文章编号: 1001-0920(2002)05-0631-04

模糊 PID 控制器的稳定性分析

赵延东, 于锡纯
(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘　要: 构造出一种 PID 型模糊控制器, 并证明了这种模糊控制器近似于一种变参数的 PID 控制器。以 PID 模型为基础, 基于无源性定理对模糊 PID 控制器的稳定性进行分析, 导出了使模糊 PID 控制器稳定的充分条件, 为设计稳定的模糊 PID 控制器提供了理论指导。

关键词: 模糊控制; PID; 无源性; 稳定性
中图分类号: TP 13　　文献标识码: A

Stability analysis of fuzzy PID controllers

ZHAO Yan-dong, YU Xi-chun
(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: In order to achieve better control performance, a PID type fuzzy control model is proposed. The PID type fuzzy controller is shown to behave like a parameter time-varying PID controller. The stability of fuzzy PID controllers is analyzed by using the passivity theorem. A sufficient condition of a stable fuzzy controller is obtained.

Key words: fuzzy control; PID; passivity; stability

1 引　　言

稳定性是控制系统的重要性质之一。在线性控制系统的理论范畴内, 基于被控对象的精确数学模型的稳定性分析是系统设计中不可缺少的内容; 对于模糊控制系统而言, 由于缺乏合适统一的闭环系统描述, 其稳定性分析及确保系统镇定的模糊控制律设计问题至今尚未解决。

迄今为止, 关于模糊控制系统稳定性的理论成果并不多。Braae 等[1]提出了语言相平面方法, Kiszka[2]利用能量特征函数的概念建立了一种稳定性判定准则, 并给出了某类模糊系统的能量稳定性判据。这些研究一般都需要控制系统的数学模型, 而且并不能为模糊控制规则的设计提供指导。

本文着眼于模糊控制器和 PID 控制器的相似性, 基于无源性定理导出了使模糊控制器稳定的充分条件, 使其为模糊控制器的设计提供指导。

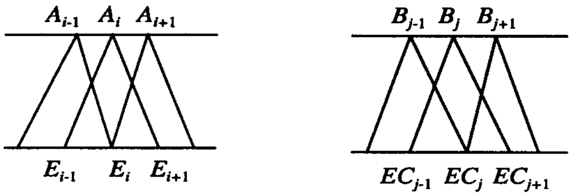
2 模糊控制器

考虑两输入单输出的模糊控制器[3], 输入分别为误差 e 和误差变化 ec, 它们相对应的语言变量为 E 和 EC, 输出为模糊控制 U。模糊控制规则的形式为

R^l: if E is A_i and EC is B_j then U is U_{ij}

其中, $E = e \times K_e$, $EC = ec \times K_{ec}$, R^l 是模糊控制规则, A_i 是误差的模糊集, $i = 1, 2, \cdots, m$; B_j 是误差变化的模糊集, $j = 1, 2, \cdots, n$。对误差和误差变化的模

收稿日期: 2001-05-31; 修回日期: 2001-08-15
作者简介: 赵延东(1974—), 男, 辽宁铁岭人, 硕士生, 从事模糊控制的研究; 于锡纯(1944—), 男, 江苏丹徒人, 副教授, 从事控制理论、电气传动等研究。



(a) A_i 的隶属函数值 (b) B_i 的隶属函数值

图 1 误差和误差变化的隶属函数

糊语言值采用如图 1 所示的三角形隶属函数。U_{ij} 是输出控制的单值模糊集, 使用马丹尼极小运算推理机制和加权平均解模糊方法, 得

$$u = \frac{\sum_{i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n} \min_{ij} u_{ij}}{\sum_{i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n} \min_{ij}} \tag{1}$$

其中, $\min_{ij} = \min(A_i(E), B_j(EC))$, $A_i(E)$ 是 A_i 的隶属函数值, $B_j(EC)$ 是 B_j 的隶属函数值。当 $E \in [E_i, E_{i+1}]$, $EC \in [EC_j, EC_{j+1}]$ 时, 有

$$A_i(E) = \frac{E_{i+1} - E}{E_{i+1} - E_i},\quad A_{i+1}(E) = \frac{E - E_i}{E_{i+1} - E_i}$$

$$A_k(E) = 0,\quad k \neq i, i+1$$

$$B_j(EC) = \frac{EC_{j+1} - EC}{EC_{j+1} - EC_j}$$

$$B_{j+1}(EC) = \frac{EC - EC_j}{EC_{j+1} - EC_j}$$

$$B_k(EC) = 0,\quad k \neq j, j+1$$

在式(1) 中, 只有当 $A_i(E)$ 和 $B_j(EC)$ 都非零时, 相应的项才非零。在上面的隶属函数条件下, 任何时候至多只有 2 个相邻的隶属函数对 E 和 EC 有非零值, 因此式(1) 最多只剩 4 项。也就是说最多有 4 个规则同时作用, 所以式(1) 变为

$$u = \frac{\sum_{l=i,i+1,\ m=j,j+1} \min_{lm} u_{lm}}{\sum_{l=i,i+1,\ m=j,j+1} \min_{lm}} \tag{2}$$

