

文章编号: 1001-0920(2002)05-0607-04

混沌同步系统反馈系数的优化设计

卢元元¹, 丘水生², 胡庆彬¹

(1. 深圳大学 信息工程学院, 广东 深圳 518060; 2. 华南理工大学 电子与信息学院, 广东 广州 510640)

摘要: 为提高混沌同步系统抗信道噪声和元件参数失配干扰的能力, 研究具有线性误差方程的 I 类连续变量反馈同步系统中反馈系数的优化设计问题。推导出反馈系数优化设计的目标函数和约束条件, 用 MATLAB 软件对其进行优化设计。通过对蔡氏电路非线性反馈和线性反馈两种同步方案的仿真及实验表明, 用该方法设计的混沌同步系统具有较强的抗干扰能力。

关键词: 混沌同步; 抗干扰; 优化设计; 蔡氏电路

中图分类号: TN 918; TN 710

文献标识码: A

Optimal design of feedback coefficients to chaotic synchronization systems

LU Yuan-yuan¹, QIU Shui-sheng², HU Qing-bin¹

(1. College of Information Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China; 2. College of Electronic and Information, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: The optimal design of feedback coefficients is studied for a class of continuous variables feedback chaotic synchronization systems with linear error equations. The ability of the systems to resist interference caused by channel noise and non-matching parameters is improved. The object function and bound conditions of optimal design for the feedback coefficients are derived and the optimal design is completed with MATLAB software. The results of simulation and experiments for the nonlinear feedback and linear feedback synchronization approaches applied to Chua's circuits show that the synchronous chaotic systems designed by this method have strong anti-interference characteristics.

Key words: chaotic synchronization; anti-interference; optimal design; Chua's circuit

1 引言

混沌用于保密通信的关键在于两个混沌系统之间的同步。自 1990 年 Pecora 和 Carrol 首次在电子电路上实现两个混沌系统的同步以来, 混沌同步便成为国际混沌领域研究的热点, 多种混沌同步方法相继产生^[1]。但到目前为止, 出现的各种同步方法尚

不能较好解决信道噪声干扰和系统元件参数失配情况下的混沌同步问题, 这是各种混沌保密通信方案不能实际应用的主要原因。

在诸多混沌同步方法中, 连续变量反馈同步法^[1~3]原理简单且易实现, 有广阔的应用前景。本文从提高同步系统抗信道噪声和元件参数失配干扰能力角度, 研究具有线性或分段线性误差方程的

收稿日期: 2001-07-11; 修回日期: 2001-11-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(69672022); 国家教委博士点基金项目(97056116)

作者简介: 卢元元(1955—), 女, 湖南衡阳人, 副教授, 从事混沌及保密通信、线性及非线性系统理论等研究; 丘水生

© 1994-2014 China Academic Electronic Journal Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

一类连续变量反馈同步系统中反馈系数的优化设计问题。推导出反馈系数优化设计的目标函数和约束条件,从而可用优化软件对其进行优化设计,并对蔡氏电路非线性反馈和线性反馈两种同步方案的反馈系数进行优化设计,数字仿真及电路实验表明,用该方法设计的混沌同步系统具有较强的抗干扰能力。

2 连续变量反馈混沌同步法^[1~3]

驱动系统 S_1 和响应系统 S_2 的状态方程分别为

$$\dot{x} = F(x) = Ax + Bf(x) \quad (1)$$

$$\dot{y} = F(y) + D(q(x) - q(y)) \quad (2)$$

其中, $x \in R^n, y \in R^n, F: R^n \rightarrow R^n, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times 1}, f: R^n \rightarrow R, D \in R^{n \times 1}$ 为控制向量, $q: R^n \rightarrow R, q(x)$ 为系统 S_1 送出的同步信号, $q(y)$ 为系统 S_2 本身的反馈信号。取

$$q(y) = g(y) + Ky \quad (3)$$

式中, $g: R^n \rightarrow R, K \in R^{1 \times n}$ 为反馈向量。若 $g(y)$ 等于零,则为线性反馈,否则为非线性反馈。若无元件参数失配或信道噪声干扰,适当选择反馈函数 q 和控制向量 D ,可使系统 S_1 和 S_2 在任意初值下同步。若存在上述干扰,则系统 S_1 和 S_2 将存在同步误差。

