文章编号: 1001-0920(2002)05-0595-04

模糊推理的函数变换观点

张　栋, 蔡开元
(北京航空航天大学 自动化学院, 北京 100083)

摘　要: 基于函数论的立场, 指出模糊推理过程是一个函数变换过程, 模糊规则蕴涵了一个从函数空间到函数空间的映射, 现存的种种模糊推理方法都是对这种映射的估计, 进而指出插值和回归的方法都适用于这种估计。系统地提出了用回归的方法处理模糊推理的思想, 并结合线性回归模型进行了示范, 证明了基于线性回归模型的模糊推理系统(FIS)同样是一个万能函数逼近器。

关键词: 模糊推理; 线性回归模型; 模糊推理系统; 万能函数逼近器
中图分类号: O 159　　文献标识码: A

Functional transformation approach to fuzzy inference

ZHANG Dong, CAI Kai-yuan
(Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics & Astronuatics, Beijing 100083, China)

Abstract: Fuzzy inference is in essence a kind of functional mapping process. Fuzzy rules imply a mapping between functional spaces. Each of existing fuzzy inference methods is some estimation of such mappings. Both interpolation and regression approaches are applicable to this estimation. A systematic approach to deal with fuzzy inference is proposed and demonstrated by use of a linear regression model. Fuzzy inference systems (FIS) based on linear regression models are shown to be universal functional approximators.

Key words: fuzzy inference; linear regression model; fuzzy inference system; universal functional approximator

1　引　　言

模糊推理方法在模糊理论中起着关键作用, 不同的模糊推理方法将导致不同的模糊推理结果和不同的模糊模型。自 Zadeh[1] 提出模糊推理方法以来, 关于模糊推理的不同方法和定义不断涌现。它们包括 CRI 方法[1]、概率方法[2]、证据方法[3,4]、插值方法[5]、真值限定方法[6,7]、区间值方法[8]、三蕴涵方法[9]和相似推理[10]等。这些推理方法大多基于逻辑, 在定义和选择上存在太多的随意性, 很难说是一个令人满意的数学基础。

另一方面, 模糊推理是以数值计算而不是以符号推演为特征。在模糊推理中不注重基于公理的形式演算, 甚至没有基于赋值的语义演算, 这是它与经典二值逻辑的本质区别。本文则从函数论的角度认识模糊推理, 以期对其数学内涵有进一步的理解。

2　模糊推理是函数变换过程

给定一条模糊规则 If X is A Then Y is B 和小

收稿日期: 2001-07-11; 修回日期: 2001-09-05
作者简介: 张栋(1974—), 男, 陕西西安人, 博士生, 从事模糊系统、神经网络和自适应控制研究; 蔡开元(1965—), 男, 福建莆田人, 教授, 博士生导师, 从事计算机系统可靠性、软件科学和智能控制研究。

前提 X is C, 我们便可通过某种模糊推理方法得到结论 Y is D。设 $F(U_X)$ 是论域 U_X 上的所有模糊集的全体, 对应的隶属度函数组成集合 $F_\mu(U_X)$; $F(U_Y)$ 是论域 U_Y 上的所有模糊集的全体, 对应的隶属度函数组成集合 $F_\mu(U_Y)$。则可认为这条模糊规则蕴涵了一个映射 Φ, 使得 $B = \Phi(A)$。而模糊推理过程实际上就是在作这样的一个映射 $\Phi: F(U_X) \to F(U_Y)$; $C \in F(U_X) \mapsto D \in F(U_Y)$。对应隶属度函数空间之间的映射(函数变换) 为 $\Phi_\mu: F_\mu(U_X) \to F_\mu(U_Y)$; $\mu_C \in F_\mu(U_X) \mapsto \mu_D \in F_\mu(U_Y)$。

这种函数变换的观点虽然简单, 但从一个侧面揭示了模糊推理的数学内涵。现存的种种模糊推理方法, 虽然各自的出发点不同, 所作的解释不同, 但都可看成是对这种映射不同的定义或估计。

