文章编号: 1001-0920(2002)06-923-05

基于 LMI 的 T-S 模糊系统的 H_∞ 控制

刘晓东, 张庆灵, 王 岩
(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 研究了 T-S 模糊系统基于状态反馈的 H_∞ 控制问题。首先给出了使得 T-S 模糊系统二次可稳的一个新的充分条件;然后给出了相应的 H_∞ 控制存在的一个新的充分条件,其条件用一个负定矩阵的形式给出,不但简洁而且包含了子系统之间的相互作用。最后应用线性矩阵不等式(LMI)给出了相应的镇定控制和 H_∞ 控制器的设计方法。

关键词: H_∞ 控制; T-S 模糊系统; 二次稳定; 线性矩阵不等式(LMI); 状态反馈
中图分类号: TP 13 文献标识码: A

H_∞-control for T-S fuzzy systems based on the LMI

LIU Xiao-dong, *ZHANG Qing-ling*, *WANG Yan*
(College of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: H_∞-control based on the state feedback for T-S fuzzy systems is studied. A new sufficient condition which guarantees the existence of the state feedback stabilization for the T-S fuzzy systems is proposed. Then a new sufficient condition in the form of a negative definite matrix which guarantees the existence of the state feedback H_∞ control for the T-S fuzzy systems is proposed. The conditions not only are simple but also consider the interactions among the subsystems. Finally based on the LMIs, the controller designing methods for the stabilization and the H_∞-controller for the T-S fuzzy systems are given.

Key words: H_∞-control; T-S fuzzy system; quadratic stability; linear matrix inequalities; state feedback

1 引 言

T-S (Takagi-Sugeno) 模糊系统模型[1] 是通过一些模糊规则给出一个实际的非线性系统的局部线性表示。Cao 等在文献[2～4]中证明了 T-S 模糊系统可以任意精度逼近 R^n 的致密集 U 上的连续实函数, 并应用线性不确定系统理论, 把模糊控制系统的稳定性分析转化为其线性时变极值子系统的稳定性分析。由于这些出色的研究成果,模糊控制已被应用于许多工业领域,特别是基于模型的模糊控制已成为处理非线性控制的一个有效的方法。近年来, 许多学者注意到, 以往 T-S 模糊系统与稳定性相关的研究中, 更多地注意局部子系统的稳定而较少考虑子系统之间的相互作用[5,6], 所以其条件过于保守。文献[7,8]用分析的方法考虑了子系统间的相互作用,放宽了以往的稳定条件。

收稿日期: 2001-08-06; 修回日期: 2001-10-15
基金项目: 国家自然科学基金项目(60174014); 交通部重点科技项目(9506223); 教育部骨干教师基金项目
作者简介: 刘晓东(1963—), 男, 辽宁沈阳人, 教授, 博士生, 从事模糊系统、模糊控制理论及应用的研究; 张庆灵(1956—), 男, 辽宁营口人, 教授, 博士生导师, 从事广义大系统的鲁棒控制、广义系统的 H_2/H_∞ 控制等研究。

本文用与文献[7, 8]不同的方法,给出了简洁且更具整体性的系统可稳和 H_∞ 控制存在的条件,并且把该条件等价地转化为线性矩阵不等式,可通过解相应的线性矩阵不等式,解决相应的T-S 模糊系统的镇定和 H_∞ 控制器设计问题,为研究类似问题提供了一种新方法。

2 T-S 模糊系统

考虑如下的T-S 模糊系统

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\xi)(A_i x + B_{1i} w + B_{2i} u)$$

$$z = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\xi)(C_i x + D_i u) \tag{1}$$

式中,$x \in R^n$ 为状态向量,$z \in R^q$ 为输出向量,$w \in R^l$ 为扰动向量,$u \in R^m$ 为输入向量,$A_i \in R^{n\times n}$,$B_{1i} \in R^{n\times l}$,$B_{2i} \in R^{n\times m}$,$C_i \in R^{q\times n}$,$D_i \in R^{q\times m}$,r 为模糊规则的个数。

$$\lambda_i(\xi(t)) = \frac{\beta_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^{r} \beta_j(\xi(t))}$$

$$\beta_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(\xi(t))$$

$M_{ij}(\cdot)$ 为隶属函数,总假设 $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$。