控制向量 D 及反馈函数式(3)中非线性部分 $g(y)$ 的选择要考虑许多因素,当一个同步方案确定后, D 和 $g(y)$ 也基本确定下来,可进行调整的是反馈向量 K 。怎样选择 K ,使系统在信道噪声干扰和元件参数失配情况下同步误差尽可能小,在以往文献中未见介绍。

3 反馈向量的抗干扰优化设计

式(2)减去式(1)可得无干扰时的误差方程,该误差方程可能是线性的也可能是非线性的,与同步方案有关。对任何混沌系统采用文献[2]介绍的非线性反馈同步法均可得到线性误差方程,对具有分段线性元件的混沌系统(如蔡氏电路)采用线性反馈同步法可得到分段线性的误差方程。本文只研究具有线性或分段线性误差方程的同步方案中反馈向量 K 的优化设计问题。

设由于信道噪声干扰使同步信号 $q(x)$ 传输到系统 S_2 时变为 $q(x) + u(t)$,同时考虑到参数失配,将 S_2 的状态方程式(2)改写为

$$\dot{y} = F(y) + D(q(x) - q(y)) + u(t) \quad (4)$$

$$u(t) = \{ [F(y(t)) + D(q(x(t)) - q(y(t)))] - [F(y(t)) + D(q(x(t)) - q(y(t)))] \} R^n$$

是由信道噪声及元件参数失配引起的干扰信号。式(4)与式(2)相比,多了干扰信号向量 $u(t)$ 。若某同步方案无干扰时的误差方程是线性的,则式(4)减去式(1)得到有干扰时的误差方程为

$$\dot{e} = (F(y) + D(q(x) - q(y)) + u(t)) - F(x) = He + u(t) \quad (5)$$

式中, $e(t) = (y(t) - x(t))$ 为误差向量, $H \in R^{n \times n}$ 是线性误差方程的系数矩阵。

方程(5)的解包含零状态响应和零输入响应,适当选择控制和反馈方案,可使方程特征根均有负实部,零输入响应可趋于零。故在此仅讨论由干扰信号 $u(t)$ 产生的零状态响应分量。以下所指误差方程的解均为零状态响应。下面仅以3阶混沌系统为例讨论,即式(5)中 $e = [e_1, e_2, e_3]^T, u(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T$ 。其原理可推广到更高阶超混沌系统。

对式(5)进行拉普拉斯变换,得

$$(sI - H)E(s) = U(s) \quad (6)$$

设式(6)有一个实特征根和一对复特征根分别为 λ 及 $\sigma \pm j\omega$,则其系数矩阵行列式为

$$\Delta = |sI - H| = s^3 + \alpha_2(K)s^2 + \alpha_1(K)s + \alpha_0(K) = (s - \lambda)(s - \sigma - j\omega)(s - \sigma + j\omega) \quad (7)$$

其中, $\alpha_0(K), \alpha_1(K), \alpha_2(K)$ 为特征多项式的各项系数,由于 H 中包含待定的反馈向量 K ,故各系数均是 K 的函数。

对式(6)求解,可得 $E(s)$,再进行拉氏反变换,得各误差解为

$$e_l(t) = \sum_{i=1}^3 \int_0^t g_{il}(\tau) u_i(t - \tau) d\tau \quad (8)$$

$$l = 1, 2, 3$$

其中, g_{il} 是以 u_i 为输入 e_l 为输出的单位脉冲响应函数,有 $g_{il}(t) = a_{il}e^{\lambda t} + b_{il}e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta_{il})$ 。其中

$$a_{il} = (\Delta_{il}(s - \lambda) / \Delta)_{s=\lambda}$$

$$b_{il} = 2 |(\Delta_{il}(s - \sigma - j\omega) / \Delta)_{s=\sigma + j\omega}|$$

$$\theta_{il} = \arg((\Delta_{il}(s - \sigma - j\omega) / \Delta)_{s=\sigma + j\omega})$$