3 模糊推理的最优估计

我们可以抛开模糊推理的逻辑背景, 从函数空间的插值或回归角度来重新认识它。通常认为, 现有的多数模糊推理方法实质上都是插值方法[5]。当然, 我们也可引入回归方法对未知映射 Φ 进行最优估计。给定 m 条模糊规则

$$\begin{aligned}&\text{If } X_1 \text{ is } A_1^{(i)}, X_2 \text{ is } A_2^{(i)}, \cdots, X_n \text{ is } A_n^{(i)}\\&\text{Then } Y \text{ is } B^{(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m\end{aligned} \tag{1}$$

相当于给出了 m 组输入输出数据 $(A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \cdots, A_n^{(i)}, B^{(i)})$。我们遵循以下步骤对 Φ 进行估计:

1) 假设这 m 条规则蕴涵着一个映射 $\Phi: F(U_{x_1}) \times F(U_{x_2}) \times \cdots \times F(U_{x_n}) \to F(U_Y)$, 对应有 $\Phi_\mu: F_\mu(U_{x_1}) \times F_\mu(U_{x_2}) \times \cdots \times F_\mu(U_{x_n}) \to F_\mu(U_Y)$;

2) 为 Φ_μ 选取估计模型类和一个优化准则;

3) 以 $\{(\mu_{A_1}^{(i)}, \mu_{A_2}^{(i)}, \cdots, \mu_{A_n}^{(i)}, \mu_B^{(i)}), i = 1, 2, \cdots, m\}$ 作为 Φ_μ 的观察数据, 即 $\mu_B^{(i)} = \Phi_\mu(\mu_{A_1}^{(i)}, \mu_{A_2}^{(i)}, \cdots, \mu_{A_n}^{(i)}) + \epsilon^{(i)}$, 这里 $\epsilon^{(i)}$ 是观测误差。根据优化准则确定 $\hat{\Phi}_\mu$, 使 $\epsilon^{(i)}$ 尽可能小, 即得到了 $\hat{\Phi}$。

于是, 我们便可利用 $\hat{\Phi}$ 进行模糊推理。这种思想并非是全新的, 早在文献[10] 中, Takagi 等就利用神经网络驱动模糊推理, 实际上就是用神经网络作为估计模型类、最小二乘准则作为优化准则进行回归。但迄今为止尚无人系统地提出将回归思想用于模糊推理。

4 采用线性回归模型进行最优估计

下面采用一个简单的数学模型 —— 线性回归模型, 对本文方法进行具体示范。本文采用的模糊推理方法有些类似于文献[10] 中的相似推理方法, 所不同的是采用了回归估计。

给定式(1) 的 m 条模糊规则, 设 U_j 是模糊变量 X_j 的论域, V 是 Y 的论域。在 U_j 上定义模糊集合 $H_{pj}, p = 1, 2, \cdots, k_j$, 在 V 上定义 $G_q, q = 1, 2, \cdots, l$。记 $U_{lv_j} = \{H_{pj}\}$ 为定义在 U_j 上的模糊集合组成的经典集合, 称为语言值论域。记 $V_{lv} = \{G_q, q = 1, 2, \cdots, l\}$ 为定义在 V 上的模糊集合组成的语言值论域。规则中的 $A_j^{(i)}$ 取自 U_{lv_j}, $B^{(i)}$ 取自 V_{lv}。U_{lv_j} 和 V 中的元素分别称为 X_j 和 Y 的参考模糊集。令 $a_{jp}^{(i)} = S(A_j^{(i)}, H_{jp})$, 其中 S 为某个相似度, 从而可将 $A_j^{(i)}$ 记为一个向量形式 $A_{lv_j}^{(i)} = [a_{j1}^{(i)}, a_{j2}^{(i)}, \cdots, a_{jk_j}^{(i)}]^\tau$, $A_{lv_j}^{(i)}$ 可视为 U_{lv_j} 上的一个模糊集合(也可看作是隶属度函数)。类似地, $B^{(i)}$ 被转换为一个 V_{lv} 上的一个模糊集合(或隶属度函数), 记为 $B_{lv}^{(i)} = [b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \cdots, b_l^{(i)}]^\tau$, 其中 $b_q^{(i)} = S(B_j^{(i)}, G_q)$。将 Y 和 X_j 也表示为向量形式 $Y_{lv} = [b_1, b_2, \cdots, b_l]^\tau$, $X_{lv_j} = [x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jk_j}]^\tau$, 则 m 条模糊规则可重写为