定义1 对于式(1),当 $w(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$时,若存在 $a > 0$ 及正定对称矩阵 X,使得

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha x^{\mathrm{T}}(t)x(t)$$

其中 $V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Xx(t)$,则称式(1) 是二次稳定的。

引理1 若存在正定对称矩阵 X 使得

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}\Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1r}^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}\Lambda_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{r1}^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}\Lambda_{r1} & \cdots & \Lambda_{rr}^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}\Lambda_{rr} \end{bmatrix} < -\alpha I$$

$$\alpha > 0 \tag{2}$$

其中,$\Lambda_{ii} = A_i + B_{2i}F_i$,$2\Lambda_{ij} = A_i + B_{2i}F_j + A_j + B_{2j}F_i$,则状态反馈 $u(t) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(\xi(t))F_j x(t)$ 使模糊系统(1) 当 $w(t) \equiv 0$时,所产生的闭环系统(3) 是二次稳定的。

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \lambda_i(\xi(t))\lambda_j(\xi(t)) \times ((A_i + B_{2i}F_j)x(t)) \tag{3}$$

证明 设 $G_{ii} = A_i + B_{2i}F_i$,$G_{ij} = A_i + B_{2i}F_j$。构造Lyapunov 函数

$$V(t) = x^{\mathrm{T}}(t)Xx(t)$$

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 x^{\mathrm{T}}(G_{ii}^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}G_{ii})x + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j}^{r} \lambda_i\lambda_j x^{\mathrm{T}}\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})^{\mathrm{T}}}{2}X + X^{\mathrm{T}}\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)x =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \vdots \\ \lambda_r x \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}\Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1r}^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}\Lambda_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{r1}^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}\Lambda_{r1} & \cdots & \Lambda_{rr}^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}\Lambda_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \vdots \\ \lambda_r x \end{bmatrix} < -\alpha \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \vdots \\ \lambda_r x \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \vdots \\ \lambda_r x \end{bmatrix} \leq -\alpha x^{\mathrm{T}}x \qquad \square$$

由于式(2) 是 r 个子系统的系数矩阵构成的,所以引理1 更多地考虑了子系统的相互作用,与文献[9] 的条件相比较取消了 $(A_i + B_{2i}F_j)^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}(A_i + B_{2i}F_j) < 0(i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,r)$ 的限制。

定理1 若存在矩阵 $M_j(i = 1,2,\cdots r)$ 及共同的正定对称矩阵 Y,使得

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix} < 0$$

$$Q_{ii} = YA_i^{\mathrm{T}} + A_iY + M_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} + B_iM_i$$

$$2Q_{ij} = Y(A_i^{\mathrm{T}} + A_j^{\mathrm{T}}) + (A_i + A_j)Y + M_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} + B_iM_j + M_i^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}} + B_jM_i$$

$$i,j = 1,2,\cdots,r$$

则 $u(t) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j F_j x$ 使式(1) 当 $w(t) \equiv 0$时,所产生的闭环系统(3) 是二次稳定的,其中 $F_i = M_iY^{-1}$,$i = 1,2,\cdots,r$。

证明 由 Q_{ij} 的定义,显然有 $Q_{ji} = Q_{ij}^{\mathrm{T}}$ 及 Q 为对称阵。因为 $Q < 0$,所以

$$\begin{bmatrix} (Y^{-1})^{\mathrm{T}} & & \\ & \ddots & \\ & & (Y^{-1})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & Y^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (Y^{-1})^{\mathrm{T}}Q_{11}Y^{-1} & \cdots & (Y^{-1})^{\mathrm{T}}Q_{1r}Y^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (Y^{-1})^{\mathrm{T}}Q_{r1}Y^{-1} & \cdots & (Y^{-1})^{\mathrm{T}}Q_{rr}Y^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