Δ_{il} 是行列式 Δ 第 i 行 l 列元素的代数余子式。由式(8)可见,为尽量减小由干扰信号所引起的同步误差,应使各脉冲响应函数在一定时间内的积分尽可能小。令 $G_{il} = \int_0^1 |b_{il}| e^{\sigma \tau} d\tau$,取目标函数为

$$h = \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^3 c_{il} G_{il} \quad (9)$$

式中 $c_{il}(i = 1, 2, 3, l = 1, 2, 3)$ 为各项的加权系数, 其取值根据所需的有用信号及干扰信号的分布等具体情况而定。例如某同步方案中 $u(t)$ 向量的 3 个元素都不为零, 但只取第 k 个状态变量 x_k 为有用信号, 要求同步误差 e_k 尽可能小, 可取 $c_{ik} = 1(i = 1, 2, 3)$, 其余加权系数为零; 再如某同步方案中, 要求所有状态变量的同步误差都尽可能小, 但干扰信号只反映在 $u(t)$ 的第 k 个元素 u_k 上, 可取 $c_{kl} = 1(l = 1, 2, 3)$, 其余加权系数为零。

目标函数中含有待定反馈向量 K 和特征根 $\gamma, \sigma \pm j\omega$ 它们应满足式(7), 此外各特征根应有负实部、角频率 ω 应大于零, 故有以下约束条件

$$\begin{cases} 2\sigma + \gamma = -\alpha(K) \\ \sigma^2 + \omega^2 + 2\gamma\sigma = \alpha_i(K) \\ \gamma(\sigma^2 + \omega^2) = -\alpha(K) \\ \gamma < 0, \sigma < 0, \omega > 0 \end{cases} \quad (10)$$

在式(10)约束下寻找使目标函数(9)具有最小值的 K 向量及 γ, σ, ω 值。该过程可采用现有的优化软件(如 MATLAB 语言中的优化工具箱)完成。

若是分段线性误差方程, 则应综合考虑各线性段误差方程构造目标函数和约束条件。

4 设计实例

4.1 蔡氏电路非线性反馈同步的优化设计和数字仿真

一个产生双涡旋混沌吸引子蔡氏电路 S_1 的归一化状态方程为^[4]

$$\dot{x} = F(x) = Ax + Bf(x) = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \xi & -\xi & \rho \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(x) \quad (11)$$

式中, $\alpha = 10, \xi = 1, \rho = 1, \beta = 14.87, f(x) = -0.68x_1 - 0.295(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$ 。根据式(4)构造另一同步电路 S_2 , 采用文献[2]介绍的非线性反馈同步方案, 取 $q(x) = f(x) + Kx$ 和 $D = B_0 S_2$ 与 S_1 的状态方程相减, 得同步误差方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha + \alpha k_1 & \alpha + \alpha k_2 & \alpha k_3 \\ \xi & -\xi & \rho \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

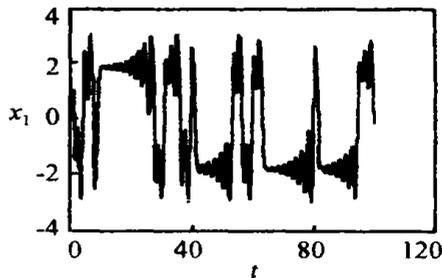
由上式可求得目标函数(9)及约束条件(10)。设仅以 x_1 作为有用信号, 取式(9)中 $c_{i1} = 1(i = 1, 2, 3)$, 其余加权系数为零。用 MATLAB 语言优化工具箱中的 CONSTR 命令求得使目标函数在约束条件下具有极小值的反馈向量为