$$\begin{aligned}&\text{If } X_{lv_1} \text{ is } A_{lv_1}^{(i)}, X_{lv_2} \text{ is } A_{lv_2}^{(i)}, \cdots, X_{lv_n} \text{ is } A_{lv_n}^{(i)}\\&\text{Then } Y_{lv} \text{ is } B_{lv}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m\end{aligned} \tag{2}$$

设这些规则蕴涵了一个映射 Φ, 使得 $Y_{lv} = \Phi(X_{lv_1}, X_{lv_2}, \cdots, X_{lv_n})$。采用线性回归模型, 则 Y_{lv} 的第 1 个元素可表示为

$$b_1 = \alpha_0 + \alpha_1^\tau X_{lv_1} + \alpha_2^\tau X_{lv_2} + \cdots + \alpha_n^\tau X_{lv_n} \tag{3}$$

令 $\alpha^\tau = [\alpha_0 \quad \alpha_1^\tau \quad \alpha_2^\tau \quad \cdots \quad \alpha_l^\tau]$ 为待定参数向量, 则有

$$W_1 = Q\alpha \tag{4}$$

其中

$$W_1 = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_1^{(2)} \\ \vdots \\ b_1^{(m)} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (A_{lv_1}^{(1)})^\tau & (A_{lv_2}^{(1)})^\tau & \cdots & (A_{lv_n}^{(1)})^\tau \\ (A_{lv_1}^{(2)})^\tau & (A_{lv_2}^{(2)})^\tau & \cdots & (A_{lv_n}^{(2)})^\tau \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{lv_1}^{(m)})^\tau & (A_{lv_2}^{(m)})^\tau & \cdots & (A_{lv_n}^{(m)})^\tau \end{bmatrix}$$

α 的最小二乘最小范数解为

$$\hat{\alpha} = Q^+ W_1 \tag{5}$$

其中 Q^+ 表示 Q 的 Moore-Penrose 逆。显然, 上述线

性模型和参数估计方法可用于 Y_{lv} 的其它参数。

现在,给定前提 X_1 is C_1, X_2 is C_2, …, X_n is C_n,便可通过如下步骤得到结论:

Step1: 根据参考模糊集,将前提转化为 X_{lv_1} is C_{lv_1}, X_{lv_2} is C_{lv_2}, …, X_{lv_n} is C_{lv_n} 形式;

Step2: 由已确定的线性回归模型算得

$$D_{lv} = \hat{\Phi}(C_{lv_1}, C_{lv_2}, \cdots, C_{lv_n}) = [d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_l]^{\tau} \tag{6}$$

Step3: 通过

$$\mu_D(y) = \frac{\sum_{q=1}^{l} d_q \times \mu_{G_q}(y)}{\sum_{q=1}^{l} d_q}, \quad y \in V \tag{7}$$

或

$$\mu_D(y) = \max_{1\le q\le l}(d_q \times \mu_{G_q}(y)), \quad y \in V \tag{8}$$

将 D_{lv} 转为 D。

Step3 实际上是在作 G_q 的加权平均,权值对应于 G_q 的相似度 d_q。

5　基于线性回归模型的模糊推理系统

模糊推理系统(FIS) 又称模糊控制器。文献[11～17] 证明了几乎对于各种常见的隶属度函数和模糊蕴涵算子构造的 FIS 都是一个万能函数逼近器。下面利用第 4 节介绍的模糊推理方法构造一个 FIS,并证明所构造的 FIS 也是一个万能函数逼近器。

