

文章编号: 1001-0920(2002)06-928-05

双通道继电特性及其应用 — MIMO 情形

王学雷, 邵惠鹤

(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

摘要: 研究了带有双通道继电特性的多变量反馈控制系统。采用描述函数阵理论和广义 Nyquist 稳定判据给出了该系统极限环振荡的存在条件和稳定条件。阐述了分散双通道继电反馈与多变量系统特征根轨迹相位特征之间的关系。进一步, 将分散双通道继电反馈用作一种新的测试方法来提取多变量系统多点频率特性。对一个典型的多变量化工过程的仿真取得了良好的结果, 表明了所提出方法的有效性。

关键词: 双通道继电特性; 描述函数阵; 广义 Nyquist 稳定判据; 极限环振荡

中图分类号: TP 13

文献标识码: A

Two-channel relay and its application — MIMO case

WANG Xue-Lei, SHAO Hui-he

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: MIMO system with decentralized two-channel relay feedback is considered. With the use of describing function matrix and generalized Nyquist stability criteria, the existence and stability conditions for limit cycle oscillation are built. The relation between decentralized two-channel relay feedback and the phase of outmost character loci of MIMO system is presented. The decentralized two-channel relay feedback is used to extract multiple point frequency characteristics of multivariable systems. The simulation to a typical chemical process shows a satisfactory result.

Key words: two-channel relay; describing function matrix; generalized Nyquist stability criteria; limit cycle oscillation

1 引言

1984 年, Astrom 将继电特性用于 PID 控制器的自动整定^[1], 取得了非常好的效果。该方法的许多优点, 使其成为控制领域的一个研究热点。直至今日, 继电反馈方法的研究已取得了大量成果^[2], 基于继电反馈方法的各种控制手段在工业实际中得到了广泛应用。

尽管继电反馈方法在 SISO 系统中获得了深入

的研究, 但 MIMO 系统的继电反馈理论研究还很不完善。这主要体现在: 通过继电方法得到的信息往往仅局限于一点, 缺少有效的手段来获取多变量系统重要频率范围内的多点频率特性。考虑到多变量系统复杂的动力学行为, 要实现更好的控制效果, 这显然是不充分的。

本文首次将双通道继电特性^[3]引入多变量系统, 并分析了带有双通道继电特性的 MIMO 反馈控制系统。通过描述函数阵理论和广义 Nyquist 稳定判

收稿日期: 2001-06-05; 修回日期: 2001-09-06

作者简介: 王学雷(1973—), 男(回族), 辽宁抚顺人, 博士生, 从事过程建模、先进控制和神经网络等研究; 邵惠鹤(1936—), 男, 浙江宁波人, 教授, 博士生导师, 从事过程控制、工业过程模型化和先进控制等研究。

据^[4], 给出了 MIMO 系统分散双通道继电反馈极限环振荡的存在条件及稳定条件。根据所得理论结果, 将分散双通道继电反馈用于提取多变量系统多点频率特性。与传统测试方法相比, 该方法具有许多显著的优点, 对于工业实际具有较大的现实意义。

2 分散双通道继电反馈及其描述函数阵

双通道继电结构如图 1 所示。其描述函数为

$$N(a) = \frac{4h_p}{\pi a} - \frac{4h_i}{\pi a} \quad (1)$$

其中 a 为输入正弦信号的幅值。

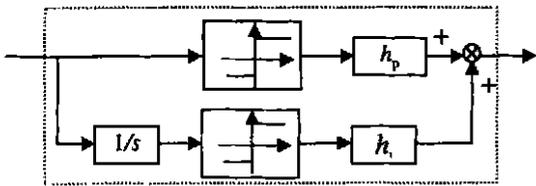


图 1 双通道继电特性

对于一个 $m \times m$ 的多变量系统, 本文采用如图 2 所示的分散继电反馈结构, 即用双通道继电特性代替分散控制器, 其中 TR_i 表示双通道继电特性, 其描述函数为 $N(a_i)$ 。另外, 如果多变量过程每一对输入输出 $u_i \ y_j (1 \leq i, j \leq m)$ 都具有良好的低通特性, 则继电特性可采用描述函数来近似, 从而整个非线性部分可用一个描述函数阵来表达, 即 $\bar{N}(a) = \text{diag}\{N(a_1), N(a_2), \dots, N(a_m)\}$, 其中 $a_i (1 \leq i \leq m)$ 表示第 i 个继电环节输入正弦信号的幅值。

