第17卷 第5期 控 制 与 决 策 2002年9月
Vol. 17 No. 5 Control and Decision Sept. 2002

文章编号: 1001-0920(2002)05-0567-04

一类结构不确定采样系统的鲁棒控制

武俊峰[1], 王 强[2], 陈善本[1]
(1. 哈尔滨工业大学 材料科学系, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 哈尔滨理工大学 自动化系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 针对一类结构不确定性线性采样系统, 在时域中用Lyapunov方法研究采样系统的鲁棒控制及最优鲁棒控制, 给出了系统鲁棒稳定的充分条件以及相应的鲁棒控制律。控制律的求取借助于求解一类线性矩阵不等式(LMI), 或求解满足特定线性不等式条件下的优化问题。算例结果表明, 采样周期是一个关键性的设计参数。

关键词: 采样系统; 鲁棒控制; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Robust control of a class of sampled-data systems with structured uncertainty

WU Jun-feng[1], *WANG Qiang*[2], *CHEN Shan-ben*[1]
(1. Department of Materials Science, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
2. Department of Automation, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: By using the Lyapunov method, the robust control and the robust optimal control for a class of sampled-data systems whose underlying continuous-time systems are subjected to structured uncertainties are discussed in time-domain. Some sufficient conditions of robust stability and the corresponding robust control laws are derived. All these results are designed by solving a class of linear matrix inequalities (LMI) or a dynamic programme problem with LMI constraints respectively. An example is shown that the sampling period is the crucial design parameter.

Key words: sampled-data systems; robust control; linear matrix inequality (LMI)

1 引 言

近年来, 有关控制系统鲁棒控制的研究取得了一些重要的研究成果[1~8]。这类问题的研究方法主要分为频域和时域两大类, 其中频域法主要有H_∞方法、奈氏阵列法等, 而时域方法主要是Lyapunov函数法。目前, 有关时滞系统、非线性系统以及采样系统的研究, 还有许多工作要做。

在计算机控制应用中, 大多数控制系统都是采样控制系统, 即计算机控制下连续控制对象所构成的闭环系统。因此, 研究采样系统的鲁棒控制问题就显得十分重要。本文针对一类结构不确定性线性采样系统和给定的二次性能指标, 利用Lyapunov方法研究该类系统的鲁棒控制问题, 给出了相应的鲁棒控制律。这些控制律的求取借助于求解一类线性

收稿日期: 2001-05-08; **修回日期**: 2001-07-12
基金项目: 国家自然科学基金项目(69674027); 哈尔滨市留学回国人员基金项目(78128005)

作者简介: 武俊峰(1959—), 男, 黑龙江伊春人, 教授, 从事鲁棒控制、过程控制等研究; 王强(1976—), 男, 甘肃武进人, 硕士生, 从事鲁棒控制、计算机控制等研究。

矩阵不等式(LMI),或求解满足特定线性不等式条件下的优化问题。

2 模型描述及有关定义

被研究的采样系统对应的连续控制对象

$$\mathring{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) \tag{1}$$

式中,$x(t) \in R^n$ 和 $u(t) \in R^m$ 分别为状态变量和控制变量;$A \in R^{n\times n}$ 和 $B \in R^{n\times m}$ 分别为系统矩阵和控制矩阵;$\Delta A = \alpha A_p$,$\alpha > 0$,A_p 为扰动的结构,其非零元素代表系统矩阵 A 中受到扰动的元素,其元素值的大小反映系统矩阵 A 中元素受到扰动的程度。

对式(1)进行离散化,得

$$\begin{aligned} x(k+1) = {} & (G + \Delta G)x(k) + \\ & (H + \Delta H)u(k) \end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$G = \exp[AT], \quad H = \int^{T}\exp[A\tau]\mathrm{d}\tau B \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta G = {} & \exp[(A + \Delta A)T] - \exp[AT] = \\ & \exp[AT][\exp[\Delta AT] - 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H = {} & \int^{T}\exp[(A + \Delta A)\tau]\mathrm{d}\tau B - \\ & \int^{T}\exp[A\tau]\mathrm{d}\tau B = \\ & \int^{T}\exp[A\tau][\exp[\Delta A\tau] - I]\mathrm{d}\tau B \end{aligned}$$