为研究方便,我们只讨论两输入、一输出的 FIS。令输入论域为 $U = U_1 \times U_2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathscr{R}$, $V \subset \mathscr{R}$ 为输出论域, $C(U)$ 为所有定义在 U 上的实值连续函数的集合。构造一类 FIS 如下:

1) 数据库

U_1 上的语言值论域为 $U_{lv_1} = \{A^{(i)}, i = 1, 2, \cdots, k_1\}$, U_2 上的语言值论域为 $U_{lv_2} = \{B^{(j)}, j = 1, 2, \cdots, k_2\}$, V 上的语言值论域为 $V_{lv} = \{C^{(q)}, q = 1, 2, \cdots, l\}$。

2) 规则库

设有 m 条规则 If X_1 is $A^{(i)}_{\text{rule}}$, X_2 is $B^{(i)}_{\text{rule}}$, Then Y is $C^{(i)}_{\text{rule}}$, $i = 1, 2, \cdots, m$。

3) 模糊化接口

给定精确值输入 $x = (x_1, x_2) \in U$, x_i 被直接模糊化为语言值论域上的模糊集,记为 $\tilde{x}_i (i = 1, 2)$, $\tilde{x}_1 = (\mu_{A^{(1)}}(x_1), \mu_{A^{(2)}}(x_1), \cdots, \mu_{A^{(k_1)}}(x_1)) \in \mathscr{R}$, $\tilde{x}_2 = (\mu_{B^{(1)}}(x_2), \mu_{B^{(2)}}(x_2), \cdots, \mu_{B^{(k_2)}}(x_2)) \in \mathscr{R}$。

4) 决策单元

决策单元利用线性回归模型进行函数变换,得到输出模糊向量 $\tilde{y}$。记

$$\tilde{y} = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \cdots, \beta^{(l)}) \in \mathscr{R}$$

其中

$$\begin{aligned}\beta^{(q)} = {} & a_1^{(q)} \mu_{A^{(1)}}(x_1) + a_2^{(q)} \mu_{A^{(2)}}(x_1) + \cdots + \\ & a_{k_1}^{(q)} \mu_{A^{(k_1)}}(x_1) + b_1^{(q)} \mu_{B^{(1)}}(x_2) + \\ & b_2^{(q)} \mu_{B^{(2)}}(x_2) + \cdots + \\ & b_{k_2}^{(q)} \mu_{B^{(k_2)}}(x_2) + \beta_0^{(q)}, \quad q = 1, 2, \cdots, l\end{aligned}$$

$a_i^{(q)}$, $b_i^{(q)}$ 和 $\beta_0^{(q)}$ 是待估计参数,参数估计出来后,规则库便不需要了。

5) 解模糊化接口

将 $\tilde{y}$ 转化为精确值输出

$$y = \frac{1}{|I|} \sum_{p \in I} \bar{y}_p$$

其中,指标集 $I = \{p \mid \beta^{(p)} = \max_{0\le q\le 1} \beta^{(q)}\}$, $|I|$ 是 I 的势; $\bar{y}_p = \arg\max_{y}\{\mu_{C^{(p)}}(y)\}$ 是 $C^{(p)}$ 中心。

由上述 5 部分构成的 FIS 是一个从 U 到 V 的函数。令 $F(U)$ 是这种 FIS 所表示的函数的全体,则有如下万能函数逼近定理:

定理 1　对 $\forall \epsilon > 0$, $\forall g \in C(U)$, $\exists f \in F(U)$, s.t. $|g(x) - f(x)| < \epsilon$, 对所有 $x \in U$ 成立。

