

文章编号: 1001-0920(2002)05-0532-04

基于模糊模型的不确定非线性系统鲁棒 D 镇定

刘 飞^{1,2}, 苏宏业^{2,3}, 褚 健^{2,3}

(1. 江南大学 通信与控制工程学院, 江苏 无锡 214036; 2 浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 浙江 杭州 310027; 3 浙江大学 先进控制研究所, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 针对 T-S 模糊模型描述的不确定非线性系统, 应用二次 D -稳定概念, 对给定复平面上的某一 D 域提出模糊系统全局鲁棒 D -稳定的充分条件, 基于并行分布补偿 (PDC) 技术, 各局部状态反馈镇定控制器设计归结于解一组耦合线性矩阵不等式 (LM I), 全局控制器通过隶属度函数由各局部控制器混合而成, 并以此保证整个系统的鲁棒 D -稳定性. 最后用质量弹簧阻尼系统给出了仿真示例.

关键词: D -稳定性; T-S 模糊模型; 鲁棒控制; 不确定非线性系统

中图分类号: TP 13

文献标识码: A

Robust D -stabilization for uncertain nonlinear systems based on fuzzy models

L I U F e i^{1,2}, S U H o n g - y e^{2,3}, C H U J i a n^{2,3}

(1. School of Communication and Control Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214036, China;
2 National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;
3 Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The robust D -stabilization problem is discussed for a class of Takagi-Sugeno fuzzy models with uncertainties. The notion of quadratic D -stability is generalized to the uncertain nonlinear systems which reduce to a set of Takagi-Sugeno fuzzy models. The D -subregion of the complex plane is defined based on LM I representation and the robust D -stability condition is established in terms of the feasibility of a class of LM Is. Using parallel distributed compensation (PDC), local robust D -stabilizable controllers via state feedback are derived by the numerical solutions of a set of coupled LM Is and the global controller is a fuzzy blending of the local linear controllers. An example of mass spring damper is given to illustrate the results.

Key words: D -stability; Takagi-Sugeno fuzzy model; robust control; uncertain nonlinear system

1 引 言

众多的研究和应用表明, 模糊控制对于复杂的非线性系统是一种简单而有效的工具. 从控制系统

分析和设计的角度看, 一般的模糊技术尚缺乏系统的分析和设计理论. T-S 模型^[1]既包含近似推理规则, 又包含局部解析模型, 在此基础上可进行全局稳定性分析和控制器设计^[2]. 近年来, 并行分布补偿

收稿日期: 2001-06-25; 修回日期: 2001-09-24

基金项目: 国家杰出青年基金项目 (60025308); 中国高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金项目

作者简介: 刘飞 (1965—), 男, 安徽宣城人, 副教授, 博士, 从事鲁棒控制、模糊与神经网络系统等研究; 苏宏业 (1969—), 男, 江苏武进人, 教授, 博士, 从事时滞系统控制、非线性控制等研究.

(PDC) 技术结合线性矩阵不等式(LMI), 使得模糊控制器设计更加系统化和易于求解^[3]。基于 PDC 技术的模糊系统分析和设计已从稳定问题扩展到其它控制问题, 但涉及系统暂态响应和极点配置的文献却很少。

近期, 文献[4] 尝试将文献[5] 中的线性系统的 D- 稳定控制推广到模糊系统。本文进一步讨论具有不确定性的模糊系统的鲁棒 D- 稳定问题, 应用二次 D- 稳定概念^[6], 提出模糊系统全局鲁棒 D- 稳定的充分条件。当一定闭环极点的配置区域 D 给定后, 基于 PDC 将各局部线性镇定控制器的设计转化为求解一组 LMI, 进而可用内点算法或在 Matlab 中直接求解, 最后由各局部控制器经隶属度函数混合构成全局非线性控制器。