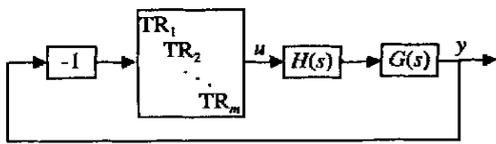


图 2 多变量系统分散双通道继电反馈结构

在该分散双通道继电反馈结构中, $H(s)$ 表示补偿环节, $G(s)$ 表示被控过程。根据目的的不同, $H(s)$ 可取不同的形式。下面针对 MIMO 系统分散双通道继电反馈结构进行分析。

3 极限环振荡的存在条件及稳定条件

3.1 分散双通道继电反馈极限环振荡的存在条件
一般对于工业实际中的大多数过程, 在引入非线性环节后系统会呈现极限环振荡, 且系统的各个

输出具有相同的振荡频率以及不同的相位和幅值^[5]。下述定理给出了分散双通道继电反馈 MIMO 系统出现极限环振荡的充分和必要条件。

定理 1 记 $\hat{N}(a) = \text{diag}(\frac{4}{\pi a_i})$, 其中 a_i 表示第 i 个双通道继电环节所输入正弦振荡的幅值, 则基于分散双通道继电反馈的多变量系统, 出现极限环振荡的充分必要条件是 $N(a)G(j\omega)$ 至少有一条特征根轨迹穿越 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$ 点。

证明 由分散双通道继电反馈的结构可知, 系统振荡的条件是

$$[I + \bar{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)]u(j\omega) = 0 \quad (2)$$

方程(2)存在非奇异解的充分必要条件是

$$\det[I + \bar{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \quad (3)$$

这意味着下式成立

$$\prod_{i=1}^m [1 + \lambda(\bar{N}(a)G(j\omega)H(j\omega))] = 0 \quad (4)$$

其中

$$\bar{N}(a) = \begin{bmatrix} \frac{4h_p}{\pi a_1} - \frac{4h_{i_1}}{\pi a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{4h_p}{\pi a_2} - \frac{4h_{i_2}}{\pi a_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{4h_p}{\pi a_m} - \frac{4h_{i_m}}{\pi a_m} \end{bmatrix} = (h_p - h_{ij}) \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{4}{\pi a_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{4}{\pi a_m} \end{bmatrix} = (h_p - h_{ij}) \hat{N}(a) \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 得

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^m \{1 + \lambda[(h_p - h_{ij})\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)]\} = 0 \\ \prod_{i=1}^m \{1 + (h_p - h_{ij})\lambda[\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)]\} = 0 \\ \prod_{i=1}^m \{\frac{1}{h_p - h_{ij}} + \lambda[\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)]\} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

由式(6), $\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 至少有一条特征根轨迹穿越 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$ 点。必要性得证。

如果 $N(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 至少有一条特征根轨迹穿越 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$ 点, 则式(6)成立, 从而式(2)成

立,多变量系统将进入极限环振荡状态。充分性得证。

定理1中的 $\hat{N}(a) = \text{diag}[\frac{4}{\pi a_i}]$ 相当于输出幅值为单位1的标准继电特性的描述函数阵,这里称为广义描述函数阵。

3.2 分散双通道继电反馈极限环振荡的稳定条件
在满足极限环振荡存在条件的基础上,需要进一步判定极限环振荡的稳定性。

考虑单位(负)反馈系统 $(h_p - h_{ij})KG(s)H(s)$,其中 $K = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, $k_i > 0, 1 \leq i \leq m$,该系统稳定的条件是 $\det[I + (h_p - h_{ij})KG(s)H(s)]$ 在复平面右半平面内没有零点。设 $G(s)H(s)$ 在复平面右半开平面内有 n_c 个不稳定极点,于是 $KG(s)H(s)$ 在复平面右半开平面内有 n_c 个不稳定极点。根据下列关系

$$\det[I + (h_p - h_{ij})KG(s)H(s)] = \prod_i \{1 + \lambda[(h_p - h_{ij})KG(s)H(s)]\} = \prod_i \{1 + (h_p - h_{ij})\lambda[KG(s)H(s)]\}$$

