第 17 卷 第 5 期
Vol. 17 No. 5
控 制 与 决 策
Control and Decision
2002 年 9 月
Sept. 2002

文章编号: 1001-0920(2002)05-0575-04

一类推广的两步鲁棒辨识算法

莫建林, 张卫东, 许晓鸣
(上海交通大学 自动化系, 上海 200030)

摘 要: 基于传统的两步辨识方法, 提出一类当频域数据样本在系统频率段上非均匀分布时的 H_∞ 鲁棒辨识方法。分析了相应的最差情况的辨识误差, 并给出了采用 Lidstone 插值样条算子和三角窗函数时显式最差情况辨识误差上界。

关键词: 鲁棒辨识; 鲁棒收敛; 插值样条; 窗函数
中图分类号: TP 13　　文献标识码: A

A class of extended two step robust identification

MO Jian-lin, ZHANG Wei-dong, XU Xiao-ming
(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: Based on the traditional two step robust identification, a class of robust identification algorithms are proposed for the system in which frequency data are sampled in unequally distributed frequency intervals. The worst-case identification error upper bound is analyzed, and an explict error upper bound is obtained when the Lidstone interpolation spline and triangular window are used.

Key words: robust identification; robust convergency; interpolation spline; window functions

1 引　　言

H_∞ 鲁棒辨识是针对现代 H_∞ 鲁棒控制理论提出的一种新型辨识算法。通过未知对象的验前信息和测量到的被噪声污染的系统数据样本(验后信息)以及给定的确定性噪声上界, 建立真实系统的估计模型, 并获得 H_∞ 范数意义下的显式最差辨识误差上界, 同时保证算法的鲁棒收敛性[1~4]。基于不同形式的数据样本, 发展了频域 H_∞ 鲁棒辨识方法[5,6]与时域 H_∞ 鲁棒辨识方法[7,8]。在较成熟的几类频域 H_∞ 鲁棒辨识方法中, 基于信息复杂度理论的辨识方法可获得最优的辨识算法, 并能在辨识过程同时进行模型验证[9,10]; 基于线性规划转换的辨识方法可通过模型基函数的选择, 恰当地融入验前信息来获取较低维数的估计模型[11,12]; 两步辨识方法则可通过在第 1 步采用快速傅立叶变换(FFT), 第 2 步采用 Nehari 问题中的 Hankel 算子, 得到简捷有效的快速算法[1,2,5]。相对于两步法, 前两种方法运算复杂、收敛速度慢, 但可直接利用频率上非均匀分布的频域数据样本。然而数据样本在频率上均匀分布是两步法的一个前提条件。文献[13]建立了一种频域数据样本非均匀分布时的两步辨识方法, 但对采样数据进行等间隔筛选而抛弃了许多有用数据, 未能充分利用验后信息。

本文采用一类线性插值样条算子, 首先对所有

收稿日期: 2001-03-16; 修回日期: 2001-08-01
作者简介: 莫建林(1973—), 男(布依族), 贵州都匀人, 博士生, 从事系统辨识、模式识别与系统建模研究; 张卫东(1967—), 男, 黑龙江大庆人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制和过程控制研究。

非均匀分布频域数据样本进行拟合, 然后对得到的拟合函数提取等间隔数据样本, 从而转化为频域数据样本均匀分布时的两步辨识算法, 建立了一类处理非均匀分布频域数据样本的 H_∞ 鲁棒辨识算法。

2 问题描述与算法实现

我们考虑的未知对象 g 为单输入单输出离散系统, 且 $g \in A(D)$。为方便表述, 本文作如下定义:

$B_{\rho,M} \triangleq \{f \mid f \in A(D_\rho)$, 且 $\|f\|_\infty = \sup_{z \in D_\rho} |f| \leq M\}$

其中 $M > 0$ 表示系统增益上界, $\rho \geq 1$ 对应于系统的相对稳定程度。$A(D_\rho) \triangleq \{f \in H(D_\rho)$, 且在 ∂D_ρ 上连续$\}$, $D_\rho \triangleq \{z \mid |z| < \rho\}$, $\partial D_\rho \triangleq \{z \mid |z| = \rho\}$, 当 $\rho = 1$ 时简化表示为 $D, \partial D, A(D)$。$H_\infty(D_\rho) \triangleq \{f \mid f$ 在 D_ρ 内解析, 且 $\|f\|_\infty = \sup_{z \in D_f} |f| < \infty\}$。

