文章编号: 1001-0920(2002)06-937-03

区间 Delta 算子系统的鲁棒性分析与控制

向峥嵘, 陈庆伟, 胡维礼
(南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094)

摘　要: 研究 Delta 算子描述的区间系统的鲁棒稳定分析与鲁棒综合设计问题。在给出区间系统的一种等价描述后, 利用 Delta 域的 Lyapunov 稳定性理论, 提出了区间 Delta 算子系统鲁棒稳定的充分条件及状态反馈控制设计方法。所得结论可以将连续区间系统与离散区间系统的有关结果纳入到 Delta 算子系统的统一框架中。

关键词: Delta 算子; 区间矩阵; 稳定性; 鲁棒控制; Riccati 不等式
中图分类号: TP 13; TP 273　　文献标识码: A

Robustness analysis and control for interval delta operator systems

XIANG Zheng-rong, CHEN Qing-wei, HU Wei-li
(Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Robust stability analysis and synthesis of the interval delta operator systems are studied. A kind of equivalent description of the interval delta operator systems are presented. Sufficient condition of robust stability and the corresponding controller design via state feedback for the interval delta operator systems are given by employing Lyapunov stability theory. The proposed method can unify some previous related results of the continuous and discrete interval systems into the delta framework.

Key words: delta operator; interval matrix; stability; robust control; Riccati inequality

1 引　　言

实际工程系统中存在着各种各样的不确定性, 其中一类不确定性可描述为系统状态矩阵的各个元素在一些确定的区间内变化, 这就是所谓的区间系统。这种摄动虽不改变系统的阶次, 但由于它的存在可以使原来以标称系统设计的性能指标衰退, 甚至出现系统不稳定。近年来有关区间系统鲁棒稳定性的研究取得了许多结果[1]。

Delta 算子方法[2]避免了高速采样时移位算子方法引起的数值不稳定问题, 同时又使得传统的用于连续域的各类设计方法可直接用于离散域设计。有关 Delta 算子系统的研究已引起许多学者的广泛重视, 并取得了大量研究结果[2~4]。

本文利用 Lyapunov 方法研究了区间 Delta 算子系统的鲁棒稳定性与综合设计问题, 给出了鲁棒稳定的判别条件及状态反馈控制器的综合算法。

收稿日期: 2001-09-10; 修回日期: 2001-12-10
基金项目: 国家自然科学基金项目(60174019, 69974021)

作者简介: 向峥嵘(1969—), 男, 江苏南京人, 副教授, 主要从事非线性控制、鲁棒控制、智能控制及故障诊断等研究; 胡维礼(1941—), 男, 江苏东台人, 教授, 博士生导师, 主要从事自适应控制、智能控制及非线性控制等研究。

2 问题描述及预备知识

考虑下列由 Delta 算子描述的系统

$$\delta x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

其中, $x(t) \in R^n$ 为系统状态; $A \in R^{n\times n}$ 为状态矩阵, A 中的元素不能完全确定, 但属于某个确定的区间, 即

$$A \in N[\underline{A}, \bar{A}] = \{A \in R^{n\times n} \mid \underline{a}_{ij} \le a_{ij} \le \bar{a}_{ij}, i,j = 1,2,\cdots,n\} \tag{2}$$

这里 $\underline{A}, \bar{A}$ 分别为矩阵 A 中各元素的下界和上界元素组成的矩阵。δ 即 Delta 算子, 定义为[2]

$$\delta x(t) = \begin{cases} \overset{\circ}{x}(t), & T = 0 \\ (x(t+T) - x(t))/T, & T \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