同时考虑到 $\prod_i \{1 + (h_p - h_{ij})\lambda[KG(s)H(s)]\}$ 的零点与 $\prod_i \{\frac{1}{h_p - h_{ij}} + \lambda[KG(s)H(s)]\}$ 相同,因此与标准广义Nyquist稳定判据^[4]的推导过程相似,可得该形式多变量系统的广义Nyquist稳定判据如下:

如果 $G(s)H(s)$ 在复平面右半开平面内有 n_c 个不稳定极点,则单位负反馈系统 $(h_p - h_{ij})KG(s)H(s)$ 稳定的条件是 $KG(s)H(s)$ 的所有特征轨迹逆时针包围 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$ 点 n_c 次。

下面给出分散双通道继电反馈多变量系统极限环振荡稳定条件的定理:

定理2 如果 $G(s)H(s)$ 在复平面右半开平面内没有极点,且分散双通道继电反馈满足极限环振荡存在条件,则对应的极限环振荡是稳定的,并且该极限环相应于 $N(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 最外面的特征根轨迹穿越点 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$,其中 $\hat{N}(a) = \text{diag}[\frac{4}{\pi a_i}]$ 。

证明 设 $N(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 最外面的特征根轨迹穿越点 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$,按照定理1,将有极限环振荡存在,设各个输出振荡的幅值为 a_1, a_2, \dots, a_m ,

则 $\hat{N}(a) = \text{diag}[\frac{4}{\pi a_i}]$ 。如果有某种扰动使振荡的幅

值变为 $a_1 = a_1 + \Delta a_1, a_2 = a_2 + \Delta a_2, \dots, a_m = a_m + \Delta a_m$,于是广义描述函数阵变为 $\hat{N}(a)$,使 $\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 不再有特征根轨迹穿越点 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$ 。这对应于两种情况:

1) 点 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$ 在 $\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 所有根轨迹的外部。此时,按照前面的广义Nyquist稳定判据,闭环系统是稳定的,于是各个输出振荡的幅值将减小, $\hat{N}(a)$ 的各个元素将单调增加,于是 $\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 的特征根轨迹将不断“扩张”,直到 $\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 最外面的特征根轨迹再次穿越点 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$;

2) 点 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$ 被 $\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 根轨迹所包围。此时,按照前面的广义Nyquist稳定判据,闭环系统是不稳定的,于是各个输出振荡的幅值将增加, $\hat{N}(a)$ 的各个元素将单调减小, $\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 的特征根轨迹将向原点不断“收缩”。在收缩过程中,内部的特征根轨迹可能穿越 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$ 点,但由于这种状态是不稳定的,扰动将使系统再次不稳定,所以 $\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 的特征根轨迹将再次向原点“收缩”。这种过程不断持续,直到 $\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 最外面的特征根轨迹再次穿越点 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$ 。

综上所述,该极限环振荡是稳定的,并且该极限环相应于 $N(a)G(j\omega)H(j\omega)$ 最外面的特征根轨迹穿越点 $(-\frac{1}{h_p - h_{ij}})$ 。

至此,根据 $G(s)H(s)$ 便可判断分散双通道继电反馈系统极限环振荡的稳定性。应该指出, $H(s)$ 和 $G(s)$ 不应有不稳定的零极点对消。

4 对分散双通道继电反馈的进一步讨论

取 $H(s) = I$,设 $\hat{N}(a)G(j\omega)H(j\omega) = \hat{N}(a)G(j\omega)$ 最外面的一条根轨迹为 $\lambda(j\omega)$,按照定理2,对于一个频率为 ω_0 的稳定的极限环振荡,有 $\lambda(j\omega_0) = -\frac{1}{h_p - h_{ij}}$,于是有

$$\lambda(j\omega_0) = -\frac{1}{h_p - h_{ij}} =$$

$$\frac{1}{n + \arctg(n_i/h_p)} \quad (7)$$

成立。由式(7), 极限环振荡的频率对应于分散双通道继电反馈多变量系统最外面特征根轨迹的相位为 $-\pi + \arctg(h_i/h_p)$, 且该相位完全由比值 h_i/h_p 决定。由此可建立一种能够提取多点频率特性的测试方法——分散双通道继电反馈方法, 通过改变比值 h_i/h_p , 根据在最外面特征根轨迹上的相位来测试系统多点频率特性。