当采样周期 T 选得足够小时,则有

$$\exp[\Delta AT] \approx I + \Delta AT$$

所以

$$\Delta G = \exp[AT]\Delta AT = \alpha GA_pT \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \Delta H = {} & \int^{T}\exp[A\tau]\tau\mathrm{d}\tau\Delta AB = \\ & H_q\Delta AB = \alpha H_qA_pB \end{aligned} \tag{5}$$

定义 1 如果存在状态反馈 $u(k) = Kx(k)$,矩阵 $0 < P^{\mathrm{T}} = P \in R^{n\times n}$,满足

$$x(k+1)^{\mathrm{T}}Px(k+1) - x(k)^{\mathrm{T}}Px(k) < 0$$

则称离散模型(2)是状态反馈可镇定的,$u(k) = Kx(k)$ 为其鲁棒控制器。

本文将多次用到以下两个事实性引理:

引理 1[1] 对于定常矩阵 $\Omega_1 = \Omega_1^{\mathrm{T}}$,$\Omega_2 = \Omega_2^{\mathrm{T}} > 0$ 以及 Ω_3,矩阵不等式

$$\Omega_1 + \Omega_3^{\mathrm{T}}\Omega_2^{-1}\Omega_3 < 0 \tag{6}$$

成立的充要条件是

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_3^{\mathrm{T}} \\ \Omega_3 & -\Omega_2 \end{bmatrix} < 0 \text{ or } \begin{bmatrix} -\Omega_2 & \Omega_3 \\ \Omega_3^{\mathrm{T}} & \Omega_1 \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

引理 2[2] 任取方阵 Y 和 W,使 $Y = W^{\mathrm{T}}W$,再取两适当维数的矩阵 X 和 Z,则对任何常数 $\epsilon > 0$,总有下式成立

$$X^{\mathrm{T}}YZ + Z^{\mathrm{T}}YX \le \epsilon X^{\mathrm{T}}YX + \epsilon^{-1}Z^{\mathrm{T}}YZ \tag{8}$$

3 主要结果

本节针对上节中的离散模型和给定的二次性能指标,研究采样系统的鲁棒控制及最优鲁棒控制,给出采样系统鲁棒稳定的充分条件,并分别给出相应的鲁棒控制律。所有结果都是用线性矩阵不等式(LMI)描述的。

3.1 无目标区域限制下系统的镇定

定理 1 如果存在常数 $\epsilon > 0$,矩阵 $0 < Q^{\mathrm{T}} = Q \in R^{n\times n}$,$Y \in R^{m\times n}$,满足LMI

$$\begin{bmatrix} -Q & (GQ + HY)^{\mathrm{T}} & A^{*\mathrm{T}} \\ GQ + HY & -(1+\epsilon)^{-1}Q & 0 \\ A^{*} & 0 & -(1+\epsilon^{-1})^{-1}\alpha^{-2}Q \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

式中

$$A^{*} = \left[(G \quad H_q)\begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} QT \\ BY \end{bmatrix}\right]$$

则系统(2)在状态反馈鲁棒控制器

$$u(k) = Kx(k), \quad K = YQ^{-1} \tag{10}$$

控制下是鲁棒稳定的。

证明 式(9)成立等价于

$$\begin{aligned} & (1+\epsilon)(GQ + HY)^{\mathrm{T}}Q^{-1}(GQ + HY) + \\ & (1+\epsilon^{-1})\alpha^2A^{*\mathrm{T}}Q^{-1}A^{*} - Q < 0 \end{aligned} \tag{11}$$

即

$$\begin{aligned} & (1+\epsilon)(GQ + HY)^{\mathrm{T}}Q^{-1}(GQ + HY) + \\ & (1+\epsilon^{-1})(\Delta GQ + \Delta HY)^{\mathrm{T}}Q^{-1} \times \\ & (\Delta GQ + \Delta HY) - Q < 0 \end{aligned}$$