其中 T 为采样周期。

区间矩阵 $A \in N[\underline{A}, \bar{A}]$ 可以等价地描述为[1]

$$A = A_0 + E\Sigma F, \quad \Sigma \in \Sigma^* \tag{4}$$

其中 $A_0 = (\underline{A} + \bar{A})/2$ 为常数矩阵,

$$E = [\sqrt{h_{11}}e_1, \cdots, \sqrt{h_{1n}}e_1, \cdots, \sqrt{h_{n1}}e_n, \cdots, \sqrt{h_{nn}}e_n]$$

$$\Sigma^* = \{\Sigma \in R^{n^2\times n^2} \mid \Sigma = \mathrm{diag}[\epsilon_{11}, \cdots, \epsilon_{1n}, \cdots, \epsilon_{n1}, \cdots, \epsilon_{nn}], |\epsilon_{ij}| < 1, i,j = 1,2,\cdots,n\}$$

$$F = [\sqrt{h_{11}}e_1, \cdots, \sqrt{h_{1n}}e_1, \cdots, \sqrt{h_{n1}}e_n, \cdots, \sqrt{h_{nn}}e_n]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$e_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 为 $n\times n$ 单位矩阵的第 i 个列向量, $H = (\bar{A} - \underline{A})/2$, 其每一个元素 $h_{ij} (i,j = 1,2,\cdots,n)$ 都是非负数, 因此 E 为 $n\times n^2$ 阶矩阵, F 为 $n^2\times n$ 阶矩阵。

显然, 对 $\forall \Sigma \in \Sigma^*$, 有 $\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma \le I$ 成立。

引理 1[5] 令 $A \in R^{n\times n}, H \in R^{n\times i}, E \in R^{j\times n}$ 和 $Q = Q^{\mathrm{T}} \in R^{n\times n}$ 是给定矩阵, 假定存在对称正定矩阵 P, 使得下列关系满足:

1) $H^{\mathrm{T}}PH < I$;

2) $A^{\mathrm{T}}(P^{-1} - HH^{\mathrm{T}})^{-1}A + E^{\mathrm{T}}E + Q < 0$,

则对所有满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \le I$ 的 $F(t)$ 有下列不等式成立, 即

$$(A + HF(t)E)^{\mathrm{T}}P(A + HF(t)E) + Q < 0$$

3 鲁棒性分析

考虑下列区间 Delta 算子系统的鲁棒稳定性。

$$\delta x(t) = Ax(t) \tag{6}$$

定理 1 若存在标量 $\epsilon > 0$, 使得下列 Riccati 不等式

$$(TA_0 + I)^{\mathrm{T}}(P^{-1} - \epsilon TEE^{\mathrm{T}})^{-1}(TA_0 + I) - P + \epsilon^{-1}TF^{\mathrm{T}}F < 0 \tag{7}$$

有对称正定解矩阵 P, 且满足

$$\epsilon^{-1}I - TE^{\mathrm{T}}PE > 0 \tag{8}$$

那么系统(6) 是鲁棒稳定的。

证明 证明方法同定理 2, 此处略。

注 1 通过矩阵逆公式 $(X^{-1} + YZ)^{-1} = X - XY(I + ZXY)^{-1}ZX$ 可得与式(7) 等价的 Riccati 不等式

$$A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + TA_0^{\mathrm{T}}PA_0 + (TA_0 + I)^{\mathrm{T}}PE(\epsilon^{-1}I - TE^{\mathrm{T}}PE)^{-1}E^{\mathrm{T}}P(TA_0 + I) + \epsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F < 0 \tag{9}$$

注 2 定理 1 给出了连续与离散区间系统鲁棒稳定性结果的统一描述。令 $T = 0$, 由式(9) 可得连续区间系统 $\overset{\circ}{x}(t) = Ax(t)$ 的鲁棒稳定性条件为

$$A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + \epsilon PEE^{\mathrm{T}}P + \epsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F < 0 \tag{10}$$

令 $T = 1, A_0 + I = A_0$, 可得离散区间系统 $x(k+1) = Ax(k)$ 的鲁棒稳定性条件为

$$A_0^{\mathrm{T}}PA_0 + A_0^{\mathrm{T}}PE(\epsilon^{-1}I - E^{\mathrm{T}}PE)^{-1}E^{\mathrm{T}}PA_0 - P + \epsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F < 0 \tag{11}$$