应该指出, 在 $H(s) = I$ 的情况下, 分散双通道继电反馈对应于最外面特征根轨迹在第 3 象限的部分。如果取 $H(s) = \frac{1}{s}I$, 则式(7) 变为

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \lambda(j\omega) = \\ -\frac{1}{h_p - h_{ij}} = \\ -\pi + \arctg(h_i/h_p) \\ \lambda(j\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctg(h_i/h_p) \end{cases} \quad (8)$$

由式(8) 可见, 分散双通道继电反馈对应的最外面特征根轨迹在第 4 象限的部分。这对保证提取系统的低频特性是有意义的。

同理, 如果取 $H(s) = sI$, 则有

$$\lambda(j\omega) = -\frac{3\pi}{2} + \arctg(h_i/h_p) \quad (9)$$

于是, 分散双通道继电反馈对应于最外面特征根轨迹在第 2 象限的部分, 这对更充分地提取系统频率特性是有意义的。在实际使用中, 理想微分特性可用实际微分作用来代替, 即取

$$H(s) = D(s)I = \frac{T_{ds} + 1}{T_{ds}/K_d + 1}I \quad (10)$$

此时有 $\alpha + \lambda(j\omega) = -\pi + \arctg(h_i/h_p)$, 其中 $\alpha = D(j\omega)$, 在极限环振荡频率处其相位接近于 $\pi/2$ 。于是 $\lambda(j\omega) = -\pi - \alpha + \arctg(h_i/h_p)$ 仍具有理想微分情况下分散双通道继电反馈的基本特性。

5 分散双通道继电反馈在提取多变量系统多点频率特性中的应用

由前面的分析可以看出, 分散双通道继电反馈可作为一种提取多变量系统多点频率特性的测试方法。与传统的频率特性测试方法相比, 该方法具有以下优点:

1) 它是一种闭环测试方法, 测试过程中多变量

系统仍处于受控状态。由定理 2 的分析过程可见, 异常扰动能得到有效抑制, 系统的输出被控制在一定的范围内波动。波动幅值的大小, 即极限环振荡幅值的大小, 可通过调整继电特性的输出方便地调节。

2) 能保证测试信息的充分性。比值 h_i/h_p 完全刻画了测试的目标信息。

3) 不需要单独的信号源。系统的振荡行为是由非线性系统内部特性决定的, 无需外加激励信号。

4) 需要的先验知识少。

分散双通道继电反馈方法的这些特点, 使其在工业实际中具有很大的可行性和现实意义。尤其是与各种先进控制策略相结合, 对改善多变量系统的控制具有较大的作用。

6 仿 真

考虑一个典型的多变量过程——甲醇-水精馏过程 Wood^[6]。该过程的两个输出 y_1 和 y_2 分别是甲醇在塔顶和塔底的摩尔分量, 输入 u_1 是回流量, u_2 是再沸器蒸汽流量。其过程模型如下

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21s+1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1} \end{bmatrix}$$

选择 4 个测试点, 它们对应于特征根轨迹上的相位滞后分别为 $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$ 和 $-\pi$ 。测试过程的参数设置及测试结果如表 1 所示。在复平面上更直观的测试结果如图 3 所示, 其中“x”表示真实值, “o”表示测试值。

由图 3 可见, 测试所得到的点对多变量系统的各个元素都覆盖了合适的频率范围, 这对于保证充分、准确地刻画系统的动力学行为非常重要。为验证测试结果的有效性, 采用文献[7] 的滞后系统频域辨识方法, 提取该多变量系统的传递函数阵如下

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{12.8878}{16.6657s+1}e^{-0.9053s} & -\frac{19.0093}{21.4146s+1}e^{-2.9381s} \\ \frac{6.4214}{10.5652s+1}e^{-7.3286s} & -\frac{19.4554}{14.3228s+1}e^{-3.0026s} \end{bmatrix}$$