2 模糊模型及鲁棒 D- 稳定条件

考虑模糊 T-S 模型描述的系统, 其第 i 个动态子系统用 If-Then 规则表示如下

$$\begin{aligned} &\text{Plant rule } i: i = 1, 2, \dots, r \\ &\text{If } x_1(t) \text{ is } \mu_{i1} \dots \text{ and } x_n(t) \text{ is } \mu_{in} \\ &\text{Then } \dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + \\ &\quad (B_i + \Delta B_i(t))u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 是状态向量, $u(t) \in R^m$ 是控制输入向量, μ_{ij} 表示对应各状态分量 $x_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 的模糊集合, r 是模糊规则数目, A_i 和 B_i 是具有一定维数的常数矩阵, $\Delta A_i(t)$ 和 $\Delta B_i(t)$ 为时变参数不确定性, 且满足范数有界条件

$$\begin{aligned} &[\Delta A_i(t) \quad \Delta B_i(t)] = H_i F(t) [E_{A_i} \quad E_{B_i}] \\ &F^T(t)F(t) = I, \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2)$$

其中, H_i, E_{A_i} 和 E_{B_i} 是适当维数的已知实矩阵, $F(t)$ 是未知有界的时变矩阵。

上述 T-S 模型中第 i 条规则的隶属度函数 μ_i 是各状态分量的隶属度函数 μ_{ij} 的乘积。将隶属度函数 μ_i 标称化, 得

$$h_i(x(t)) = \frac{\mu_i(x(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))}$$

为简化表述, 后文将略去变量中的时间 t 。一般假设

$$\mu_i(x) > 0, \forall t, \text{ 故 } \sum_{i=1}^r \mu_i(x) > 0, \text{ 则显然有}$$

$$h_i(x) > 0, \quad \forall t, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(x) = 1 \quad (4)$$

以重心法逆模糊化, 得如下 T-S 模型

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x) [(A_i + \Delta A_i)x + (B_i + \Delta B_i)u] \quad (5)$$

将复平面 C 上任一 D 域用 LMI 形式表示为^[5]

$$D = \{z \in C: L + zM + \bar{z}M^T < 0\} \quad (6)$$

式中 L 和 M 是实矩阵且 $L^T = L$, 相应的 $f_D(z) = L + zM + \bar{z}M^T$ 称为 D 域的特征函数。一般情况下, D 域位于左半复平面 C^- (即 $z \in C^-$), 此时系统称为 D- 稳定。对形如 $\dot{x} = Ax$ 的线性系统有如下引理:

引理 1^[5] 矩阵 A 为 D- 稳定, 当且仅当存在一个对称矩阵 $P > 0$, 使得

$$\begin{aligned} &\Lambda_D(A, P) = \\ &L \otimes P + M \otimes (PA) + M^T \otimes (A^T P) < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式中符号 \otimes 表示 Kronecker 积。

现在讨论模糊系统(5)的鲁棒 D- 稳定性问题, 考虑 $u = 0$, 令

$$\hat{A}(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i + \Delta A_i)$$

定义 1 系统(5)称为鲁棒 D- 稳定, 如果对于所有时间均有 $\hat{A}(x)$ 的特征值位于 D 域(6)内。

定义 2 系统(5)称为二次 D- 稳定, 如果对于所有时间存在一个对称矩阵 $P > 0$, 满足

$$\begin{aligned} &\Lambda_D(\hat{A}(x), P) = L \otimes P + M \otimes (P\hat{A}(x)) + \\ &M^T \otimes (\hat{A}^T(x)P) < 0 \end{aligned} \quad (8)$$

由引理 1, 显然二次 D- 稳定意味着鲁棒 D- 稳定^[6]。由此, 模糊系统鲁棒 D- 稳定条件可由下面定理给出:

定理 1 系统(5)鲁棒 D- 稳定, 如果存在正定对称矩阵 $Q \in R^{n \times n}$ 和实数 $\epsilon > 0$, 满足 $I - \epsilon H_i H_i^T > 0$, 并使

$$\begin{bmatrix} \Lambda_D(A_i, Q) & M \otimes Q & I \otimes E_{A_i} \\ M^T \otimes Q & -I & 0 \\ I \otimes E_{A_i} & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (9)$$

