第 17 卷 第 6 期
Vol. 17 No. 6

控 制 与 决 策
Control and Decision

2002 年 11 月
Nov. 2002

文章编号: 1001-0920(2002)06-839-04

一类不确定性系统的鲁棒正实性分析与综合

曾建平, 黄 琳
(北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

摘 要: 考虑一类具有多项式型不确定性系统的鲁棒正实性分析和综合问题。这类不确定模型是区间摄动和范数有界摄动系统的自然推广。给出了一个系统具有鲁棒扩展严格正实性(ESPR)的充分条件, 利用该条件可估计出使系统保持ESPR的最大参数摄动范围。在ESPR分析的基础上, 进一步给出了ESPR控制器的存在条件和控制器的构造方法。通过凸优化算法,得到了所提出方法意义下具有最大摄动界的ESPR控制器设计方法。

关键词: 鲁棒正实性; 鲁棒正实控制; ESPR; 摄动系统; LMI
中图分类号: TP 13　　文献标识码: A

Robust positive realness analysis and synthesis for a class of systems with uncertainties

ZENG Jian-ping, HUANG Lin
(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Robust positive realness analysis and synthesis problem is dealt with for a class of systems with polynomial form parameter uncertainties. A sufficient condition of robust extended strictly positive realness (ESPR) is presented for the uncertain systems, and it also can be utilized to estimate the perturbation bound such that ESPR holds. On the basis of ESPR analysis, the solvability conditions to ESPR control are provided via state and output feedback respectively. Moreover, an approach is obtained to design controller via convex programming algorithm such that the closed loop system is ESPR and has maximum perturbation bound under the method.

Key words: robust positive realness; robust positive real control; ESPR; perturbation systems; LMI

1 引 言

考虑摄动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A(q)x + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{1}$$

其中, $x \in R^{n_p}$, $u \in R^{n_u}$ 和 $y \in R^{n_y}$ 分别为系统状态、输入和输出变量, $q = (q_1, q_2, \cdots, q_m)^{\mathrm{T}} \in R^m$ 为摄动参数, $|q_i| \leq \epsilon$。为描述 $A(q)$ 中仅部分元素的摄动情形, 可设

$$\begin{aligned} &A(q) = A_N + L\tilde{A}(q)R \\ &\tilde{A} \in R^{h\times l}, \quad h, l \leq n_p \end{aligned} \tag{2}$$

其中, $L \in R^{n_p\times h}$ 列满秩, $R \in R^{l\times n_p}$ 行满秩, A_N 和 $\tilde{A}(q)$ 分别为系统矩阵中的不变部分和摄动部分。

收稿日期: 2001-10-08; 修回日期: 2002-01-04
基金项目: 国家重点基础研究专项经费项目(G1998020302)
作者简介: 曾建平(1966—), 男, 湖南常德人, 博士后, 从事鲁棒控制及其在电力系统中的应用研究; 黄琳(1935—), 男, 江苏扬州人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统稳定性研究。

给定整数 $r > 0$, 考虑如下形式摄动

$$\tilde{A}(q) = \sum_{i_1+\cdots+i_m=0}^{r} A_{i_1\cdots i_m} q_1^{i_1}\cdots q_m^{i_m},\quad 0 \le i_j \le r \tag{3}$$

记 $A_0 = A_N + LA_{0\cdots 0}R$

$$\Gamma = \sum_{i_1+\cdots+i_m=1}^{r} A_{i_1\cdots i_m} q_1^{i_1}\cdots q_m^{i_m}$$

可将系统(1) 改写为

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x + L\Gamma R x + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{4}$$

当 $r = 1$ 时, 模型(4) 即为区间系统; 若给出摄动的范数界 $\|\Gamma\|$, 则(4) 成为通常的范数有界不确定系统。在一些应用中也会出现具有形式(4) 的摄动模型, 如电力系统[1]。另外, 在较弱的条件下, 一般的非线性函数都可用多项式来逼近。故摄动系统(4) 也可看成是任意非线性相关摄动系统的近似模型。正实性是系统的一种重要性能, 在二次最优控制、绝对稳定及超稳定理论等领域均有重要作用。由于实际系统中不可避免地存在不确定性, 鲁棒正实性的研究尤为重要, 因而近年来得到了广泛的研究[2~4], 但大多研究区间或线性相关摄动情形, 而对非线性摄动系统鲁棒性的研究还不充分。本文考虑具有形式(3) 摄动系统族的鲁棒正实分析与综合问题。