可见, 分散双通道继电测试和频域辨识恢复了多变量系统的传递函数阵, 表明所提出方法是有效的。

表 1 分散双通道继电器反馈测试参数设置及结果

实验序号	相位	$H(s)$	h_i/h_p	w	$\hat{G}(j\omega)$	$G(j\omega)$
1	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{s}I$	1	0.047 9	$\begin{bmatrix} 10.26e^{-0.6975j} & 13.10e^{2.1907j} \\ 5.95e^{-0.7620j} & 15.83e^{2.3771j} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.99e^{-0.7230j} & 13.32e^{2.2091j} \\ 5.85e^{-0.8170j} & 15.97e^{2.3936j} \end{bmatrix}$
2	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{s}I$	0	0.128 8	$\begin{bmatrix} 5.17e^{-1.2580j} & 6.78e^{1.5510j} \\ 3.59e^{-1.8942j} & 9.49e^{1.6884j} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.39e^{-1.2642j} & 6.56e^{1.5388j} \\ 3.83e^{-1.8530j} & 9.21e^{1.6792j} \end{bmatrix}$
3	$-\frac{3\pi}{4}$	I	1	0.290 4	$\begin{bmatrix} 2.50e^{-1.6617j} & 3.09e^{0.8875j} \\ 1.92e^{-2.8711j} & 4.70e^{0.9661j} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.59e^{-1.6578j} & 3.06e^{0.8622j} \\ 1.99e^{-2.9857j} & 4.51e^{0.9344j} \end{bmatrix}$
4	$-\pi$	I	0	0.493 8	$\begin{bmatrix} 1.49e^{-1.9083j} & 1.84e^{0.1917j} \\ 1.16e^{-1.3762j} & 2.83e^{0.2185j} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.54e^{-1.9439j} & 1.81e^{0.1875j} \\ 1.21e^{-1.4397j} & 2.70e^{0.2292j} \end{bmatrix}$

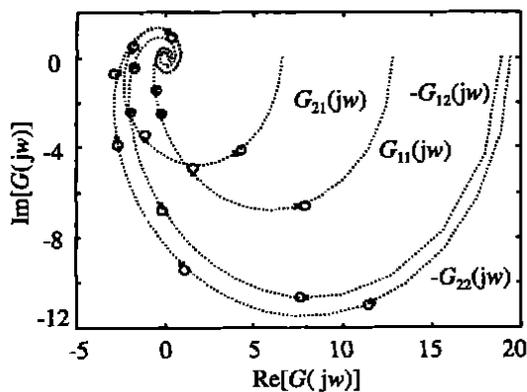


图 3 分散双通道继电器反馈测试结果

7 结 论

本文研究了分散双通道继电器反馈控制系统。通过描述函数阵和广义 Nyquist 稳定判据,给出了该系统极限环振荡的存在条件和稳定条件;阐述了分散双通道继电器反馈与多变量系统频率特性最外面特征根轨迹的相位特征之间的关系;在此基础上,将分散双通道继电器反馈方法用于提取多变量系统多点频率特性。与传统测试方法相比,分散双通道继电器反馈测试方法具有许多显著的优点。仿真取得了良好的结果,表明本文所提出方法对工业实际具有较大的现实意义。

参考文献(References):

- [1] Astrom K J, Hagglund T. Automatic tuning of simple regulators with specification on phase and amplitude margins[J]. *Automatica*, 1984, 20(5): 645-651.
- [2] Astrom K J, Lee T H, Tan K K, et al. Recent advances in relay feedback methods - A survey[A]. *IEEE SMC Conf[C]*. Vancouver, 1995. 2216-2221.
- [3] Friman M, Waller K V. A two-channel relay for auto tuning [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 1997, 36(7): 2662-2671.
- [4] Maciejowski J M. *Multivariable Feedback Design*[M]. MA: Addison-Wesley, 1989.
- [5] Atherton D P. *Nonlinear Control Engineering*[M]. London: Van Nostrand Reinhold, 1975.
- [6] Wood R K, Berry T J. Terminal composition control of a binary distillation column[J]. *Chemical Engineering Science*, 1973, 28(9): 1707-1727.
- [7] 王学雷, 邵惠鹤. 一种实现有滞后 SISO 系统频域参数辨识的新算法[J]. *系统仿真学报*, 2001, 13(增刊): 76-78. (Wang Xue-lei, Shao Hui-he. A novel frequency domain identification algorithm for SISO system with a delay[J]. *J of System Simulation*, 2001, 13(S): 76-78.)