证明 设存在正定对称矩阵 P, 应用 Kronecker 积的性质^[6], 并考虑到式(4), 有

$$\begin{aligned} &\Lambda_D(\hat{A}(x), P) = \\ &\sum_{i=1}^r h_i(x) \{L \otimes P + M \otimes (P(A_i + \\ &\Delta A_i)) + M^T \otimes ((A_i + \Delta A_i)^T P)\} = \\ &\sum_{i=1}^r h_i(x) \Pi_i \end{aligned}$$

由式(3), 则 $\Pi_i < 0, i = 1, 2, \dots, r$, 可保证式(8)成

立, 从而系统鲁棒 D - 稳定. 将式(2) 代人 Π_i , 并应用 Kronecker 积的性质, 得

$$\begin{aligned} \Pi_i = & L \otimes P + M \otimes (PA_i) + M^T \otimes (A_i^T P) + \\ & (M \otimes P)(I \otimes (H_i F E_{A_i})) + \\ & (I \otimes (H_i F E_{A_i}))^T (M \otimes P)^T \end{aligned} \quad (10)$$

因为对适当维数的矩阵 X, Y 和任意实数 $\delta > 0$, 存在如下矩阵不等式^[7]

$$X^T Y + Y^T X - \delta X^T X + \delta^{-1} Y^T Y \quad (11)$$

将式(11) 应用于(10), 可得

$$\begin{aligned} \Pi_i < & L \otimes P + M \otimes (PA_i) + M^T \otimes (A_i^T P) + \\ & \delta(M \otimes P)(M^T \otimes P) + \\ & \delta^{-1} I \otimes (H_i F E_{A_i})^T (H_i F E_{A_i}) \end{aligned} \quad (12)$$

如果存在 $\epsilon > 0$ 满足

$$I - \epsilon H H^T > 0 \quad (13)$$

则对于所有 $F^T F - I$, 有^[8]

$$(H F E)^T (H F E) - \epsilon^{-1} E^T E \quad (14)$$

假设矩阵 $X > Y$, 针对 Kronecker 积, 容易证明

$$I \otimes X > I \otimes Y \quad (15)$$

现对式(12) 应用(14) 和(15), 并取 $Q = \delta P$, 由 Schur 补即得式(9).

3 控制器设计

采用并行分布补偿方法设计控制器, 相应于模糊 T-S 模型(1), 基于状态反馈的控制器规则为

$$\begin{aligned} \text{Control rule } i: & i = 1, 2, \dots, r \\ \text{If } x_1 \text{ is } \mu_{i1} \dots \text{ and } x_n \text{ is } \mu_{in} \\ \text{Then } u = & K_i x \end{aligned} \quad (16)$$

相应地, 全局模糊控制器为

$$u = \sum_{i=1}^r h_i(x) K_i x \quad (17)$$

显然, 该控制器为本质非线性控制器. 将其应用于系统(5), 可得如下闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \sum_{i=1}^r h_i(x) \left\{ (A_i + H_i F E_{A_i}) x + \right. \\ & \left. (B_i + H_i F E_{B_i}) \sum_{j=1}^r h_j(x) K_j x \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

模糊系统鲁棒 D - 镇定问题, 即如何设计局部状态反馈增益 K_j 使闭环系统(18) 鲁棒 D - 稳定. 类似于第 2 节鲁棒 D - 稳定性分析, 有如下主要结果:

定理 2 系统(1) 可鲁棒 D - 镇定, 如果存在正定对称矩阵 $X \in R^{n \times n}$, 一组矩阵 $Y_i \in R^{m \times n}$ 以及标量实数 $\epsilon > 0$, 满足 $I - \epsilon H H^T > 0, i = 1, 2, \dots, r$, 使得以下 LM I 组有解

$$(19)$$

$$\Psi_{ij} + \Psi_{ji} < 0, \quad i < j \quad r \quad (20)$$

其中

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \Lambda_0(A_i, X, B_i, Y_j) & * & * \\ M^T \otimes I & -I & * \\ I \otimes (E_{A_i} X + E_{B_i} Y_j) & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0(A_i, X, B_i, Y_j) = & L \otimes X + M \otimes (A_i X + B_i Y_j) + \\ & M^T \otimes (A_i X + B_i Y_j)^T \end{aligned}$$

进而, 基于状态反馈的鲁棒 D - 镇定控制器(17) 中反馈增益为 $K_i = Y_i X^{-1}$.