$$K = [-29 \quad -1 \quad 0]$$

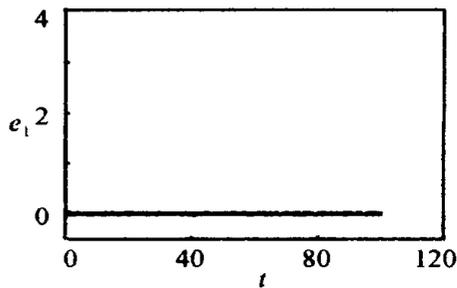
将 K 向量代入 S_2 的方程, 并对 S_1 和 S_2 进行数字仿真。仿真中假设同步信号 $q(x)$ 传输时受到一加性白噪声 $\epsilon(t)$ 的干扰, 该白噪声为正态分布, 均值为零, 标准差为 0.5。系统 S_2 与 S_1 参数失配, S_2 参数为

$$\begin{cases} \alpha = \alpha + \Delta\alpha = 13, & |\Delta\alpha|/\alpha = 30\% \\ \xi = \xi + \Delta\xi = 0.9, & |\Delta\xi|/\xi = 10\% \\ \rho = \rho + \Delta\rho = 0.7, & |\Delta\rho|/\rho = 30\% \\ \beta = \beta + \Delta\beta = 20, & |\Delta\beta|/\beta = 34.5\% \end{cases} \quad (13)$$

仿真所得 x_1 及 e_1 如图 1 所示, 记录进入稳态后有 $\max|e_1|/\max|x_1| = 0.0321/3.0303 = 1.06\%$ 。可见, 尽管存在噪声干扰和大比例参数失配, y_1 与 x_1 仍能很好地同步。



(a) 状态变量 $x_1(t)$



(b) 同步误差 $e_1(t) = y_1(t) - x_1(t)$

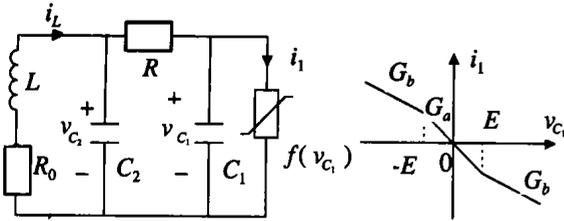
图 1 蔡氏电路非线性反馈同步系统仿真结果

4.2 蔡氏电路线性反馈同步的优化设计和电路实验

一个实际的蔡氏电路 S_1 及其非线性电阻伏安特性 $i_1 = f(v_{c1})$ 如图 2 所示^[5]。其中 $R_0 = 15.2 \Omega, L = 23.4 \text{ mH}, R = 1830 \Omega, C_1 = 10 \text{ nF}, C_2 = 100 \text{ nF}, G_a = -0.76 \text{ ms}, G_b = -0.41 \text{ ms}, E = 1 \text{ V}$ 。 $t = 2 \text{ ms/格}$ 时, 示波器测得该电路产生的混沌信号 v_c

如图 3 所示。取状态向量 $x = [v_{c_1} \ v_{c_2} \ i_L]^T$, 可得状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bf(x_1) = \begin{bmatrix} -1/RC_1 & 1/RC_1 & 0 \\ 1/RC_2 & -1/RC_2 & 1/C_2 \\ 0 & -1/L & -R_0/L \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1/C_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(x_1) \quad (14)$$



(a) 实际蔡氏电路 (b) 伏安特性
图 2 实际蔡氏电路及其非线性电阻伏安特性

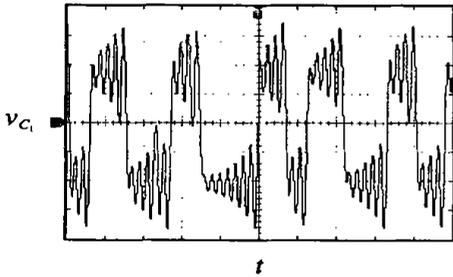


图 3 实际蔡氏电路 v_{c_1} 波形图(1.5 V/格)