应注意到, 为便于映射到复平面的单位圆盘上对问题进行分析, 鲁棒辨识方法中采用的系统表述 g 是真实系统 g_{true} 的一种变换形式, 即 $g(z) = g_{\text{true}}(1/z)$。这样, 实际中的稳定系统集则对应于集合 $H_\infty(D)$。

我们采用的验后信息为系统 g 对应于频率点集 Λ_N 已被噪声 η 污染的频域采样数据 E_N。与频率相关的其它定义如下:

$\Lambda_N \triangleq \{\omega_{N,k} \mid k = 1, 2, \cdots, N\}$, 并满足 $\omega_{N,k} < \omega_{N,k+1}$, 采样点最大间隔 $\tilde{\Lambda}_N \triangleq \max_{k=1,\cdots,N-1} \{\omega_{N,k+1} - \omega_{N,k}\}$, 且满足 $\tilde{\Lambda}_N \leq \theta_n$, 其中 $\omega_{N,k}$ 为样本数为 N 时第 k 个频率点。频域数据样本的相关定义:

$$E_N \triangleq \{E_{N,k}(g, \eta)\}_{k=1}^N$$

$$E_{N,k}(g, \eta) \triangleq g_{N,k} + \eta_{N,k}$$

$$g_{N,k} = g(e^{j\omega_{N,k}})$$

$$g_N \triangleq \{g_{N,k}\}_{k=1}^N$$

$$\eta_N \triangleq \{\eta_{N,k}\}_{k=1}^N$$

$$Q_N(\sigma) \triangleq \{\eta_N \mid |\eta_{N,k}| \leq \sigma, k = 1, 2, \cdots, N\}$$

其中 σ 为在给定的确定性误差上, 反映由于非线性或时变等引起的系统未建模动态或外界的干扰噪声界。

下文中如无特别声明, $\|f\|_\infty \triangleq \sup_{z \in D} |f|$, 并应注意到, 当 f 在 ∂D 上连续时, 由极大模原理[14], 有 $\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f| = \sup_{z \in \partial D} |f|$。

鲁棒辨识算法即为从验后数据集 $\{E_N\}$ 到验前模型集 $A(D)$ 的映射, 以获得对真实系统 g 的最佳逼近 $\hat{g}_{la}$, 得到相应的 H_∞ 范数意义下的如下显式最差辨识误差表示

$$e(A(D), Q_N(\sigma), \theta_N) = \sup_{\tilde{\Lambda}_N \leq \theta_N} \sup_{g \in A(D), \eta_N \in Q_N(\sigma)} \|g - \hat{g}_{la}\|_\infty \tag{1}$$

称辨识算法是鲁棒收敛的, 当 $\lim_{N \to \infty, \sigma \to 0} e(A(D), Q_N(\sigma), \theta_N) = 0$。

取 X_N 为插值样条算子, 定义对应于数据样本 E_N 的拟合函数为 $\tilde{f}_N \triangleq X_N(E_N)$, 则本文辨识算法可表述为: 先对 $\tilde{f}_N$ 上的等间隔点作如下离散傅立叶变换

$$\widehat{g}_{L,k} = \frac{1}{L}\left\{\sum_{i=0}^{L-1} \tilde{f}_N(W_L^i) W_L^{-ik}\right\}$$

$$k = 0, 1, \cdots, L-1 \tag{2}$$

其中, $W_L = e^{j(2\pi/L)}$, L 为在拟合函数上所取的等间隔频率点数, 且 $L(N)$ 为单调递增函数, 并满足 $\lim_{N \to \infty} L(N) = \infty$。然后对 $\widehat{g}_{L,k}$ 作周期扩展定义: $\widehat{g}_{L,k} = \widehat{g}_{L,k \pm sL}$, 其中 s 为任意整数。于是可将问题转换为如下频域数据样本在频率上等间隔分布时的两步辨识算法[5]:

Step1: 获取未知系统的初步估计

$$\hat{g}_{pi}^{E,N} = \sum_{k=-n}^{n} w_{n,k} \widehat{g}_{L,k} z^k \tag{3}$$

其中, $w_{n,k}$ 为滤除噪声的窗函数, n 为截断数目, 并应满足 $n(L)$ 单调递增, $L > 2n$, $\lim_{L \to \infty} n(L) = \infty$;