文中 $A^{\mathrm T}$ 和 $A^{\mathrm H}$ 分别表示 A 的转置和共轭转置, I 表示合适维的单位矩阵。矩阵 $A^{\perp}$ 具有性质 $A^{\perp}A = 0$, $A^{\perp}A^{\perp\mathrm T} > 0$。$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] := D + C(sI - A)^{-1}B$。假定所有矩阵具有合适的维数。

2 基本引理

引用如下正实性定义:

定义 1[5,6] 系统 $G(s)$ 称为正实的(PR), 如果 $G(s)$ 在开右半平面解析, 且 $G(s) + G^{\mathrm H}(s) \ge 0$, $\forall\, \mathrm{Re}(s) > 0$。系统 $G(s)$ 称为严格正实的(SPR), 如果 $G(s)$ 在闭右半平面解析, 且 $G(\mathrm j\omega) + G^{\mathrm T}(-\mathrm j\omega) > 0$, $\forall\, \omega \in [0, \infty)$。系统 $G(s)$ 称为扩展严格正实的(ESPR), 如果 $G(s)$ 严格正实, 且 $G(\mathrm j\infty) + G^{\mathrm T}(-\mathrm j\infty) > 0$。

引理 1[6,7] 设 $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$, 则 $G(s)$ 是 ESPR 的, 当且仅当 $\exists\, X > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm T}X + XA & XB - C^{\mathrm T} \\ B^{\mathrm T}X - C & -(D + D^{\mathrm T}) \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

引理 2[7] 给定矩阵 B, C 和 Q, 则 $Q + BGC + (BGC)^{\mathrm T} < 0$ 可解, 当且仅当 $B^{\perp}QB^{\perp\mathrm T} < 0$, $C^{\mathrm T\perp}QC^{\mathrm T\perp\mathrm T} < 0$。

3 鲁棒正实性分析

记 $E = [q_1 I, \cdots, q_m I, \cdots, q_1^{i_1}\cdots q_m^{i_m} I, \cdots, q_m^r I]$, $F^{\mathrm T} = [A_{10\cdots 0}^{\mathrm T}, \cdots, A_{00\cdots 1}^{\mathrm T}, \cdots, A_{i_1\cdots i_m}^{\mathrm T}, \cdots, A_{00\cdots r}^{\mathrm T}]$, 则 $\Gamma = EF$, 且

$$EE^{\mathrm T} = \sum_{i_1+\cdots+i_m=1}^{r} q_1^{2i_1}\cdots q_m^{2i_m} I \le$$

$$\sum_{i_1+\cdots+i_m=1}^{r} \epsilon_1^{2i_1}\cdots\epsilon_m^{2i_m} I := \gamma^2 I \tag{6}$$

定理 1 系统(1) 是 ESPR 的, 仅需存在 $P > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} A_0P + PA_0^{\mathrm T} + \gamma^2 LL^{\mathrm T} & B - PC^{\mathrm T} & PR^{\mathrm T}F^{\mathrm T} \\ B^{\mathrm T} - CP & -(D + D^{\mathrm T}) & 0 \\ FRP & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

证明 由 Schur 补引理, 式(7) 等价于

$$\begin{bmatrix} P^{-1}A_0 + A_0^{\mathrm T}P^{-1} + \gamma^2 P^{-1}LL^{\mathrm T}P^{-1} + R^{\mathrm T}F^{\mathrm T}FR & P^{-1}B - C^{\mathrm T} \\ B^{\mathrm T}P^{-1} - C & -(D + D^{\mathrm T}) \end{bmatrix} < 0$$

注意到

$$P^{-1}LEFR + (P^{-1}LEFR)^{\mathrm T} \le P^{-1}LEE^{\mathrm T}L^{\mathrm T}P^{-1} + R^{\mathrm T}F^{\mathrm T}FR$$