根据引理 1,上式成立的充分条件是下式成立

$$\begin{aligned} & (GQ + HY)^{\mathrm{T}}Q^{-1}(GQ + HY) + \\ & 2(GQ + HY)^{\mathrm{T}}Q^{-1}(\Delta GQ + \Delta HY) + \\ & (\Delta GQ + \Delta HY)^{\mathrm{T}}Q^{-1}(\Delta GQ + \Delta HY) - Q < 0 \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} & [(G + \Delta G)Q + (H + \Delta H)Y]^{\mathrm{T}}Q^{-1} \times \\ & [(G + \Delta G)Q + (H + \Delta H)Y] - Q < 0 \end{aligned}$$

取 $K = YQ^{-1}$,则上式可变为

$$\begin{aligned} & [(G + \Delta G) + (H + \Delta H)K]^{\mathrm{T}}Q^{-1} \times \\ & [(G + \Delta G) + (H + \Delta H)K] - Q < 0 \end{aligned}$$

取 $V_k = x(k)^{\mathrm{T}}Q^{-1}x(k)$,$u(k) = Kx(k)$,则有

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k =$$

$$x(k+1)^{\mathrm T}Q^{-1}x(k+1)-x(k)^{\mathrm T}Q^{-1}x(k)=$$
$$x(k)^{\mathrm T}\{[(G+\Delta G)+(H+\Delta H)K]^{\mathrm T}Q^{-1}\times$$
$$[(G+\Delta G)+(H+\Delta H)K]-Q^{-1}\}x(k)<0$$

由此可知, 状态反馈控制器(10) 是系统(2) 的鲁棒稳定控制器。□

3.2　目标区域限制下系统的镇定

离散模型(2) 在性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}[x(k)^{\mathrm T}Sx(k)+u(k)^{\mathrm T}Ru(k)]\tag{12}$$

下的鲁棒控制器为

$$u(k)=Kx(k)\tag{13}$$

根据Lyapunov 稳定性理论, 有如下定理:

定理 2　如果存在矩阵 $P^{\mathrm T}=P>0$, 满足

$$\begin{aligned}&[(G+\Delta G)+(H+\Delta H)K]^{\mathrm T}P\times\\&[(G+\Delta G)+(H+\Delta H)K]-\\&P+S+K^{\mathrm T}PK\le 0\end{aligned}\tag{14}$$

则控制器(13) 是保性能鲁棒控制器。

证明　取

$$\begin{aligned}&x(k+1)^{\mathrm T}Px(k+1)-x(k)^{\mathrm T}Px(k)\le\\&-(x(k)^{\mathrm T}Sx(k)+u(k)^{\mathrm T}Ru(k))\end{aligned}\tag{15}$$

则

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}[x(k)^{\mathrm T}Sx(k)+u(k)^{\mathrm T}Ru(k)]=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}x(k)^{\mathrm T}[S+K^{\mathrm T}RK]x(k)\le$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}[x(k+1)^{\mathrm T}Px(k+1)-x(k)^{\mathrm T}Px(k)]=$$
$$x(0)^{\mathrm T}Px(0)\tag{16}$$

显然, 性能指标的目标区域为 $x(0)^{\mathrm T}Px(0)$。而式(15) 可变为

$$x(k)^{\mathrm T}\{[(G+\Delta G)+(H+\Delta H)K]^{\mathrm T}P\times$$
$$[(G+\Delta G)+(H+\Delta H)K]-P\}x(k)\le$$
$$x(k)^{\mathrm T}[S+K^{\mathrm T}PK]x(k)$$

故式(14) 成立, 亦即定理 2 成立。□

定理 3　如果存在常数 $\epsilon>0$, 矩阵 $0<Q^{\mathrm T}=Q\in Q^{n\times n}$, $Y\in R^{m\times n}$, 满足

$$\begin{bmatrix}QSQ-Q & (GQ+HY)^{\mathrm T} & A^{*\mathrm T} & Y^{\mathrm T}\\ GQ+HY & -(1+\epsilon)^{-1}Q & 0 & 0\\ A^{*} & 0 & -(1+\epsilon^{-1})^{-1}\alpha^{2}Q & 0\\ Y & 0 & 0 & -R^{-1}\end{bmatrix}\le 0\tag{17}$$