这正是文献[1] 中的定理 3.1 与定理 3.2 给出的结果。

4 状态反馈鲁棒控制

下面考虑系统(1) 的鲁棒状态反馈控制问题。

定理 2 若存在一常数 $\epsilon > 0$ 和正定对称矩阵 R, 使得下列 Riccati 不等式

$$(TA_0 + I)^{\mathrm{T}}(P^{-1} + TBR^{-1}B^{\mathrm{T}} - \epsilon TEE^{\mathrm{T}})^{-1}(TA_0 + I) - P + \epsilon^{-1}TFF^{\mathrm{T}} < 0 \tag{12}$$

有正定对称解矩阵 P, 且满足

$$\epsilon^{-1}I - TE^{\mathrm{T}}PE > 0 \tag{13}$$

则系统(1) 可通过状态反馈 $u = -Kx(t)$ 鲁棒稳定。此时反馈增益阵为

$$K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}(P^{-1} + TBR^{-1}B^{\mathrm{T}} - \epsilon TEE^{\mathrm{T}})^{-1}(TA_0 + I) \tag{14}$$

证明 令 $\bar{E} = (T\cdot\epsilon)^{1/2}E, \bar{F} = (T/\epsilon)^{1/2}F, \bar{A} = T(A_0 - BK) + I, \bar{P} = P, \bar{Q} = -P$。由式(13) 可得

$$\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{P}\bar{E} < I \tag{15}$$

令 $Y = (P^{-1} + TBR^{-1}B^{\mathrm{T}} - \epsilon TEE^{\mathrm{T}})^{-1}(I + TA_0)$, 由式(14) 可得

$$Y^{\mathrm{T}}(P^{-1} - \epsilon TEE^{\mathrm{T}})Y = \bar{A}^{\mathrm{T}}(\bar{P}^{-1} - \bar{E}\bar{E}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{A}$$

于是有

$$(TA_0+I)^{\mathrm{T}}(P^{-1}+TBR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\epsilon TEE^{\mathrm{T}})^{-1}(TA_0+I)-P+\epsilon^{-1}TFF^{\mathrm{T}}=Y^{\mathrm{T}}(TBR^{-1}B^{\mathrm{T}}+P^{-1}-\epsilon TEE^{\mathrm{T}})Y-P+\bar{F}\bar{F}^{\mathrm{T}}=\bar{A}^{\mathrm{T}}(\bar{P}^{-1}-\bar{E}\bar{E}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{A}+Y^{\mathrm{T}}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}Y+\bar{Q}+\bar{F}\bar{F}^{\mathrm{T}}<0 \quad (16)$$

即有

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}(\bar{P}^{-1}-\bar{E}\bar{E}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{A}+\bar{Q}+\bar{F}\bar{F}^{\mathrm{T}}<-Y^{\mathrm{T}}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}Y<0 \quad (17)$$

取 $\bar{P},\bar{A},\bar{E},\Sigma,\bar{F},\bar{Q}$ 分别对应于引理 1 中的 P, A, H, F, E, Q, 显然, 由式(16), (17) 可知引理 1 的条件满足, 故可得

$$(\bar{A}+\bar{E}\Sigma\bar{F})^{\mathrm{T}}P(\bar{A}+\bar{E}\Sigma\bar{F})-P<0 \quad (18)$$

系统(1) 经 $u=-Kx(t)$ 反馈后, 闭环系统为

$$\delta x(t)=(A_0-BK+E\Sigma F)x(t) \quad (19)$$

令

$$U=(A_0-BK+E\Sigma F)^{\mathrm{T}}P+P(A_0-BK+E\Sigma F)+T(A_0+E\Sigma F)^{\mathrm{T}}P(A_0+E\Sigma F)$$