设 $F_i = M_iY^{-1}(i = 1,2,\cdots,r)$,代入式(4),令 $X = Y^{-1}$,则 X,F_i,A_i,$B_i(i = 1,2,\cdots,r)$ 满足引理1

的条件(2)。□

3　模糊系统的 H_∞ 控制

定义 2　对于式(1),当 $u(t)\equiv 0$时, 若$\forall\, w(t)\in L^2(0,\infty;R^l)$(平方可积函数空间), $z(t)\in L^2(0,\infty;R^q)$, 则式(1) 称为输入-输出稳定的。对于给定的正数γ, 若此时式(1) 是二次稳定的, 输入-输出稳定的且存在正数d, $0<d<\gamma$, $\|z\|_2\le d\|w\|_2$, 其中 $\|\cdot\|_2$ 为L_2范数。此时称式(1) 的H_∞范数小于γ。

引理2　对于给定的正数$\gamma>0$, 如果存在$F_i(i=1,2,\cdots,r)$ 和共同的正定对称矩阵X, 满足

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr}\end{bmatrix} < -\alpha I < 0,\quad \alpha>0$$

其中

$$\begin{aligned}
Q_{ii} = {} & (A_i+B_{2i}F_i)^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}(A_i+B_{2i}F_i) + \\
& (C_i+DF_i)^{\mathrm T}(C_i+DF_i) + \\
& \gamma^{-2}X^{\mathrm T}B_{1i}B_{1i}^{\mathrm T}X \\
2Q_{ij} = {} & (A_i+B_{2i}F_j+B_{2j}F_i+A_j)^{\mathrm T}X + \\
& X^{\mathrm T}(A_i+B_{2i}F_j+B_{2j}F_i+A_j) + \\
& 2(C_i+DF_i)^{\mathrm T}(C_j+DF_j) + \\
& 2\gamma^{-2}X^{\mathrm T}B_{1i}B_{1j}^{\mathrm T}X \\
& i,j = 1,2,\cdots,r
\end{aligned}$$

则对于式(1), $u(t)=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j(\xi(t))F_jx(t)$ 产生的闭环系统(5) 的H_∞范数小于γ

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = {} & \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i(\xi(t))\lambda_j(\xi(t))(A_ix(t) + \\
& B_{2i}F_jx(t) + B_{1i}w(t)) \\
z(t) = {} & \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i(\xi(t))\lambda_j(\xi(t))(C_i + \\
& DF_j)x(t) \qquad (5)
\end{aligned}$$

证明　设 $\Lambda_{ii}=A_i+B_iF_i$, $2\Lambda_{ij}=A_i+A_j+B_iF_j+B_jF_i$。当$w(t)\equiv 0$时, 静态反馈所产生的闭环是二次稳定的。

$$0 > -aI > \begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr}\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}\Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1r}^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}\Lambda_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Lambda_{r1}^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}\Lambda_{r1} & \cdots & \Lambda_{rr}^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}\Lambda_{rr}\end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{\gamma^2}\begin{bmatrix} X^{\mathrm T}B_{11}\\ \vdots\\ X^{\mathrm T}B_{1r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X^{\mathrm T}B_{11}\\ \vdots\\ X^{\mathrm T}B_{1r}\end{bmatrix}^{\mathrm T} +$$

$$\begin{bmatrix} C_1^{\mathrm T}+F_1^{\mathrm T}D^{\mathrm T}\\ \vdots\\ C_r^{\mathrm T}+F_r^{\mathrm T}D^{\mathrm T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1^{\mathrm T}+F_1^{\mathrm T}D^{\mathrm T}\\ \vdots\\ C_r^{\mathrm T}+F_r^{\mathrm T}D^{\mathrm T}\end{bmatrix}^{\mathrm T} \ge$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}\Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1r}^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}\Lambda_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Lambda_{r1}^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}\Lambda_{r1} & \cdots & \Lambda_{rr}^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}\Lambda_{rr}\end{bmatrix}$$