证明 由条件(4), 闭环系统(18) 可写成

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) \{ A_i + B_i K_j + \\ & H_i F (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) \} x \end{aligned}$$

由定义 2, 则

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) \Gamma_{ij} < 0 \quad (21)$$

成立时系统鲁棒 D - 稳定. 其中

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} = & L \otimes P + M \otimes \{ P (A_i + B_i K_j + \\ & H_i F (E_{A_i} + E_{B_i} K_j)) \} + M^T \otimes \{ (A_i + \\ & B_i K_j + H_i F (E_{A_i} + E_{B_i} K_j))^T P \} \end{aligned}$$

考虑到式(3), 则只要

$$\Gamma_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (22)$$

$$\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \quad i < j \quad r \quad (23)$$

成立, 就有式(21) 成立. 进一步, 类似于定理 1 的证明, 如果存在满足 $I - \epsilon H H^T > 0$ 的实数 $\epsilon > 0$, 使

$$\Xi_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (24)$$

$$\Xi_{ij} + \Xi_{ji} < 0, \quad i < j \quad r \quad (25)$$

成立, 则可保证式(22) 和(23) 成立. 其中

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} \Lambda_0(A_i + B_i K_j, Q) & * & * \\ M^T \otimes Q & -I & * \\ I \otimes (E_{A_i} + E_{B_i} K_j) & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix}$$

对式(24) 和(25) 左乘右乘 $\text{diag}\{I \otimes Q^{-1}, I, I\}$, 并作变量代换 $Q^{-1} = X, K Q^{-1} = Y_j$, 则定理得证.

注 1 当 D 域为左半平面垂直带 $\text{Re}(z) < -\alpha$ 时, 有 $f_{D_1}(z) = z + \bar{z} + 2\alpha < 0$, 即定理 2 中 $L = 2\alpha, M = 1$.

注 2 当 D 域是中心为 $(-q, 0)$, 半径为 d 的圆盘时, 有

$$f_{D_2}(z) = \begin{bmatrix} -d & q+z \\ q+z & -d \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } L = \begin{bmatrix} -d & q \\ q & -d \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注 3 当 D 域是顶点在原点内, 角为 2θ 的扇形区域时, 有

$$f_{D_3}(z) = \begin{bmatrix} \sin \theta(z + \bar{z}) & \cos \theta(z - \bar{z}) \\ \cos \theta(-z + \bar{z}) & \sin \theta(z + \bar{z}) \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } L = 0, M = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

更复杂的 D 域可由若干简单的 D 域组合, 例如 $D = \{z \in \mathbb{C} : f_{D_1}(z), f_{D_2}(z), f_{D_3}(z) < 0\}$ 是注 1, 2, 3 的交集. 由于各鲁棒 D -稳定控制器设计归结于解一组 LM I, 于是基于交集的控制器设计只要联立各 LM I 组即可. 需要注意: 系统极点配置在不同的 D 域将获得不同的暂态响应, 例如注 1 确保系统响应的最小衰减率为 α 但一般线性系统中特定 D 域与暂态响应的某些定量关系, 在时变不确定模糊系统中尚有待研究.

4 仿真示例

考虑如下质量弹簧阻尼系统模型^[3]

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + c(t)y(t) = (1 + 0.13y^3(t))u(t)$$

其中不确定项 $c(t) \in [0.5, 1.81]$, 假设 $y(t) \in [-1.5, 1.5], \dot{y}(t) \in [-1.5, 1.5]$. 要求设计控制器使系统保持平衡.