故有

$$\begin{bmatrix} P^{-1}A(q) + A(q)^{\mathrm T}P^{-1} & P^{-1}B - C^{\mathrm T} \\ B^{\mathrm T}P^{-1} - C & -(D + D^{\mathrm T}) \end{bmatrix} \le$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1}A_0 + A_0^{\mathrm T}P^{-1} + P^{-1}LEE^{\mathrm T}L^{\mathrm T}P^{-1} + R^{\mathrm T}F^{\mathrm T}FR & P^{-1}B - C^{\mathrm T} \\ B^{\mathrm T}P^{-1} - C & -(D + D^{\mathrm T}) \end{bmatrix} \le$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1}A_0 + A_0^{\mathrm T}P^{-1} + \gamma^2 P^{-1}LL^{\mathrm T}P^{-1} + R^{\mathrm T}F^{\mathrm T}FR & P^{-1}B - C^{\mathrm T} \\ B^{\mathrm T}P^{-1} - C & -(D + D^{\mathrm T}) \end{bmatrix} < 0$$

由引理 1, 系统(1) 是 ESPR 的。□

若预先不知 ϵ, 令 $\sigma = \gamma^2$, 则式(7) 可看成是以矩阵 $P > 0$ 和标量 $\sigma > 0$ 为变量的 LMI, 定义凸优化问题

$$\sigma_m = \max_{(P,\sigma)\text{满足LMI}(7)} \sigma \tag{8}$$

则当 $\gamma \le \sigma_m$ 时, 系统(1) 是 ESPR 的。式(8) 给出了在文中方法意义下, 保持 ESPR 的最大摄动范围的一个估计。

4　鲁棒正实控制

4.1　状态反馈情形

给定状态反馈 $u = Kx + v$, 闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A(q) + BK)x + Bv \\ y = (C + DK)x + Dv \end{cases} \tag{9}$$

由定理 1, 系统是 ESPR 的, 仅需 $\exists\, P > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} (A_0 + BK)P + P(A_0 + BK)^{\mathrm{T}} + \gamma^2 LL^{\mathrm{T}} & B - P(C + DK)^{\mathrm{T}} & PR^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} - (C + DK)P & -(D + D^{\mathrm{T}}) & 0 \\ FRP & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

令 $Z = KP$, 则 LMI(10) 可改写为

$$\begin{bmatrix} A_0P + PA_0^{\mathrm{T}} + BZ + Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \gamma^2 LL^{\mathrm{T}} & B - PC^{\mathrm{T}} - Z^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} & PR^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} - CP - DZ & -(D + D^{\mathrm{T}}) & 0 \\ FRP & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

定理 2　若存在矩阵 $P > 0$ 和 Z 满足 LMI(11), 则存在状态反馈控制器, 使得闭环系统是 ESPR 的, 且 $K = ZQ^{-1}$ 是一个控制器。

由于 ESPR 控制器不唯一, 可通过对其进行优选, 使得闭环系统在尽可能大的范围内保持 ESPR 性。记 $\delta = \gamma^2$, 定义凸优化问题

$$\delta_m = \max_{(P, Z, \delta)\text{满足LMI(11)}} \delta \tag{12}$$

则当 $\gamma \leq \delta_m$ 时, 状态反馈控制器 $K = ZQ^{-1}$, 可使闭环系统保持 ESPR。

4.2　输出反馈情形

设 $\tilde{y} = Cx$, 则 $\tilde{y} = y - Du$。考虑输出反馈控制器

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_cx_c + B_c\tilde{y} \\ u = C_cx_c + D_c\tilde{y} + v \end{cases},\quad \begin{cases} \dot{x}_c = \tilde{A}_cx_c + \tilde{B}_cy \\ u = \tilde{C}_cx_c + \tilde{D}_cy + v \end{cases} \tag{13}$$

式中, $x_c \in R^{n_c}$ 为控制器状态变量。当满足适定性条件 $I + D_cD$ 和 $I + DD_c$ 可逆时, 两种形式可互相转化。说明如下: 若 $u(s) = (C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c)\tilde{y}(s) + v$ 是 ESPR 控制器, 则

$$u = (I + C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_cD)^{-1} \times (C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c)y + \tilde{v} \tag{14}$$