由引理1知, 系统是二次稳定的。设$w(t)$ 不恒为0, 令$V(t)=x^{\mathrm T}(t)Xx(t)$。在下面的证明中, 注意到

$$\begin{aligned}
z = {} & \sum_{i=1}^{r}\lambda_iC_ix + \sum_{j=1}^{r}\lambda_jDF_jx = \\
& \sum_{i=1}^{r}\lambda_i(C_i+DF_i)x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot V = {} & \\
& \sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2x^{\mathrm T}(A_i^{\mathrm T}X + F_i^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}A_i + \\
& X^{\mathrm T}B_{2i}F_i + (C_i+DF_i)^{\mathrm T}(C_i+DF_i) + \\
& \frac{1}{\gamma^2}X^{\mathrm T}B_{1i}B_{1i}^{\mathrm T}X)x + \sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j}^{r}\lambda_i\lambda_jx^{\mathrm T}(A_i^{\mathrm T}X + \\
& A_j^{\mathrm T}X + F_j^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}X + F_i^{\mathrm T}B_{2j}^{\mathrm T}X + X^{\mathrm T}A_i + \\
& X^{\mathrm T}A_j + X^{\mathrm T}B_{2i}F_j + X^{\mathrm T}B_{2j}F_i + \\
& 2(C_i+DF_i)^{\mathrm T}(C_j+DF_j) + \\
& 2\frac{1}{\gamma^2}X^{\mathrm T}B_{1i}B_{1j}^{\mathrm T}X)x - \\
& \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i\lambda_jx^{\mathrm T}\Big(\frac{1}{\gamma^2}X^{\mathrm T}B_{1i}B_{1j}^{\mathrm T}X + \\
& (C_i+DF_i)^{\mathrm T}(C_j+DF_j)\Big)x + \\
& \sum_{i=1}^{r}\lambda_i(w^{\mathrm T}B_{1i}^{\mathrm T}Xx + x^{\mathrm T}X^{\mathrm T}B_{1i}w) = \\
& \begin{bmatrix}\lambda_1x\\ \vdots\\ \lambda_rx\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1x\\ \vdots\\ \lambda_rx\end{bmatrix} - \\
& \Big(\frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_iB_{1i}^{\mathrm T}Xx\Big)^{\mathrm T}\Big(\frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_iB_{1i}^{\mathrm T}Xx\Big) - \\
& \Big(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(C_i+DF_i)x\Big)^{\mathrm T}\Big(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(C_i+DF_i)x\Big) + \\
& w^{\mathrm T}\Big(\sum_{i=1}^{r}\lambda_iB_{1i}^{\mathrm T}Xx\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{r}\lambda_iB_{1i}^{\mathrm T}Xx\Big)^{\mathrm T}w \le \\
& -\alpha x^{\mathrm T}x - z^{\mathrm T}z + \gamma^2w^{\mathrm T}w - \\
& \Big(\gamma w - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_iB_{1i}^{\mathrm T}Xx\Big)^{\mathrm T}\Big(\gamma w - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{r}\lambda_iB_{1i}^{\mathrm T}Xx\Big)
\end{aligned}$$

不失一般性, 假设$x(0)=0$。此时$V(x(0))=$

0。上面不等式两端同时对 t 从 $0 \sim \infty$ 积分, 有

$$\begin{aligned}&\|z(t)\|_2^2 \le \\ &\|z(t)\|_2^2 + \alpha\|x(t)\|_2^2 + V(\infty) + \\ &\gamma^2 \left\| w(t) - \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\xi(t)) B_{1i}^{\mathrm{T}} X x(t)\right\|_2^2 \le \\ &\gamma^2\|w(t)\|_2^2 \qquad \square\end{aligned}$$

定理 2 对于 $\gamma > 0$, 如果存在 $M_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 和共同的正定对称矩阵 Y, 满足下面线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1r} & Y^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}} + M_1^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} & B_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{r1} & \cdots & P_{rr} & Y^{\mathrm{T}}C_r^{\mathrm{T}} + M_r^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} & B_{1r} \\ C_1Y + DM_1 & \cdots & C_rY + DM_r & -I & 0 \\ B_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & B_{1r}^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \qquad (6)$$