则控制器

$$u(k)=Kx(k),\quad K=YQ^{-1}\tag{18}$$

为系统(2) 的保性能鲁棒控制器。

证明　根据引理 2, 式(14) 成立等价于下式成立

$$\begin{aligned}&Y^{\mathrm T}RY+QSQ-Q+(1+\epsilon)\times\\&(GQ+HY)^{\mathrm T}Q^{-1}(GQ+HY)+\\&(1+\epsilon^{-1})\alpha^{2}A^{*\mathrm T}Q^{-1}A^{*}\le 0\end{aligned}\tag{19}$$

取 $K=YQ^{-1}$, $P=Q^{-1}$, 则式(19) 可变为

$$\begin{aligned}&(1+\epsilon)(G+HK)^{\mathrm T}P(G+HK)+\\&(1+\epsilon^{-1})(\Delta G+\Delta HK)^{\mathrm T}P(\Delta G+\\&\Delta HK)-P+S+K^{\mathrm T}RK\le 0\end{aligned}\tag{20}$$

由引理 1 知, 式(20) 成立的充分条件是下式成立

$$\begin{aligned}&(G+HK)^{\mathrm T}P(G+HK)+\\&2(G+HK)^{\mathrm T}P(\Delta G+\Delta HK)+\\&(\Delta G+\Delta HK)^{\mathrm T}P(\Delta G+\Delta HK)-\\&P+S+K^{\mathrm T}RK\le 0\end{aligned}\tag{21}$$

取 $V_k=x(k)^{\mathrm T}Px(k)$, 则

$$\begin{aligned}&\Delta V_k=V_{k+1}-V_k=\\&x(k)^{\mathrm T}[(G+HK)^{\mathrm T}P(G+HK)+\\&2(G+HK)^{\mathrm T}P(\Delta G+\Delta HK)+\\&(\Delta G+\Delta HK)^{\mathrm T}P(\Delta G+\Delta HK)-P]x(k)\le\\&-x(k)^{\mathrm T}[S+K^{\mathrm T}RK]x(k)\end{aligned}$$

故定理 3 成立。□

3.3　最优鲁棒控制器的设计

根据式(14) 和式(15), 对于常数 $\gamma>0$, 如果下列优化问题有解

$$\begin{cases}\min\ \gamma\\ \text{s.t.}\ x(0)^{\mathrm T}Px(0)\le\gamma\\ \qquad 式(17)\ 成立\end{cases}\tag{22}$$

则控制器 $u(k)=Kx(k)$ 为鲁棒最优控制器。于是有下述定理:

定理 4　如果存在 $0<Q^{\mathrm T}=Q\in R^{n\times n}$, $Y\in R^{n\times n}$, 常数 $\epsilon>0$, $\gamma>0$, 满足下列条件

$$\min\ \gamma$$
$$\text{s.t.}\ \begin{bmatrix}\gamma & x(0)^{\mathrm T}\\ x(0) & Q\end{bmatrix}\ge 0$$

$$\begin{bmatrix}QSQ-Q & (GQ+HY)^{\mathrm T} & A^{*\mathrm T} & Y^{\mathrm T}\\ GQ+HY & -(1+\epsilon)^{-1}Q & 0 & 0\\ A^{*} & 0 & -(1+\epsilon^{-1})^{-1}\alpha^{2}Q & 0\\ Y & 0 & 0 & -R^{-1}\end{bmatrix}\le 0\tag{23}$$

则控制器

$$u(k)=Kx(k),\quad K=YQ^{-1}$$

为系统(2) 的鲁棒最优控制器。

证明参考可定理 2 和定理 3 的证明。

4 实例说明

考虑文献[2]的例子

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

取所受扰动 $\Delta A = \alpha A_p$, 这里取 A_p 为单位阵。离散化后离散名义系统模型为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.904\,8 & 0.361\,9 \\ 0 & 0.904\,8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.018\,7 \\ 0.095\,2 \end{bmatrix} u(k)$$

其性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x(k)^{\mathrm{T}} x(k) + u(k)^{\mathrm{T}} u(k)]$$