上述非线性系统模型用两规则模糊 T-S 模型

(1) 描述, 其中

$$x(t) = [x_1 \ x_2]^T = [y(t) \ \dot{y}(t)]^T$$

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.155 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = H_2 = [1 \ 0]^T, \quad E_{B_1} = E_{B_2} = 0$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.4387 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.5613 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{A_1} = [0 \ -0.655], \quad E_{A_2} = [0 \ 0.655]$$

规则 1 和规则 2 的隶属度函数分别为

$$\mu_1(y(t)) = 0.5 + y^3(t)/6.75$$

$$\mu_2(y(t)) = 0.5 - y^3(t)/6.75$$

考虑 D 域为垂直带 $\text{Re}(z) < -\alpha$ 时, 设 $\alpha = 0$, 由定理 2 得

$$K_1 = [-0.2177 \ -1.2575]$$

$$K_2 = [-0.0789 \ -2.1150]$$

假设系统不确定性为

$$c(t) = 1.155 + 0.655 \sin(6.28t)$$

图 1 给出了在初始条件 $x_2(0) = -1.0, x_1(0)$

$= -0.8$ 时闭环系统的响应曲线, 并对 $\alpha = 0.3$ 时的情况进行比较. 进一步, 考虑 D 域为左半平面圆盘时, 在初始条件 $x_2(0) = -1.46, x_1(0) = -0.8$ 两种情况下的响应曲线如图 2 所示; 当 D 域为顶点在原点, 内角为 2θ 的扇形时, 在初始条件 $x_2(0) = 0.8, x_1(0) = 0$ 两种情况下的响应曲线如图 3 所示.

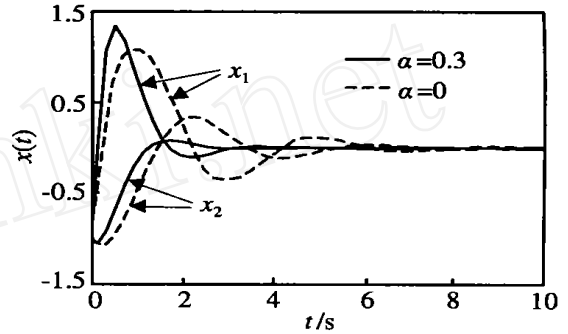


图 1 D 域为左半平面(垂直带)

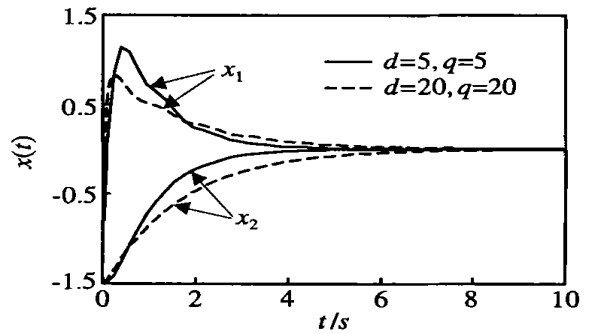


图 2 D 域为左半平面圆盘

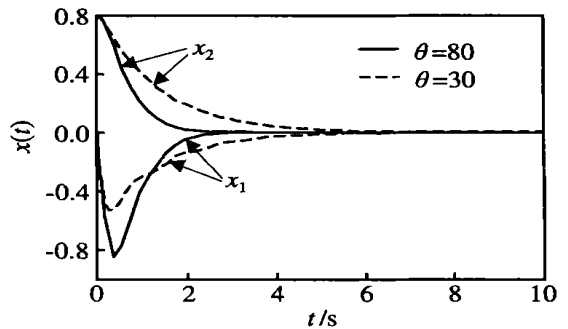


图 3 D 域为左半平面扇形

5 结 论

本文提出了模糊系统鲁棒 D -稳定的充分条件, 进而给出了基于 PDC 和 LM I 的状态反馈控制器设计方法, 以保证系统全局鲁棒 D -稳定性. 该控制器的实现依赖于隶属度函数, 因而是本质非线性的. 最后给出了质量弹簧阻尼系统的仿真示例.