Step2: 获取未知系统的最终估计

$$\hat{g}_{id}^N = \arg\min\{\|\hat{g}_{pi}^{E,N} - \hat{g}_{la}\|_\infty \mid \hat{g}_{la} \in H_\infty\} \tag{4}$$

定义 Step1 最差辨识误差为[5]

$$e_{pi}(A(D), Q_N(\sigma), \theta_N) = \sup_{\tilde{\Lambda}_N \leq \theta_N} \sup_{g \in A(D), \eta_N \in Q_N(\sigma)} \|g - \hat{g}_{pi}^{E,N}\|_\infty \tag{5}$$

从而将问题转化为采样点均匀分布的鲁棒收敛的两步结构辨识算法。

3 鲁棒辨识算法的显式最差情况误差界

本文采用 Lidstone 插值样条和三角窗函数, 并在辨识对象 $g \in B_{\rho,M}$ 时对算法进行误差分析, 推出相应的显式最差情况误差界。对于其它情况, 可采用类似的分析。

定义 1[14] (Lidstone 插值样条定义) 在区间 $[a, b]$ 上给定划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, 且在此划分上给定函数 $\Phi(x)$ 的值 $\Phi(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, m$,

可构造如下相应的Lidstone插值样条函数 $S(x)$, 满足插值条件 $S(x_i)=\Phi(x_i), i=0,1,\cdots,m$, 在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上, $S(x)$ 是 $2n-1$ 次多项式, 且在整个区间 $[a,b]$ 上是 $2n-2$ 阶连续的, 即

$$S(\Phi)=\sum_{j=0}^{n-1}[S^{(2j)}(x_{i-1})f_{2j+1}(v)+S^{(2j)}(x_i)g_{2j+1}(v)]h_i^{2j} \tag{6}$$

其中, $v=(x-x_i)/h_i, h_i=x_i-x_{i-1}, x_{i-1}\le x\le x_i$, $S^{(0)}(x_i)=S(x_i)=\Phi(x_i), i=1,2,\cdots,m$; f_{2j+1} 和 g_{2j+1} 称为Lidstone多项式, 当 $j=0$ 时, 有 $f_1(v)=1-v, g_1(v)=v$。

引理1[14]　若 $S(x)$ 是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 $2n-1$ 次Lidstone插值样条, 则有

$$\|S^{(r)}-F^{(r)}\|_\infty\le\left[\|F^{(2n)}\|_\infty\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^{2n-r}}\right)+\tilde{\omega}(F^{(2n)};h)\times\left(3+\frac{3}{2^{2n-r}}\right)\right]h^{2n-r},\quad r=0,1,\cdots,2n-1 \tag{7}$$

其中, $h=\max\limits_{1\le i\le m}(h_i)$, $\tilde{\omega}(f;h)$ 称为 f 的连续模, $\tilde{\omega}(f;h)=\|hf^{(1)}\|_\infty$。

不难看出, 当取一阶Lidstone插值样条 $n=1$ 且 $r=0$ 时, 有

$$\|S-F\|_\infty\le\left[\|F^{(2)}\|_\infty\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\tilde{\omega}(F^{(2)};h)\left(3+\frac{3}{2^2}\right)\right]h^2 \tag{8}$$

其中　$\tilde{\omega}(F^{(2)};h)=\|hF^{(3)}\|_\infty$

引理2　若 S 为一阶Lidstone插值样条算子, 则该算子是线性的, 且满足 $\|S\|_\infty\le 1$。

证明　不难看出一阶Lidstone插值样条 S 为线性算子。取 $\Phi\in l_\infty$ 且 $\|\Phi\|_\infty=1$, 不难推出

$$\sup\{S(\Phi)|_x\,|\,x\in[a,b]\}\le\max_{i=0,1,\cdots,m}\{\Phi(x_i)\}\le 1$$

所以有

$$\|S\|_\infty=\sup_{\|\Phi\|_\infty=1}\frac{\|S(\Phi)\|_\infty}{\|\Phi\|_\infty}\le 1 \qquad \square$$