另一个参数相同的蔡氏电路作为同步响应系统 S_2 , 其方程为

$$\dot{y} = Ay + Bf(y_1) + D(q(x) + \epsilon(t) - q(y)) \quad (15)$$

其中 $\epsilon(t)$ 为信道干扰噪声。采用双变量线性反馈同步方案, 取 $q(y) = Ky = k_{11}y_1 + k_{21}y_2$ 和 $D = B = [-1/C_1 \ 0 \ 0]^T$ 。式(15)减去式(14)得误差方程

$$\dot{e} = (A - BK)e + B(f(y_1) - f(x_1)) + B\epsilon(t) \quad (16)$$

将分段线性函数 $f(x_1)$ 代入式(16), 得分段线性误差方程

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A - BK + B[G_b \ 0 \ 0])e + B\epsilon(t) = A_1e + B\epsilon(t) \\ (y_1 < -E, x_1 < -E) \quad (y_1 > E, x_1 > E) \end{aligned} \quad (17a)$$

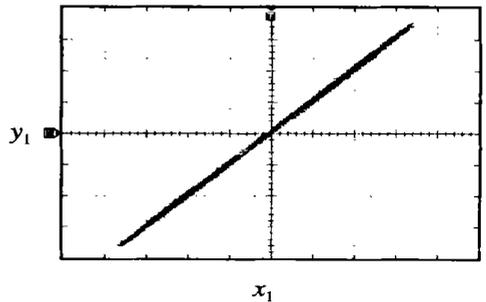
$$\dot{e} = (A - BK + B[G_a \ 0 \ 0])e + B\epsilon(t) = A_2e + B\epsilon(t)$$

$$-E \ y_1 \ E, -E \ x_1 \ E \quad (17b)$$

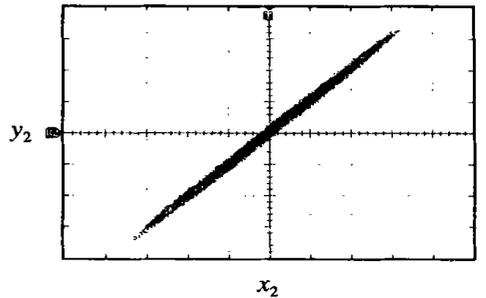
上式只考虑 x_1, y_1 处于同一线性区间的情况。若某时刻 x_1, y_1 位于不同的线性区间, 则可视为系统 S_1 和 S_2 出现短暂的参数失配而给同步系统带来干扰信号, 一旦 x_1, y_1 进入同一线性区, 该干扰信号会自动消失。

对反馈向量 K 进行优化设计时, 考虑到该蔡氏电路大部分时间工作在 $|x_1| > E$ 区间(见图 3), 故仅根据式(17a)构造优化设计的目标函数(9), 但在约束条件(10)中应加入使式(17b)特征根实部为负的要求。考虑到式(17)中干扰向量 $B\epsilon(t)$ 只有第一个元素不为零, 故取式(9)中 $c_{1l} = 1 (l = 1, 2, 3)$, 其余加权系数为零。用 MATLAB 语言优化工具箱中的 CONSTR 命令求得 $K = [3.5 \ -1 \ 0] \times 10^{-3}$ 。

根据优化设计结果, 构造蔡氏电路线性反馈同步系统并进行实验, 因篇幅所限, 电路图略去。为模拟干扰信号, 实验中将响应系统 S_2 的 C_1 由 10 nF 改为 22 nF, 两个蔡氏电路的其它元件也未刻意选配, 尚存在一定的容差。用存储式数字示波器测得两个蔡氏电路的同步相图如图 4 所示, 可见尽管存在上述干扰信号和元件容差, 两个混沌电路仍基本同步, 系统有较强的抗干扰能力。



(a) 1.5 V/格



(b) 300 mV/格

图 4 实际蔡氏电路线性反馈同步系统 $x_1 - y_1, x_2 - y_2$ 同步相图

(下转第 637 页)

$$U_p(t) = [- \Gamma \xi(t) e(t) dt + K_0(t)]^T \xi(t) \quad (10)$$

4 仿 真

仿真系统模型为

$$(s^2 + 5s + 6) Y_m(t) = (s + 1) R(t)$$

控制对象为

$$(s^2 + 4s + 7) Y_p(t) = 2(s + 2) U_p(t)$$

这里取 $T(s) = R(s) = (s + 1)^{-1}$, 则有

$$e(t) =$$

$$\frac{s+1}{s^2+5s+6} \times 2\{U_p(t) + \frac{1}{s+1}U_p(t) + \frac{1}{2} \frac{s-1}{s+1}Y_p(t) - \frac{1}{2}R(t)\}$$