证明　因为 $g(x)$ 在致密集 $U = [0,1] \times [0,1]$ 上是连续的,所以它是一致连续的,即对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得如果

$$x_1, x_2 \in U \text{ 且 } \| x_1 - x_2 \| < \delta$$

则

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon$$

其中 $\| \cdot \|$ 是通常的欧几里德范数。

令 N 是一个整数, $N > \sqrt{2}/\delta$, 便可得到图 1 所示的点格。

现在构造一个 $f \in F(U)$。设 $t^{(ij)}$ 代表点格上的第 i 行与第 j 列交线上的一点(见图 1),则 $t^{(ij)} =$

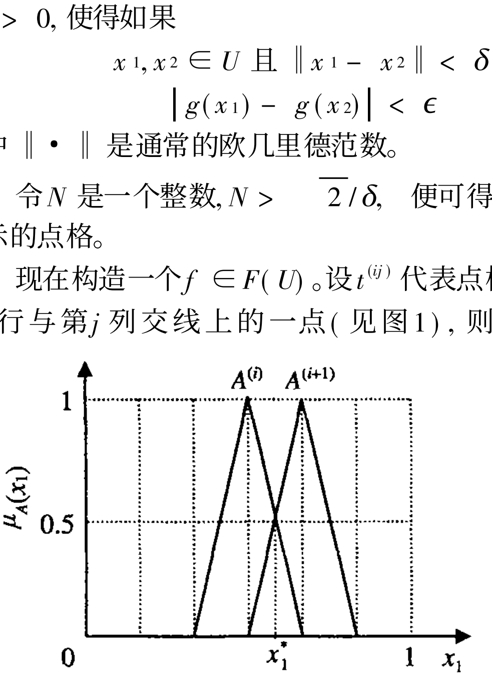

图 1　模糊集合的定义

$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $x_1^{(i)} = i\lambda, i = 0, 1, \cdots, N$ 且 $x_2^{(j)} = j\lambda, j = 0, 1, \cdots, N$。

在 U_1 上定义模糊集 $A^{(i)}, i = 0, 1, \cdots, N$, $A^{(i)}$ 是中心点为 $x_1^{(i)}$ 的任意钟型正规隶属度函数, 且相邻隶属度函数有交叉(如图 1), 令 $U_{lv_1} = \{A^{(i)}, i = 0, 1, \cdots, N\}$。同样可在 U_2 上定义模糊集合 $B^{(j)}, j = 0, 1, \cdots, N$, 令 $U_{lv_2} = \{B^{(j)}, j = 0, 1, \cdots, N\}$。在 V 上定义 $(N+1) \times (N+1)$ 个模糊集合, 记为 $C^{(ij)}(i = 0, 1, \cdots, N; j = 0, 1, \cdots, N)$, 记 $\bar{y}^{(ij)} = \arg\max_y \mu_{C^{(ij)}}(y)$ 是 $C^{(ij)}$ 的中心点, 并令 $\bar{y}^{(ij)} = g(t^{(ij)})$, 令 $V_{lv} = \{C^{(ij)}\}$。任给 $x = (x_1, x_2) \in U$, x 模糊化为如下两实向量

$$\tilde{x}_1 = (\mu_{A^{(0)}}(x_1), \mu_{A^{(1)}}(x_1), \cdots, \mu_{A^{(N)}}(x_1)) \in \mathscr{R}^{N+1}$$

$$\tilde{x}_2 = (\mu_{B^{(0)}}(x_2), \mu_{B^{(1)}}(x_2), \cdots, \mu_{B^{(N)}}(x_2)) \in \mathscr{R}^{N+1}$$