其中

$$\begin{aligned}&P_{ii} = A_iY + Y^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}} + M_i^{\mathrm{T}}B_{2i}^{\mathrm{T}} + B_{2i}M_i \\ &2P_{ij} = A_iY + Y^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}} + M_j^{\mathrm{T}}B_{2i}^{\mathrm{T}} + \\ &B_{2i}M_j + A_jY + Y^{\mathrm{T}}A_j^{\mathrm{T}} + M_i^{\mathrm{T}}B_{2j}^{\mathrm{T}} + B_{2j}M_i \\ &\qquad i, j = 1, 2, \cdots, r\end{aligned}$$

若令 $F_i = M_iY^{-1} (i = 1, 2, \cdots, r)$, 则静态反馈 $u(t) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(\xi(t)) F_j x(t)$ 使模糊系统(1) 所产生的闭环系统的 H_∞ 范数小于 γ。

证明 由 Schur 补公式, 式(6) 等价于

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1} & \cdots & P_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}} + M_1^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ Y^{\mathrm{T}}C_r^{\mathrm{T}} + M_r^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}} + M_1^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ Y^{\mathrm{T}}C_r^{\mathrm{T}} + M_r^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\gamma^2}\begin{bmatrix} B_{11} \\ \vdots \\ B_{1r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} \\ \vdots \\ B_{1r} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} < 0 \qquad (7)$$

式(7) 左右分别乘以 $\mathrm{diag}((Y^{-1})^{\mathrm{T}} \cdots (Y^{-1})^{\mathrm{T}})$, $\mathrm{diag}(Y^{-1} \cdots Y^{-1})$ 后, 令 $X = Y^{-1}$, $F_i = M_iY^{-1}$, $\Lambda_{ii} = A_i + B_iF_i$, $2\Lambda_{ij} = A_i + A_j + B_iF_j + B_jF_i$, $i, j = 1, 2, \cdots, r$, 再由引理 2 知控制器 $u(t) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(\xi(t)) \times F_j x(t)$ 为 γ-次优的。□

4 仿真示例

例 1 $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x(t))(A_ix(t) + B_iu(t))$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = (5 - 0.5|x_1|)/5$$

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1, \quad |x_1| \le 10$$

用 MATLAB 解定理 1 的线性矩阵不等式, 得

$$Y = \begin{bmatrix} 6.705\,1 & 10.334\,3 \\ 10.334\,3 & 15.948\,5 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = [-22.665\,9 \quad -37.213\,4]$$