利用式(18), 有

$$U=\frac{1}{T}((\bar{A}+\bar{E}\Sigma\bar{F})^{\mathrm{T}}P(\bar{A}+\bar{E}\Sigma\bar{F})-P)<0 \quad (20)$$

由式(20) 及文献[3] 的引理 1 知, 闭环系统(19) 是鲁棒稳定的。□

注 3　定理 2 给出了连续与离散区间系统的鲁棒状态反馈控制设计的统一描述。分别令 $T=0$ 和 $T=1$, $A_0+I=A_0$, 可得连续与离散区间系统的状态反馈鲁棒器控制设计结果。

推论 1　若存在一常数 $\epsilon>0$ 和正定对称矩阵 R, 使得下列 Riccati 不等式

$$A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0-P(BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\epsilon EE^{\mathrm{T}})P+\epsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F<0 \quad (21)$$

有正定对称解矩阵 P, 则连续区间系统 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 可通过状态反馈 $u=-Kx(t)$ 进行鲁棒稳定。此时反馈增益阵为

$$K=R^{-1}B^{\mathrm{T}}P \quad (22)$$

推论 2　若存在一常数 $\epsilon>0$ 和正定对称矩阵 R, 使得下列 Riccati 不等式

$$A_0^{\mathrm{T}}(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\epsilon EE^{\mathrm{T}})^{-1}A_0-P+\epsilon^{-1}FF^{\mathrm{T}}<0$$

有正定对称解阵 P, 且满足 $\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE>0$, 则离散区间系统 $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ 可通过状态反馈 $u=-Kx(k)$ 进行鲁棒稳定。此时反馈增益阵为

$$K=R^{-1}B^{\mathrm{T}}(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\epsilon EE^{\mathrm{T}})^{-1}A_0 \quad (23)$$

最后, 给出系统(1) 的鲁棒综合算法如下:

1) 选取 T, R 和 ϵ 的初值, R 一般可取单位矩阵, $0<T<1$;

2) 确定 Riccati 不等式(12) 是否存在满足式(13) 的正定对称解, 若有解则由式(14) 定义的状态反馈控制律可使系统(1) 鲁棒稳定, 算法结束; 若无解则进行下一步;

3) 令 $\epsilon=\epsilon/2$, 转向步骤 2); 若 ϵ 小于给定的计算精度时 Riccati 不等式(12) 仍无解, 则表明该算法失效。

5　结　　论

本文在给出了区间系统的一种等价描述后, 利用 Delta 域的 Lyapunov 稳定性理论, 得到了区间 Delta 算子系统鲁棒稳定的充分条件及状态反馈鲁棒控制器设计。所得结论在极限情况下可分别推出连续区间系统与离散区间系统的有关结果。

参考文献(References):

[1] 吴方向, 史忠科, 戴冠中. 动态区间系统的鲁棒稳定性[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(1): 113-115.
(Wu F X, Shi Z K, Dai G Z. On robust stability of dynamic interval systems[J]. *Control Theory and Applications*, 2001, 18(1): 113-115.)

[2] Middleton R H, Goodwin G C. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1986, 31(11): 1015-1021.

[3] 张端金, 吴捷, 杨成梧. Delta 算子系统圆形区域极点配置的鲁棒性[J]. 控制与决策, 2001, 16(3): 337-340.
(Zhang D J, Wu J, Yang C W. Robustness of pole assignment in a circular region for delta operator systems[J]. *Control and Decision*, 2001, 16(3): 337-340.)

[4] 向峥嵘, 陈庆伟, 胡维礼. 具有执行器故障的不确定 Delta 算子系统鲁棒 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2001, 16(4): 491-493.
(Xiang Z R, Chen Q W, Hu W L. Robust H_∞ control of uncertain delta operator systems with actuator failure[J]. *Control and Decision*, 2001, 16(4): 491-493.)

[5] De Souza C E, Fu M, Xie L. H_∞ analysis and synthesis of discrete-time systems with time-varying uncertainty[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(3): 459-462.