选取

$$\xi(t) = [\frac{1}{s+1}U_p(t), Y_p(t), \frac{1}{s+1}Y_p(t), R(t)]^T$$

$$\Phi = [1, 1/2, -1, -1/2]^T$$

得到

$$e(t) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \times 2\{U_p(t) + \Phi \xi(t)\}$$

取 $U_p(t) = K^T(t) \xi(t)$, $\dot{K}(t) = -\Gamma \xi(t) e(t)$, 并

取谐波合成输入信号 $r = \sin 2\pi t + \sin 6\pi t$, 在仿真图

中用曲线①表示; 曲线②表示 $\Gamma_1 = [6, 6.5, 7, 7.5]^T$ 时的系统输出跟踪曲线; 曲线③表示 $\Gamma_2 = [5, 5.5, 6, 6.5]^T$ 时的系统输出跟踪曲线。可以看出曲线②的跟踪效果优于曲线③的跟踪效果。

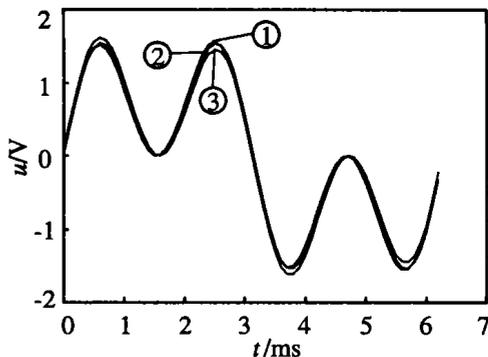


图 1 系统仿真曲线

参考文献(References):

- [1] Monopoli R V. Model reference adaptive control with an augmented error signal[J]. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1977, 23: 474-484.
- [2] Narendra K S, Annaswamy A M. Recent trends in adaptive control theory [J]. *Measuring & Control*, 1984, 23: 441-448.
- [3] 吴士昌, 臧瀛芝. 自适应控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1989. 15-29.

(上接第 610 页)

5 结 语

混沌系统连续变量反馈同步方案确定后, 反馈系数通常是可以调整的, 本文提出的对反馈系数优化设计的方法适用于具有线性或分段线性误差方程的同步方案。仿真和实验表明, 用该方法设计的同步系统具有较强的抗干扰能力。

参考文献(References):

- [1] 方锦清. 非线性系统中混沌控制方法、同步原理及其应用前景(二)[J]. *物理学进展*, 1996, 16(2): 137-202. (Fang Jin-qing. Control and synchronization of chaos in nonlinear systems and prospects for application (2) [J]. *Progress in Physics*, 1996, 16(2): 137-202.)
- [2] Giuseppe Grassi, Saverio Mascolo. Nonlinear observer

design to synchronize hyperchaotic systems via a scalar signal[J]. *IEEE Trans on CAS-I*, 1997, 44(10): 1011-1014.

- [3] 高金锋, 罗先觉, 马西奎, 等. 控制与同步连续时间混沌系统的非线性反馈方法[J]. *物理学报*, 1999, 48(9): 1618-1627. (Gao Jin-feng, Luo Xian-jue, Ma Xi-kui, et al. A non-linear state feedback approach to the control and synchronization of continuous-time chaotic systems [J]. *Acta Physica Sinica*, 1999, 48(9): 1618-1627.)
- [4] 蔡新国. 混沌系统同步及调制技术的研究[D]. 广州: 华南理工大学, 1999.
- [5] Michael Peter Kennedy. Three steps to chaos—Part 1: A Chua's circuit primer[J]. *IEEE Trans on CAS-I*, 1993, 40(10): 657-674.