令 $\beta^{(ij)} = [\mu_{A^{(i)}}(x_1) + \mu_{B^{(j)}}(x_2)]/2$, 有 $\tilde{y} = (\beta^{(0,0)}, \beta^{(0,1)}, \cdots, \beta^{(N,0)}, \cdots, \beta^{(N,N)})$。令 $I = \{(i,j) \mid \beta^{(i,j)} = \max_{0 \le r,s \le N} \beta^{(rs)}\}$, 则 $y = \frac{1}{|I|}\sum_{(i,j)\in I} y^{(ij)}$。至此便构造了一个 FIS, 记为 f, 显然 $f \in F(U)$。对 $\forall x \in U$, $n = |I|$ 是一个正整数, 有

$$\begin{aligned}
&|g(x) - f(x)| = \\
&|g(x) - \frac{1}{n}\sum_{(i,j)\in I} y^{(ij)}| = \\
&\frac{1}{n}|ng(x) - \sum_{(i,j)\in I} \bar{y}^{(ij)}| \le \\
&\frac{1}{n}\sum_{(i,j)\in I} |g(x) - g(t^{(ij)})|
\end{aligned}$$

对于任何 $(i,j) \in I$, 我们有 $\| x - t^{(ij)} \| < \delta$, 这可由图 2 解释。对于与 x 最近的点 $t^{(ij)}$, $\beta^{(ij)} = [\mu_{A^{(i)}}(x_1) + \mu_{B^{(j)}}(x_2)]/2$ 是最大的。这时 $\| x - t^{(ij)} \| < \delta, (i,j) \in I$。

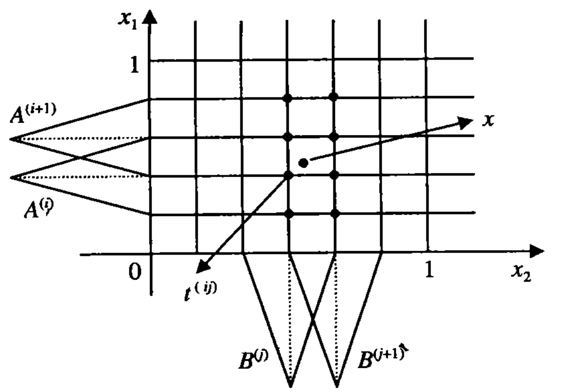

图 2 解模糊化方法示意

所以有 $|g(x) - f(x)| \le \frac{1}{n}\sum_{(i,j)\in I} |g(x) - g(t^{(i,j)})| \le \frac{1}{n} n\epsilon = \epsilon$。□

注 1 定理 1 的证明是构造性的, 并可很容易地推广到任意的致密集和任意多元函数的情形。

6 结 语

本文基于函数论的立场, 指出模糊推理是一个函数变换过程, 模糊规则蕴涵了一个从函数空间到函数空间的映射, 现存的种种模糊推理方法都是对该映射的估计。进而指出插值和优化的观点都适用于这种估计, 并系统地提出了用回归的方法处理模糊推理的思想。我们利用线性回归模型进行了具体示范, 证明了基于线性回归模型的 FIS 同样是万能函数逼近器。线性回归模型是最简单的一种模型, 也可根据实际需要, 采用更复杂的回归模型(如多项式回归模型、神经网络和统计决策树模型等), 也可采用其它优化准则。

参考文献(References):

[1] L A Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning — Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ [J]. *Information Sciences*, 1974, 8: 199-249, 301-357; 1975, 9: 43-93.

[2] D Dubois, H Prade. Fuzzy sets in approximate reasoning—Part 1: Inference with possibility distributions [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 40: 143-202.

[3] E S Lee, Q Zhu. *Fuzzy and Evidence Reasoning* [M]. Herdelberg: Physica-Verlag, 1995.

[4] J W Guan, D A Bell. Approximate reasoning and evidence theory [J]. *Information Sciences*, 1997, 96: 207-235.

[5] W H Hsiao, S M Chen, C H Lee. A new interpolative reasoning method in sparse rule-based systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 93: 17-22.

[6] Z Cao, A Kandel, L Li. A new model of fuzzy reasoning [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 36: 311-325.

[7] T Takagi, M Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1985, 15: 116-132.