是 ESPR 控制器, 其中 $\tilde{v} = (I + C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_cD)^{-1}v$。ESPR 控制器(14) 的一个实现是

$$u(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_c - B_c(I + D_cD)^{-1}C_c & B_c(I + D_cD)^{-1}C_c & B_c(I + D_cD)^{-1}D_c \\ 0 & A_c & B_c \\ \hline -(I + D_cD)^{-1}C_c & (I + D_cD)^{-1}C_c & (I + D_cD)^{-1}D_c \end{array}\right] y(s) + \tilde{v}(s) \tag{15}$$

同样, 若 $u(s) = (\tilde{C}_c(sI - \tilde{A}_c)^{-1}\tilde{B}_c + \tilde{D}_c)y(s) + v$ 是 ESPR 控制器, 则

$$u(s) = (I - \tilde{C}_c(sI - \tilde{A}_c)^{-1}\tilde{B}_c - \tilde{D}_cD)^{-1} \times (\tilde{C}_c(sI - \tilde{A}_c)^{-1}\tilde{B}_c + \tilde{D}_c)\tilde{y}(s) + \hat{v} \tag{16}$$

是 ESPR 控制器, 其中

$$\hat{v} = (I - \tilde{C}_c(sI - \tilde{A}_c)^{-1}\tilde{B}_c - \tilde{D}_cD)^{-1}v$$

不失一般性, 仅考虑控制器 $u(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right]\tilde{y}$ 的设计问题。此时, 闭环系统方程为

$$y = \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array}\right] v \tag{17}$$

其中

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array}\right] := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}(q) & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array}\right] + \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ \hat{D} \end{bmatrix} G [\tilde{C} \quad 0]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A}(q) & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array}\right] := \left[\begin{array}{c|cc} A(q) & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & D \end{array}\right],\quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},\quad \tilde{D} = [D \quad 0],\quad G = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$$

将系统矩阵改写为

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \tilde{B}G\tilde{C} + \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}\Gamma[R \quad 0] := \tilde{A}_0 + \tilde{L}\Gamma\tilde{R} \tag{18}$$

由定理 1, 闭环系统(17) 是 ESPR 的, 只需 $\exists\, \tilde{Q} > 0$, 使得

$$\Omega + \Theta G \Xi + (\Theta G \Xi)^{\mathrm{T}} < 0 \tag{19a}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega & \Theta \\ \Xi & * \end{bmatrix} := \left[\begin{array}{ccc|c} \hat{A}_0\tilde{Q} + \tilde{Q}\hat{A}_0^{\mathrm{T}} + \gamma^2\tilde{L}\tilde{L}^{\mathrm{T}} & \hat{B} - \tilde{Q}\hat{C}^{\mathrm{T}} & \tilde{Q}\tilde{R}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} & B \\ \tilde{B}^{\mathrm{T}} - \hat{C}\tilde{Q} & -(\hat{D} + \hat{D}^{\mathrm{T}}) & 0 & \tilde{D} \\ F\tilde{R}\tilde{Q} & 0 & -I & 0 \\ \hline \tilde{C}\tilde{Q} & 0 & 0 & * \end{array}\right] \tag{19b}$$

由引理 2, 式(19) 等价于

$$\Theta^{\perp}\Omega\Theta^{\perp\mathrm{T}} < 0,\quad \Xi^{\mathrm{T}\perp}\Omega\Xi^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}} < 0 \tag{20}$$

令　$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} X & Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_{22} \end{bmatrix}$, $\tilde{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22} \end{bmatrix}$

其中 $X \in R^{n_p \times n_p}$, $Y \in R^{n_p \times n_p}$。直接计算可知(20) 等价于

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\D\end{bmatrix}^{\perp} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} A_0X+XA_0^{\mathrm{T}}+\gamma^2LL^{\mathrm{T}} & B-XC^{\mathrm{T}} & XR^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}\\ B^{\mathrm{T}}-CX & -D-D^{\mathrm{T}} & 0\\ \hline FRX & 0 & -I\end{array}\right]\times$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\D\end{bmatrix}^{\perp\mathrm{T}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}<0 \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}\perp} & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} YA_0+A_0^{\mathrm{T}}Y+R^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}FR & YB-C^{\mathrm{T}} & \gamma YL\\ B^{\mathrm{T}}Y-C & -D-D^{\mathrm{T}} & 0\\ \gamma L^{\mathrm{T}}Y & 0 & -I\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}} & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