采用三角窗函数[15]

$$w_{n,k}=\begin{cases}1-|k|/n, & -n\le k\le n\\ 0, & |k|>n\end{cases} \tag{9}$$

对任意正整数 $L\ge n$, 其相应的 n 点双边傅立叶变换 $\Psi_n(\omega)$ 具有如下性质[15]

$$\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}\Psi_n\left(\omega-\frac{2\pi i}{L}\right)=1,\quad\forall\omega\in\left[0,\frac{2\pi}{L}\right] \tag{10}$$

由于

$$\|(g-g_{\rm ref})\|_\infty\le\|g-\sum_{k=0}^{m-1}w_{n,k}p_kz^k\|_\infty+\|\sum_{k=-n}^{n}w_{n,k}\left[\frac{1}{L}\left\{\sum_{i=0}^{L-1}(g-\hat{p}_m^*(g))(W_L^i)W_L^{-ik}\right\}\right]z^k\|_\infty\le$$

$$\|g-\sum_{k=0}^{m-1}w_{n,k}p_kz^k\|_\infty+E_m(g)Q_w=$$

$$\|g-\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)p_kz^k\|_\infty+E_m(g)Q_w\le$$

$$E_m(g)(1+Q_w)+\|\sum_{k=0}^{m-1}\frac{|k|}{n}p_kz^k\|_\infty \tag{11}$$

取 $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为对应于传递函数 $g-\hat{p}_m^*(g)$ 的单位脉冲响应系数, $\{g_i\}_{i=0}^{\infty}$ 为对应于 g 的单位脉冲响应系数, 即 $g-\hat{p}_m^*(g)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}h_iz^i, g=\sum\limits_{i=0}^{\infty}g_iz^i$, (这里采用鲁棒辨识中的统一表述形式: 以 z^{-1} 取代真实系统中的 z)。由傅立叶变换, 可知

$$h_i=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g-\hat{p}_m^*(g))e^{-ji\omega}d\omega,\quad i=0,1,\cdots,\infty$$

所以有

$$|h_i|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g-\hat{p}_m^*(g))e^{-ji\omega}d\omega\right|\le\|g-\hat{p}_m^*(g)\|_\infty$$

即 $|g_i-p_i|\le\|g-\hat{p}_m^*(g)\|_\infty$, 不难看出

$$|p_i|\le\|g-\hat{p}_m^*(g)\|_\infty+|g_i| \tag{12}$$

引理3[16]　记 P_m 为次数不超过 m 的多项式集合(z 的正整数次幂), 则如下关系成立

$$\sup_{g\in B_{\rho,M}}\inf_{\hat{p}_m\in P_m}\|g-\hat{p}_m\|_\infty=M\rho^{-m-1} \tag{13}$$

即

$$\sup_{g\in B_{\rho,M}}\|g-\hat{p}_m^*\|_\infty=M\rho^{-m-1} \tag{14}$$

引理4[2]　对任一系统 $g\in B_{\rho,M}$, 其单位脉冲响应系数 $g_i(i=0,1,\cdots)$ 满足

$$|g_i|\le M\rho^{-i} \tag{15}$$

由引理3和引理4及式(11)和(12), 不难推出

$$\|(g-g_{\rm ref}^N)\|\le\frac{m(m-1)M\rho^{-m}}{2n}(\rho+\rho^{-1})+2M\rho^{-m-1} \tag{16}$$

由引理1, 并考虑到 $[a,b]=[0,2\pi]$, 有

$$\|g-X_{N,g}\|_\infty\le\left[\|g^{(2)}\|_\infty\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\tilde{\omega}(g^{(2)};\tilde{\Lambda}_N)\left(3+\frac{3}{2^2}\right)\right]\tilde{\Lambda}_N^2 \tag{17}$$

其中 $\tilde{\omega}(g^{(2)};\tilde{\Lambda}_N)=\tilde{\Lambda}_N\|g^{(3)}\|_\infty$, 则有

$$\|(g_{\rm ref}^N-\hat{g}_{pi}^N)\|_\infty\le Q_w\|g-X_{N,g}\|_\infty\le$$

$$[\|g^{(2)}\|_\infty(\frac{7}{12}) + \widetilde{\Lambda}_N \|g^{(3)}\|_\infty(\frac{15}{4})]\widetilde{\Lambda}_N^2 \quad (18)$$