当 $B_{j+1}(EC) \geq A_i(E) \geq A_{i+1}(E) \geq B_j(EC)$ 时, 由式(2) 有

$$\min_{ij} = \min(A_i(E), B_j(EC)) = B_j(EC)$$

$$\min_{i(j+1)} = \min(A_i(E), B_{j+1}(EC)) = A_i(E)$$

$$\min_{(i+1)j} = \min(A_{i+1}(E), B_j(EC)) = B_j(EC)$$

$$\min_{(i+1)(j+1)} = \min(A_{i+1}(E), B_{j+1}(EC)) = A_{i+1}(E)$$

$$u = \frac{B_j(EC)u_{ij} + A_i(E)u_{i(j+1)} +}{B_j(EC) + A_i(E) +} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{B_j(EC)u_{(i+1)j} + A_{i+1}(E)u_{(i+1)(j+1)}}{B_j(EC) + A_{i+1}(E)} =$$

$$\frac{EC_{j+1} - EC}{3EC_{j+1} - 2EC - EC_j}(u_{ij} + u_{(i+1)j}) +$$

$$\frac{EC_{j+1} - EC_j}{3EC_{j+1} - 2EC - EC_j}\frac{E_{i+1} - E}{E_{i+1} - E_i}u_{i(j+1)} +$$

$$\frac{EC_{j+1} - EC_j}{3EC_{j+1} - 2EC - EC_j}\frac{E - E_i}{E_{i+1} - E_i}u_{(i+1)(j+1)} \tag{3}$$

输入、输出关系可表示为

$$u = f(E, EC) \tag{4}$$

对 u 取微分, 得

$$\mathrm{d}u = \left[\frac{\partial f}{\partial E}\right]\mathrm{d}E + \left[\frac{\partial f}{\partial EC}\right]\mathrm{d}EC \tag{5}$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial E}\right]_{\substack{E=E_i \\ EC=EC_j}} = \frac{1}{3}\frac{1}{E_{i+1} - E_i}(u_{(i+1)(j+1)} - u_{(j+1)})$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial EC}\right]_{\substack{E=E_i \\ EC=EC_j}} = \frac{1}{9(EC_{j+1} - EC_j)}(2u_{i(j+1)} - u_{ij} - u_{(i+1)j})$$

则

$$u - u_{ij} = \frac{1}{3}\frac{1}{E_{i+1} - E_i}(u_{(i+1)(j+1)} - u_{i(j+1)})(E - E_i) + \frac{1}{9(EC_{j+1} - EC_j)}(2u_{i(j+1)} - u_{ij} - u_{i(j+1)})(EC - EC_j) \tag{6}$$

其它情况(略), 可表示成

$$u = A + PE + DEC \tag{7}$$

其中

$$A = u_{ij} + \frac{1}{3}\frac{1}{E_{i+1} - E_i}(u_{(i+1)(j+1)} - u_{i(j+1)})(-E_i) + \frac{1}{9(EC_{j+1} - EC_j)} \times (2u_{i(j+1)} - u_{ij} - u_{(i+1)j})(-EC_j)$$

$$P = \frac{1}{3}\frac{1}{E_{i+1} - E_i}(u_{(i+1)(j+1)} - u_{i(j+1)})$$

$$D = \frac{1}{9(EC_{j+1} - EC_j)}(2u_{i(j+1)} - u_{ij} - u_{(i+1)j})$$

A, P, D 是 u_{ij}, E_i, EC_j 的函数。

令 $u_0 = u - A = PE + DEC = PK_e e + DK_{ec}$, 构造如图 2 所示的模糊控制器。其中

$$u_{\mathrm{PID}} = \alpha\int u_0 \mathrm{d}t + \beta u = \alpha\int(PK_e e + DK_{ec} ec)\,\mathrm{d}t + \beta(A + PK_e e + DK_{ec} ec) = A\beta + (\beta K_e P + \alpha K_{ec} D)e + \alpha K_e P\int e\mathrm{d}t + \beta K_{ec} D_{ec} \tag{8}$$

