计算"的思想, 因而采取了指数形式的控制分段, 即假设未来控制输入分别在 $1,p,p^2,\cdots$ 个周期内保持不变, 这正是此处 $l_i=p^{i-1}$ 的特例。特别当 $p=2$ 时, 控制的分段可写作 $l=\{1,2,4,\cdots\}$。图 1 给出了以 2 为指数进行分段后的集结优化方式。

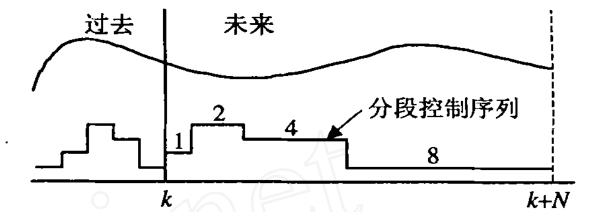


图 1　指数集结分段优化策略

### 4.2　预测函数集结控制策略

集结优化框架不仅可用于简化计算, 而且可以深入地理解预测控制中一个特殊分支 —— 预测函数控制(PFC)。PFC 在预测优化的具体做法上与一般预测控制算法有所不同, 然而如果从集结的观点看, 它与传统预测控制算法均可统一表述为集结优化的形式。为便于说明, 这里考虑单输入单输出系统。在预测函数控制中, 通过引入基函数, 将控制变量表示为若干基函数的加权和, 即

$$u(k+i|k)=\sum_{l=1}^{s}\mu_l f_l(i),\quad i=0,1,\cdots,N-1\tag{11}$$

其中, $\mu_l$ 为加权系数, $f_l(\bullet)$ $(l=1,2,\cdots,s)$ 为一组选定的基函数, $f_l(i)$ 为基函数 $f_l(\bullet)$ 在 $i$ 时刻的值。记

$$\mathrm{f}(i)=[f_1(i)\quad f_2(i)\quad\cdots\quad f_s(i)]^{\mathrm{T}}$$
$$\mu=[\mu_1\quad\mu_2\quad\cdots\quad\mu_s]^{\mathrm{T}}$$

则可将式(11) 写成向量形式

$$\mathrm{u}(k+i|k)=\mu^{\mathrm{T}}\mathrm{f}(i),\quad i=0,1,\cdots,N-1\tag{12}$$

由于系统对这些基函数的响应都是已知的, 在这组控制作用下未来 $N$ 个时刻的输出便可用各时刻这些已知响应的加权和表示, 而对输出性能指标的优化则归结为优化加权系数。得到了加权系数, 就不难根据式(12) 计算出 $k$ 时刻的控制量。

由式(12), 不难写出

$$\mathrm{U}=\mathrm{HV}=\begin{bmatrix}\mu^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu^{\mathrm{T}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \mu^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}_{N\times sN}\begin{bmatrix}f(0)\\ f(1)\\ \vdots\\ f(N-1)\end{bmatrix}_{sN\times 1}\tag{13}$$

但应注意这里的 $f(i)$ 的值全部是已知的, 真正的优化变量是 $\mu$, 为此可将上式改写为

$$U = H^{*}V^{*} \tag{14}$$

其中

$$H^{*} = \begin{bmatrix} f^{T}(0) \\ \vdots \\ f^{T}(N-1) \end{bmatrix}_{N\times s}, \quad V^{*} = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \end{bmatrix}_{s\times 1}$$

于是可以看到, 虽然在预测函数控制中优化的不是控制量的值, 而是其加权系数, 但经过从式(13) 到(14) 的变换, 它同样可归结为优化变量的集结。由于通常基函数的数量 $s$ 远小于优化时域长度 $N$, 所以该算法的优化变量大为减少, 从而更适应于快速系统。基于基函数加权的优化如图 2 所示。