(下转第 603 页)

最大误差0.001, BP 网络迭代次数 20, 改进的遗传算法迭代次数 20, 整个网络迭代次数 1 000。

表 2 是在上述网络拓扑结构和学习参数下, 对砂岩厚度预测的结果。为便于对比, 同时利用传统 BP 网络(在相同网络拓扑结构和学习参数下) 进行了砂岩厚度预测(其中带 * 号的为性能测试样本井)。通过与已知井对比, 本文提出的算法预测的最大绝对误差为0.95 m, 最大相对误差为11.86%; BP 网络预测的最大绝对误差为 1.17 m, 最大相对误差为 14.67%, 这说明采用本文算法对砂岩进行的预测精度是较高的, 而且达到相同系统误差时的运算速度比BP 网络提高 1.5 倍左右。

表 3 是利用本文方法和 BP 网络对该工区的孔隙度进行预测的结果, 通过井处预测值与实际值比较, 表明本文的遗传算法人工神经网络预测精度高于 BP 网。

4　结　论

快速、高精度遗传算法人工神经网络, 由于对传统的遗传算法进行了改进, 综合了遗传算法和人工神经网络两者的优点, 克服了 BP 算法收敛速度慢和可能收敛到局部极小点的缺陷, 从而提高了网络的收敛速度和预测精度。对实际资料进行的预测表明, 该方法是进行薄互储层参数预测行之有效的方法, 而且该方法在地震勘探中具有很好的应用前景。

薄互储层参数预测效果既依赖于所采用的网络模型, 也依赖于所选用的地震特征参数, 同时还具有地区性差异。这是薄互储层参数预测的难点。所以, 快速、高精度遗传算法人工神经网络这一新的薄互储层参数预测方法, 还有待于在实际应用和研究中得到进一步改进和完善。

参考文献(References):

[1] 焦李成. 神经网络系统理论[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1995.

[2] Grefenstetle J. Optimization of control parameters for genetic algorithms[J]. *IEEE Trans on Syst, Man and Cybern*, 1986, 16(1): 122-128.

[3] 黄秀轩, 朱学峰. 改进的自适应遗传算法[J]. 中国学术期刊文摘, 1998, 14(11): 1415-1417.
(Huang Xiu-xuan, Zhu Xue-feng. Modified adaptive genetic algorithm[J]. *Academic Periodical Abstracts of China*, 1998, 14(11): 1415-1417.)

[4] 王建成, 高大启, 王静, 等. 改进的遗传和 BP 杂交算法及神经网络经济预警系统设计[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(4): 136-141.
(Wang Jian-cheng, Gao Da-qi, Wang Jing, et al. Designing of ANN economic early warning system based on improved genetic and BP algorithms[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 1998, 18(4): 136-141.)

(上接第 598 页)

[8] H Nakanishi, I B Turksen, M Sugeno. A review and comparison of six reasoning methods[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 57: 257-294.

[9] G J Wang. On the logic foundation of fuzzy reasoning [J]. *Information Sciences*, 1999, 117: 47-88.

[10] I B Turksen, Zhao Zhong. An approximate analogical reasoning schema based on similarity measures and interval-valued fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 34: 323-346.

[11] J J Buckley, Yoichi Hayashi. Fuzzy input-output controllers are universal approximators[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 58: 273-278.

[12] J J Buckley. Sugeno type controllers are universal controllers[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 53: 299-303.

[13] B Kosko. Fuzzy systems as universal approximators [A]. *Proc of IEEE Int Conf on Fuzzy Systems*[C]. San Diego, 1992. 1153-1162.

[14] L X Wang. Fuzzy systems are universal approximators [A]. *Proc of IEEE Int Conf on Fuzzy Systems*[C]. San Diego, 1992. 1163-1170.

[15] Laszlo T Koczy, Alessando Zorat. Fuzzy systems and approximation[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 85: 203-222.

[16] Castro J L, Delgado M. Fuzzy systems with defuzzification are universal approximators[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1996, 26(1): 149-152.

[17] Castro J L. Fuzzy logic controllers are universal approximators[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1995, 25(4): 629-635.