$$M_2 = [-18.551\,2 \quad -26.775\,2]$$

$$F_1 = [167.784\,9 \quad -111.054\,7]$$

$$F_2 = [-139.246 \quad 88.549\,8]$$

图 1 和图 2 为 $0 \le t \le 10$, $x(0) = [1.5, 2]$ 的仿真结果。

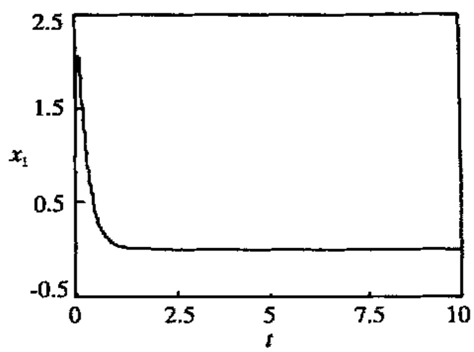

图 1 状态变量 x_1 的仿真结果

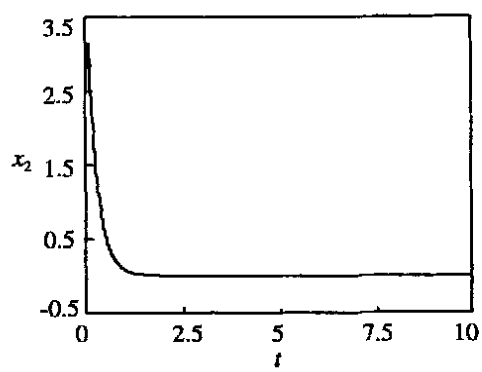

图 2 状态变量 x_2 的仿真结果

例 2 考虑如下模糊系统

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x(t))(A_ix(t) +$$

$$B_{1i}w(t) + B_{2i}u(t))$$

$$z = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x(t))(C_i x(t) + Du(t))$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = [1 \quad 2]^{\mathrm{T}}, \quad B_{22} = [2 \quad 3]^{\mathrm{T}}$$

$$C_1 = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}, \quad D = 0.5$$

$$C_2 = [2 \quad 1], \quad \lambda_1 = (2 - 0.5|x_1|)/2$$

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1, \quad |x_1| \le 4$$

用 MATLAB 解对应于定理 2 的 LMI(令 $\gamma = 1$) 得

$$Y = \begin{bmatrix} 2.242\,5 & -2.094\,7 \\ -2.094\,7 & 6.630\,6 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = [-1.685\,9 \quad -5.785\,1]$$

$$M_2 = [-3.567\,1 \quad -3.761\,1]$$

$$F_1 = [-2.222\,7 \quad -1.574\,7]$$

$$F_2 = [-3.008\,3 \quad -1.517\,6]$$

反馈 $u = \lambda_1 F_1 x(t) + \lambda_2 F_2 x(t)$ 使得闭环系统的 H_∞ 范数小于 γ。系统仿真结果如图 3 所示。其中实线为 $w(t)$, 虚线为 $z(t)$; $w(t) = e^{-t}, 0 \le t \le 15$, $x(0) = [1.5, 1.5]$。由图 3 知 $\|z\|_2 < \|w\|_2$。

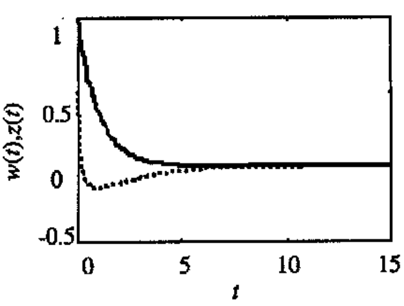

图 3　闭环系统的响应曲线

5　结　　论

本文给出了存在状态反馈使 T-S 模糊系统稳定的一个新的充分条件及与该条件等价的线性矩阵不等式, 该条件比文献[9]的条件更简洁且不等价; 并且给出了 T-S 模糊系统存在 H_∞ 控制的一个新的充分条件及与之等价的线性矩阵不等式。本文结果不仅为研究模糊系统的稳定性和 H_∞ 控制提供了一种新方法, 而且可用 MATLAB 求解 T-S 模糊系统的镇定控制和 H_∞ 控制器。

参考文献(References) :

[1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1985, 15(2): 116-132.

[2] Feng G, Cao S G, Rees N W, et al. Design of fuzzy control systems with guaranteed stability [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 85(1): 1-10.

[3] Cao S G, Rees N W, Feng G. Stability analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems[J]. *Int J Control*, 1996, 64(6): 1069-1087.

[4] Cao G S, Rees N W, Feng G. Analysis and design for a class of complex control systems, Part Ⅰ & Ⅱ [J]. *Automatica*, 1997, 33(6): 1017-1028.

[5] Takagi T, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 45(1): 135-156.

[6] Wang H O, Tanaka K, Griffin M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 14-23.

[7] Tanaka K, Ikede T, Wang H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-baesd design[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1998, 6(2): 250-265.

[8] Tanaka K, Ikede T, Wang H O. An LMI approach to fuzzy controller designs based on the relaxed stability conditions[A]. *Proc of IEEE Int Conf Fuzzy System* [C]. Barcelona, 1997. 171-176.

[9] Yoneyama J, Masahiro N, Hitoshi K, et al. Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 111(2): 253-266.

[10] Boyd S, EL G, Feron E, Balakrishan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia, 1994.