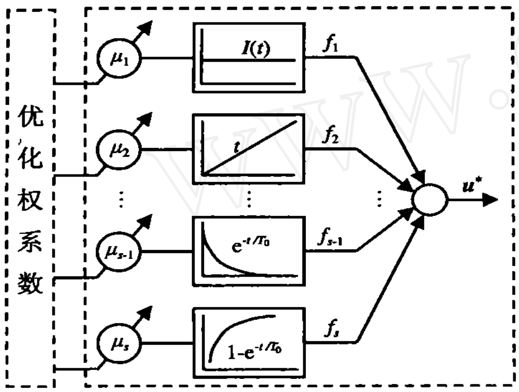


图 2　基于基函数加权的优化

## 5　具有输入衰减形式的集结优化策略

集结框架不仅可以解释和说明现有的一些典型预测控制策略, 而且针对不同的控制要求还可以衍生出许多行之有效的简化策略。本文提出一种具有输入幅值衰减形式的集结策略, 该策略采用启发式的思想, 符合理想情况下调节问题的控制要求。在许多控制问题中, 我们期望控制量光滑、平稳地趋近固定值, 这可以通过事先选定其形状变化系数$\{1, b_2, \cdots, b_N\}$, 且令$u(k+i-1|k) = b_i u(k|k)$ 来达到, 显然此时的优化变量只有 $u(k|k)$。特别对于调节问题, 理想的控制输入应具有渐近衰减到零的形式, 因此可采用具有输入衰减形式的集结滚动优化策略, 令集结优化变量仅为当前要实施的控制量, 即 $v(k|k) = u(k|k)$, 其它未来时刻的控制量$\{u(k+1|k), \cdots, u(k+N-1|k)\}$ 则为与集结变量相关的幅值衰减序列, 即

$$u(k+i|k) = \rho^{i} u(k|k), \quad i \geq 1, \quad 0 < \rho < 1 \tag{15}$$

其中 $\rho$ 为衰减系数。此时集结矩阵 $H$ 的形式为

$$H = \begin{bmatrix} I_m \\ \rho I_m \\ \vdots \\ \rho^{N-1} I_m \end{bmatrix} \tag{16}$$

经如此集结后, 在线优化变量仅为 $u(k|k)$ 和 $\rho$, 维数从原 $Nm$ 维降到了 $m+1$ 维。如果 $\rho$ 可以事先确定, 则可进一步简化计算量。

## 6　结　论

为降低预测控制在线优化的计算量, 本文提出了一种对优化变量进行集结的滚动优化策略, 为一类简化策略建立了一个统一的框架描述。通过集结变换将原优化变量与集结后的变量联系起来, 于是预测控制的在线优化问题便转化为一个对集结变量或集结矩阵的低维优化问题。由于集结变量或集结矩阵优化变量的数目远小于原优化变量的数目, 因此计算量大大减小。本文分析了几种典型预测控制优化算法的集结表述, 说明了所提出的集结优化框架具有一定的普适性, 并在此框架下提出了一种新的具有输入衰减形式的集结优化算法。

参考文献(References):


[1] Alex Zheng. A computationally efficient nonlinear MPC algorithm [A]. Proc of the American Control Conf [C]. New Mexico: Albuquerque, 1997. 1623-1627.

[2] Alex Zheng. Reducing on-line computational demands in model predictive control by approximating QP constraints[J]. J of Process Control, 1999, 9(4): 279-290.

[3] J H Lee, Y Chikkula, Z Yu. Improving compuatational efficiency of model predictive control algorithm using wavelet transformation[J]. Int J Control, 1995, 61(4): 859-883.

[4] Edwin T Van Donkelaar, Okko H Bosgra, Paul M J, et al. Constrained model predictive with on-line input parameterization[A]. Proc of the 38th Conf on Decision and Control[C]. Arizona, 1999. 3718-3721.

[5] H Tamura. Decentralized optimization for distributed-lag models of discrete systems[J]. Automatica, 1975, 11(3): 593-602.

[6] 袁璞. 生产过程动态数学模型及其在线应用[M]. 北京: 中国石化出版社, 1994. 261-262.

[7] 杨健. 非线性系统预测控制优化方法和策略的研究[D]. 上海: 上海交通大学, 1994.