由此不难得出

$$\|\hat{\eta}_{pi}^N\|_\infty \leq \sigma \quad (19)$$

引理5[2] 若$(\rho, M) \in (1, \infty] \times [0, \infty)$, k为正整数, $g \in B_{\rho,M}$, 则

$$\|g^{(k)}\|_\infty \leq \frac{Mk!}{(\rho - 1)^k} \quad (20)$$

其中 $g(k) = \mathrm{d}^k f(z) / \mathrm{d}z^k$

由上述引理及式(16), (18) 和(19), 得到Step1辨识的显式误差界为

$$e_{pi}(B_{\rho,M}, Q_N(\sigma), \theta_N) \leq \Omega \quad (21)$$

其中

$$\Omega = \sigma + [\frac{7}{6}\frac{M}{(\rho - 1)^2} + \frac{45}{2}\frac{M\theta_N}{(\rho - 1)^3}]\theta_N^2 + \frac{m(m-1)M\rho^{-m}}{2n}(\rho + \rho^{-1}) + 2M\rho^{-m-1} \quad (22)$$

显然, 由两步结构辨识算法的性质可知, 整个辨识算法的显式最差情况误差上界为 2Ω。

4 结 论

工业实践中, 获取未知对象均匀分布的频域数据样本并不容易。当数据采样点增加时, 基于数据均匀分布的辨识方法必须重新获取所有的数据样本, 而基于数据非均匀分布的辨识方法则可充分利用上述所有数据样本, 同时也适用于对均匀分布数据样本的处理。对频域数据样本非均匀分布下的辨识算法的探讨正是源于这一背景。本文提出的辨识方法, 克服了文献[13]对数据样本不充分利用的缺陷, 能将问题转化为数据样本等间隔分布时的两步算法, 从而保留了运算简捷的优点。

参考文献(References):

[1] A J Helmicki, C A Jacobson, K Gever. Identification in H_∞: A robustly convergent nonlinear algorithm[A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Atland: IEEE Publish Society, 1990. 3: 386-391.

[2] A J Helmicki, C A Jacobson, K Gever. Control-oriented system identification: A worst-case/deterministic approach in H_∞[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(9): 1163-1176.

[3] R J Rubin, D J N Limebeer. H_∞ identification for robust control[A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. San Antonio: IEEE Publish Society, 1994. 2: 2040-2044.

[4] L Giarre, M Milanese, P Pisco. H_∞ identification and model quality evaluation[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 4(42): 188-199.

[5] Gu G, D Xiong. A class of algorithms for identification in H_∞[J]. *Automatica*, 1992, 8(28): 229-242.

[6] L Giarre, M Milanese. H_∞ identification and model structure selection[J]. *Int J Robust Nonlinear Control*, 1996, 5(31): 367-377.

[7] J Chen, C N Nett. The Caratheodory-Fejer problem and H_∞/l^1 identification: A time domain approach[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(4): 729-735.

[8] 郑立辉, 冯珊, 潘德惠. 最差情况H_∞辨识的时域设计方法[J]. 自动化学报, 1998, 24(2): 153-159.
(Zheng Lihui, Feng Shan, Pan Dehui. Design of worst case H_∞: Identification in time domin[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(2): 153-159.)

[9] K J Harrison, J A Ward, S Pachuri. Sample complexity of worst-case identification[J]. *System Control Lett*, 1996, 5(27): 155-160.

[10] J Chen, N Nett, N Mosier. Worst case system identification in H_∞: Validation of a priori information, essentially optimal algorithms and error bounds[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 4(40): 1260-1265.

[11] Z Szabo, J Boker, D Bebiros. Identification of rational approximate models in H_∞ using generalized orthonormal basis[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 2(37): 1123-1137.

[12] P Lindskog, B Wahlberg. Application of Kautz models in system identification[A]. *12th IFAC World Congress*[C]. Sydney, 1997. 309-312.

[13] J R Partington. Algorithm for identification in H_∞ with unequally spaced function measurements[J]. *Int J Control*, 1993, 58(1): 21-31.

[14] 熊振翔. 插值多项式与插值样条[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.

[15] A Zygmund. *Trigonometric Series*[M]. London: Cambridge University Press, 1959.

[16] N J Young. *An Introduction to Hilbert Space*[M]. Cambrodge: Cambridge University Press, 1988.