由 $\tilde{Q}\tilde{Q}^{-1}=I$ 可知

$$X-Y^{-1}=Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}X & I\\ I & Y\end{bmatrix}\geq 0 \tag{23}$$

综上所述, 可给出输出反馈 ESPR 控制可解条件为:

定理 3 若存在矩阵 $X>0$ 和 $Y>0$, 满足 LMIs(21～23), 则存在输出反馈控制器使得闭环系统是 ESPR 的。

当定理 3 条件满足时, 参照文献[8,9], 可构造出阶数 $n_c\leq \mathrm{rank}(X-Y^{-1})$ 的 ESPR 控制器, 这里仅列出控制器构造的主要步骤:

1) 做满秩分解 $I-XY=M^{\mathrm{T}}N$;

2) 求解代数方程 $\tilde{Q}\begin{bmatrix}X & I\\ N^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & Y\\ 0 & M^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$;

3) 将 $\tilde{Q}$ 代入 LMI(19), 求解(19) 即得 ESPR 控制器。

令 $\theta=\gamma^{-2}$, 注意到 LMI(21) 和(22) 分别等价于

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\D\end{bmatrix}^{\perp} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|cc} A_0X+XA_0^{\mathrm{T}} & B-XC^{\mathrm{T}} & XR^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} & L\\ B^{\mathrm{T}}-CX & -D-D^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ \hline FRX & 0 & -I & 0\\ L^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\theta I\end{array}\right]\times$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\D\end{bmatrix}^{\perp\mathrm{T}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}<0 \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}\perp} & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} YA_0+A_0^{\mathrm{T}}Y+R^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}FR & YB-C & YL\\ (YB-C)^{\mathrm{T}} & -D-D^{\mathrm{T}} & 0\\ L^{\mathrm{T}}Y & 0 & -\theta I\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}} & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}<0 \tag{25}$$

类似于状态反馈, 通过求解优化问题

$$\theta_m=\min_{(X,Y,\theta)\text{满足LMI}(23\sim 25)}\theta$$

则当 $\gamma\leq 1/\theta_m$ 时, 闭环系统保持 ESPR 性。

5 结 语

本文所讨论的摄动系统具有实际应用背景, 同时还是区间系统和范数有界不确定系统的自然推广。另外, 这种较简单形式的非线性相关摄动, 可作为一般非线性摄动的近似表示, 研究其鲁棒性能和控制问题是有意义的。文中基于 LMI, 给出了鲁棒正实判据、综合问题可解性条件及控制器设计方法, 均可利用有效的凸优化算法求解。由于这些结果都是充分的, 因此进一步的工作将是分析其保守性。

参考文献(References):

[1] Djukanovic M, Khammash M, Vittal V. Application of the structured singular value theory for robust stability and control analysis in multimachine power systems—Part I: Framework development[J]. *IEEE Trans on Power Systems*, 1998, 13(4): 1311-1316.

[2] Marquez H J, Agathoklis P. On the existence of robust strictly positive real rational functions[J]. *IEEE Trans on Circuit Syst*, 1998, 45: 962-967.

[3] 王龙, 郁文生. 严格正实域的完整刻画和鲁棒严格正实综合方法[J]. 中国科学(E 辑), 1999, 29(6): 532-545.
(Wang L, Yu W S. Complete charactevization of robust strict positive realness domain and robust strict positive realness systhesis[J]. *Science in China (Series E)*, 1999, 29(16): 532-545.)

[4] Wang L. Unified approach to robust performance of a class of transfer functions with multilinearly correlated perturbations[J]. *J of Optimization Theory and Applications*, 1998, 96(3): 709-721.

[5] 黄琳. 稳定性理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.

[6] Sun W, Khargonekar P P, Shim D. Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems[J]. *IEEE Trans on Automatica Control*, 1994, 39(10): 2034-2046.

[7] Boyd S P, Ghaoei L E, Feron E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia, SIAM Studies on Applied Mathematics, 1994.

[8] Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis[A]. *Proc of ACC*[C]. Baltimore, 1994. 2396-2400.

[9] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1994, (4): 421-448.