取采样周期 $T = 0.1$ s, 扰动 $\alpha = 0.3$, 系统的初始状态 $x(0) = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$。利用 MATLAB 软件中的矩阵不等式工具箱, 对由式(23)描述的优化问题进行求解, 得

$$u(k) = -[1.237\,0 \quad 3.828\,5] x(k)$$

$$P = \begin{bmatrix} 12.507\,2 & 16.835\,0 \\ 16.835\,0 & 49.641\,3 \end{bmatrix}$$

此时, 性能指标 J 的最小值 $J_{\min} = \gamma_{\min} = 95.818\,5$。在无扰动情形下, 系统的离散最优控制

$$u(k) = -[0.411\,0 \quad 1.314\,4] x(k)$$

对应的性能指标 J 的最小值 $J_{\min} = 29.098\,9$。

图1和图2分别给出了系统在无扰动及扰动 $\alpha = 0.3$ 时闭环系统的状态响应曲线。可见, 受扰动后系统的响应时间变长, 控制增益变大。

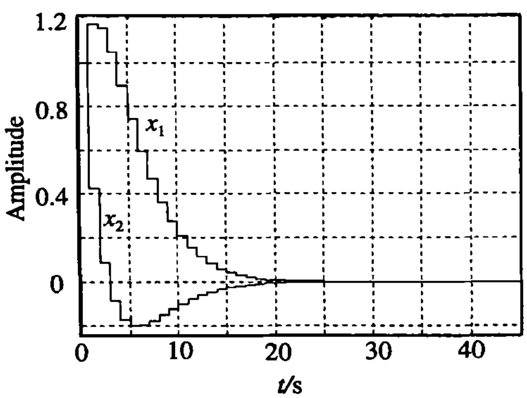

图 1 无扰采样系统的闭环状态变化

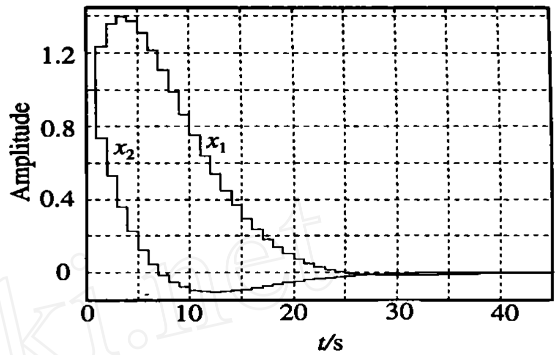

图 2 受扰采样系统的闭环状态变化

参考文献(References):

[1] Magdi S Mahmoud. Linear parameter-varying time-delay systems: Stability and L_2-gain controllers[J]. *Int J Control*, 2000, 73(6): 481-494.

[2] Ezzine Jelel. Robust stability bounds for sampled-data systems: The unstructured perturbation case[A]. *Proc of the American Contr Conf*. [C]. Seattle, 1995. 3353-3357.

[3] LI YU. Optimal guaranteed cost control of linear uncertain system: An LMI approach[J]. *Control Theory & Appl*, 2000, 17(3): 423-428.

[4] Lisheng HU, Huihe SHAO, Youxian SONG. Sampled-data control for time-delay uncertain linear systems[J]. *Control Theory & Appl*, 2000, 17(3): 453-456.

[5] Cheng Chu-wang, Tang Bing-yong. Designing robust stabilization controller for delayed systems with rank-1 type uncertainties — LMI approach[J]. *Acta Autom Sinica*, 2000, 26(2): 278-281.

[6] Yangchun LI, Xiaoming XU. The quadratic stability of a discrete-time system with structured uncertainties[J]. *Int J Control*, 1999, 72(16): 1427-1435.

[7] Dvllervd Geir, Glover Keith. Analysis of structured LTI uncertainty in sampled-data systems[J]. *Automatica*, 1995, 31(1): 99-113.

[8] Wang Qiang, Wu Jun-feng, Liu Zhi-dong. Robust stability for sampled-data systems in structured perturbation case[J]. *Electric Machines & Control*, 1999, 3(4): 223-227.