与常规的PID 控制器相比, 可发现模糊-PID 控制器类似于变参数的 PID 控制器, 即

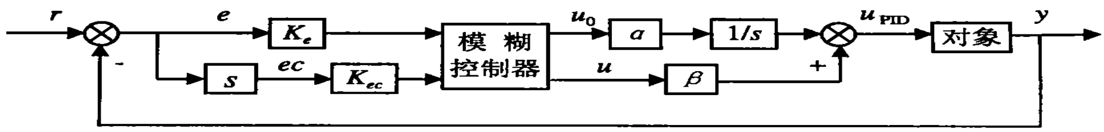


图 2　模糊 -PID 控制器模型

$$\begin{cases} K_P = (\beta K_e P + \alpha K_{ec} D) \\ K_I = \alpha K_e P, \quad K_D = \beta K_{ec} D \end{cases} \tag{9}$$

3　无源性定理

令 F 为 R^n 到 R 的函数空间, 在 F 中定义一个标量乘积[4]: $\langle x, y\rangle = \int_0^\infty x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$, 定义内积空间 $H = \{x \in F \mid \|x\|^2 = \langle x, x\rangle < \infty\}$, 记 x 的某一类函数为 F, $\Gamma \in R^+$, 定义扩展内积空间 $He = \{x \in F \mid \forall T \in \Gamma, \|X_T\|^2 = \langle X_T, X_T\rangle = \langle X, X\rangle_T < \infty\}$。

对于任一 $T \in \Gamma$, 有

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & t \le T, \\ 0, & t > T, \end{cases} \quad t, T \in \Gamma$$

设有算子 $G: He \to He$, 若存在常数 β 使得 $\langle Gx, x\rangle \ge \beta$, $\forall x \in He$, $\forall T \in \Gamma$, 则称 G 是无源的; 设有算子 $G: He \to He$, 若存在常数 $\delta > 0$ 和 β 使得 $\langle Gx, x\rangle_T \ge \delta \|x\|_T + \beta$, $\forall x \in He$, $\forall t \in \Gamma$, 则称 G 是严格无源的。式中 δ 为以输入 x 表示的无源度。

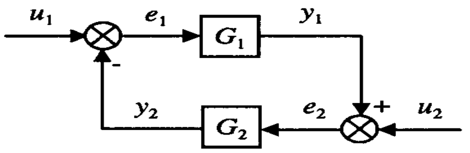


图 3　反馈控制系统

定理 1　对于图 3 所示的反馈控制系统, 其方程为

$$\begin{cases} e_1 = u_1 - G_2 e_2 \\ e_2 = u_2 + G_1 e_1 \end{cases} \tag{10}$$

其中 $G_1, G_2: He \to He$。假设对于 H 中的 u_1 和 u_2, 将产生在 He 中的解 e_1 和 e_2, 若存在常数 $\gamma_1, \beta_1, \delta_1, \beta_1'$, ϵ_2, β_2', 使得

$$\begin{cases} \|G_1 x\|_T \le \gamma_1 \|x\|_T + \beta_1 \\ \langle x, G_1 x\rangle_T \ge \delta_1 \|x\|_T^2 + \beta_1' \\ \langle G_2 x, x\rangle_T \ge \epsilon_2 \|G_2 x\|_T^2 + \beta_2' \\ \forall x \in He, \quad \forall T \in \Gamma \end{cases} \tag{11}$$

此时若 $\delta_1 + \epsilon_2 > 0$, 则 $u_1, u_2 \in H \Rightarrow e_1, e_2, G_1 e_1, G_2 e_2 \in H$; 若 $\epsilon_2 = 0$, 则 G_1 必须是严格无源的且增益有界, 同时 G_2 是无源的。只有这样才能使定理的结论成立。

4　模糊控制器的稳定性分析

受文献[5] 的启发, 我们考虑图 3 所示的控制系统。根据定理 1, 令 $u_2 = A\beta$, 将式(8) 中与 P, I, D 有关的部分作为 G_1, 控制对象作为 G_2, 如果 G_1 严格无源且增益有界, G_2 无源, 则系统是 BIBO 稳定的。在 G_1 和 G_2 之间乘以 $\frac{s}{(s+a)(s+b)}$ 和 $\frac{(s+a)(s+b)}{s}$, $a > 0, b > 0$, 则有