(下转第 540 页)

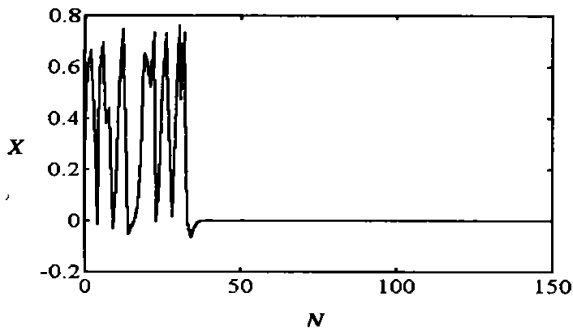
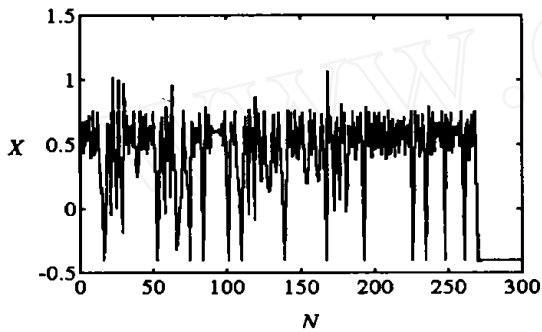
(a) $X_d = 0$ 时仿真曲线(b) $X_d = -0.4$ 时仿真曲线

图4 仿真结果2

$[-0.28 \quad -0.25]^T$, 仿真结果如图4(b)所示。

由图2~图4可见, OGY控制法需迭代的次数大于500次, 而本文提出的结合混沌预测的改进的

OGY控制法, 则在迭代次数远小于500时便可将系统稳定到不同的控制目标点。

6 结 论

本文提出的改进的OGY方法, 可将一个混沌系统稳定到除不动点以外的点, 可实现不同的控制目标, 有利于在混沌状态实现对系统的控制。另外, 通过混沌预测, 可以加快混沌的控制过程。仿真结果表明, 该控制方法有效地加快了混沌系统的控制速度。

参考文献(References):

- [1] Ott, E, Grebogi, C, Yorke, J A. Controlling chaos [J]. *Phys Rev Lett*, 1990, 64(11): 1196-1199.
- [2] 梁志珊, 王丽敏, 付大鹏. 应用混沌理论的电力系统短期负荷预测[J]. *控制与决策*, 1998, 13(1): 87-90.
(Liang Zhi-shan, Wang Li-min, Fu Da-peng. Short term load forecasting using chaos theory [J]. *Control and Decision*, 1998, 13(1): 87-90.)
- [3] 郭刚, 史忠科, 戴冠中. 基于混沌理论进行股票市场的多步预测[J]. *信息与控制*, 2000, 29(2): 177-181.
(Guo Gang, Shi Zhong-ke, Dai Guan-zhong. Stock market multi-step forecast using chaos theory [J]. *Information and Control*, 2000, 29(2): 177-181.)

(上接第535页)

参考文献(References):

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116-132.
- [2] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45(2): 135-156.
- [3] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H control theory and linear matrix inequalities [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 1-13.
- [4] Joh J, Langari R, Jeung E T, et al. A new design method for continuous Takagi+Sugeno fuzzy controller with pole placement constraints: An LM I approach [A]. *Proc IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics* [C]. Orlando, 1997. 2969-2974.
- [5] Chilali M, Gahinet P. H design with pole placement constraints: An LM I approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358-367.
- [6] Chilali M, Gahinet P, Apkarian P. Robust pole placement in LM I regions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(12): 2257-2270.
- [7] Zhou K, Khargonekar P P. Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty [J]. *Systems and Control Letters*, 1988, 10(1): 17-20.
- [8] Wang Y, Xie L, de Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems [J]. *Systems and Control Letters*, 1992, 19(1): 139-149.