$$G_1' = G_1 \frac{s}{(s+a)(s+b)}$$

G_1' 是稳定的, 即增益有界。这样, 只要 G_1' 严格无源, 以及

$$G_2' = \frac{(s+a)(s+b)}{s} G_2$$

$$u_2' = \frac{s}{(s+a)(s+b)} u_2$$

分别无源和有界, 则系统是 BIBO 稳定的。对于控制对象

$$G_2 = \frac{1}{(s+c_1)(s+c_2)}$$

要使 G_1' 严格无源, 必须有

$$K_P > \frac{K_I + K_D ab}{a+b}, \quad K_D > 0, \quad K_I > 0 \tag{12}$$

要使 G_2' 无源, 必须有

$$ab(c_1 + c_2) \le c_1 c_2 (a+b) \tag{13}$$

因为 $\frac{s}{(s+a)(s+b)}$ 稳定, 所以要使 u_2' 有界, 必须有 $u_2 = A\beta$ 有界, 即

$$\|A\| < \infty \tag{14}$$

将式(9) 代入式(12), 并考虑式(13) 和(14), 便可用来设计模糊控制表, 以确保系统 BIBO 稳定。

5　结　　论

本文证明了模糊控制器近似于变参数的 PID 控制器。通过使用无源性定理, 对线性化的模糊控制器导出了稳定化条件。该稳定化条件具有简单、实用的特点, 可用来协助设计模糊控制表, 并对设计稳定

的模糊控制器提供理论依据。

参考文献(References):

[1] Braae M, Rutherford D A. Theoretical and linguistics aspects of the fuzzy logic controller[J]. *Automatic*, 1979, 15(1): 15-30.

[2] Kiszka J B, Guptal M M, Nikiforuk P N. Energetistic stability of fuzzy dynamic systems[J]. *IEEE Trans on Systems, Man & Cybernetics*, 1985, 15(6): 783-792.

[3] 诸静. 模糊控制原理与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 1995. 194-220.

[4] 冯纯伯, 费树岷. 非线性控制系统分析与设计[M]. 北京: 电子工业出版社, 1998. 72-79.

[5] Jian-Xin Xu, Chang-Chieh Hang, Chen Liu. Parallel structure and tuning of a fuzzy PID controller[J]. *Automatic*, 2000, 36(5): 673-684.

(上接第 582 页)

参考文献(References):

[1] Holand J. *Adaptation in Nature and Artificial Systems* [M]. Michigan: The University of Michigan Press, 1975.

[2] Davis L. *The Handbook of Genetic Algorithms*[M]. New York: Van Nostrand Reingold, 1991.

[3] Bersini H, Renders B. Hybridizing genetic algorithms with hill climbing methods for global optimization: Two possible ways[A]. 1994 *IEEE Int Symposium Evolutionary Computation*[C]. Orlando, 1994. 312-317.

[4] Corana A, Marchesi M, Martini C, et al. Minimizing multimodal functions of continuous variables with the simulated annealing algorithm[J]. *ACM Trans on Mathematical Software*, 1987, 13(3): 262-280.

[5] Michalewicz Z. *Genetic Algorithms+ Data Structures= Evolution Programs*[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.

[6] Houck C, Joines J, Kay M. The effective use of local improvement procedures in conjunction with genetic algorithms[R]. North Carolina: North Carolina State University, 1995.

[7] E G Johnson, M A G Abushagur. Micro-genetic algorithm optimization methods applied to dielectric gratings [J]. *J of the Optical Society of America*, 1995, 12(5): 1152-1160.

(上接第 628 页)

[6] Z Michalewicz, M Schoenauer. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems[J]. *Evolutionary Computation*, 1996, 4(1): 1-32.

[7] M Sakava, K Yauchi. Coevolutionary genetic algorithms for nonconvex nonlinear programming problems: Revised GENOCOP Ⅲ[J]. *Cybernetic and Systems*, 1998, 29(8): 885-899.

[8] D Whitley. The GENITOR algorithm and selective pressure: Why rank-based allocation of reproductive trials is best[A]. *Proc 3rd ICGA*[C]. Morgan Kauffman, 1989.

[9] A Wright. Genetic algorithms for real parameter optimization[A]. *Foundations of Genetic Algorithms*[C]. Morgan Kauffman, 1991. 205-218.

[10] T Kuo, S-Y Hwang. Using disruptive selection to maintain diversity in genetic algorithms[J]. *Applied Intelligence*, 1997, 7(3): 257-267.

(上接第 630 页)

参考文献(References):

[1] 吴敏, 桂卫华. 现代鲁棒控制[M]. 长沙: 中南工业大学出版社, 1998.

[2] 黄小原, 钟麦英. 辽宁省宏观经济模型及其H_∞控制[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(5): 781-783.
(Huang Xiao-yuan, Zhong Mai-ying. Macroeconomic model of Liaoning province and its H_∞ control[J]. *The Theory and Application of Control*, 2000, 17(5): 781-783.)

[3] 肖冬荣. 系统控制论[M]. 武汉: 武汉工业大学出版社, 1995.

[4] Cararani P. H_∞ criteria for macroeconomic policy evaluation[J]. *Economic Dynamics and Control*, 1995, 19(5-7): 961-984.

[5] 张金水. 经济控制论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.

[6] 薛定宇. 反馈控制系统设计与分析——MATLAB 语言应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.