第 17 卷 第 6 期 控 制 与 决 策 2002 年 11 月
Vol. 17 No. 6 Control and Decision Nov. 2002

文章编号: 1001-0920(2002) 06-843-04

期望指标下一类线性周期系统鲁棒状态估计

刘世前, 郭 治, 钱龙军, 王远钢
(南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094)

摘 要: 针对满足多重区域指标约束的鲁棒滤波问题, 以离散线性周期系统为研究对象, 利用周期系统参数在某区间变化的特性, 将周期系统满足极点或极点/协方差指标的估计问题转化为区间系统的鲁棒估计问题。采用线性矩阵不等式(LMIs)法进行凸优化, 求解对应区间系统的满意估计增益, 并设计相应鲁棒状态估计器。数值算例验证了相关的结论。

关键词: 线性周期系统; 鲁棒估计; 多指标滤波
中图分类号: TP 13 文献标识码: A

Robust state estimation with desired indices of a class of linear periodic systems

LIU Shi-qian, GUO Zhi, QIAN Long-jun, WANG Yuan-gang
(Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Robust state estimation with multiple regional performance requirements is studied for a class of discrete-time linear periodic systems. According to characteristics of matrix parameters of periodic systems periodically varying in some certain regions, the problem of robust estimation with desired pole and variance indices of periodic systems is converted into the problem of interval systems. LMI method is applied to solve convex optimization, and a satisfactory robust state estimator under constrains of the indices is designed. A numerical example illustrates the results.

Key words: linear periodic systems; robust estimation; multiple indices filter

1 引 言

现代工程经常对系统提出一些期望指标, 比如跟踪系统需要满足一定的随机穿越频率与滞留度。多重指标约束下定常系统的鲁棒状态估计已有不少学者进行了研究, 文献[1]将融有暂态指标、约束协方差配置的估计问题, 通过逆解某个 Riccati 方程方法来解决, 但随着指标增加, 寻找这样的 Riccati 方程越来越困难; 文献[2]将上述多个 Riccati 方程融为多个线性矩阵不等式组, 但他们大多针对连续线性定常随机系统或定常不确定系统进行研究。而周期系统在信号处理、计算机控制等工程实际中已大量出现, 对这类系统进行多指标的鲁棒滤波研究是十分有意义的。

本文针对离散线性周期系统, 利用周期系统参数矩阵在某区间上变化的特性, 将周期时变系统滤波问题转化为含不确定模型误差系统的鲁棒滤波问

收稿日期: 2001-08-09; 修回日期: 2001-10-09
基金项目: 国家自然科学基金项目(60174028)
作者简介: 刘世前(1971—), 男, 江苏兴化人, 博士生, 从事满意控制与估计、图像处理等研究; 郭治(1937—), 男(满族), 辽宁义县人, 教授, 博士生导师, 从事满意控制与火力控制等研究。

题,间接进行周期系统满足极点/约束方差等多指标鲁棒滤波器的设计。

2 问题描述

考虑如下离散线性 N-周期时变系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + w(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + v(k) \end{cases} \quad (1)$$

式中,$x(k) \in R^{n_x}$ 为系统状态向量;$y(k) \in R^{n_y}$ 为测量输出向量;$w \in R^{n_w}$ 和 $v \in R^{n_v}$ 分别为模型噪声与测量噪声,它们是零均值、方差分别为 $W > 0, V > 0$ 的互不相关高斯白噪声;$A(k) \in R^{n_x \times n_x}$ 和 $C(k) \in R^{n_y \times n_x}$ 是周期为 N 的有界实时变矩阵,即

$$\begin{cases} A(k+N) = A(k), \\ C(k+N) = C(k), \end{cases} \quad k = 0, 1, \cdots, N-1 \quad (2)$$

且 $(A(k), C(k))$ 可检测。

由于线性周期时变系统(1) 参数矩阵为有界实时变矩阵,即模型矩阵 $A(i) \in [\underline{A}, \bar{A}]$, $C(i) \in [\underline{C}, \bar{C}]$, $i = 1, 2, \cdots, N-1$, 所以在任一周期内系统(1) 可以近似为某一区间变化系统,且容易证明[3]。区间系统可等价地表示为如下不确定系统形式

$$\begin{cases} x(k+1) = (A_0 + H_1FE)x(k) + w(k) \\ y(k) = (C_0 + H_2FE)x(k) + v(k) \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$A_0 = (\underline{A} + \bar{A})/2, \quad C_0 = (\underline{C} + \bar{C})/2 \quad (4)$$

$E \in R^{j \times n_x}$, $H_1 \in R^{n_x \times l}$ 和 $H_2 \in R^{n_y \times l}$ 为实定常矩阵; F 为 Lebesgue 可测的不确定矩阵,且 $F \in F^* := \{F \in R^{l \times j} \mid FF^T \leq \zeta I\}$, ζ 为不确定强度系数, I 为单位阵。

这样可以把周期系统(1) 的滤波问题转化为不确定系统(3) 的滤波问题。相应的一步稳态预估型滤波器为

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + K(y(k) - \hat{C}\hat{x}(k)) \quad (5)$$

式中, $\hat{x}(k) \in R^{n_x}$, $\hat{A} \in R^{n_x \times n_x}$, $\hat{C} \in R^{n_y \times n_x}$, $K \in R^{n_x \times n_y}$ 为待定的滤波增益。

定义 1 $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ 为状态滤波误差。

为了描述问题方便,不妨取 $\hat{A} = A_0$, $\hat{C} = C_0$。参照系统(1) 和(3) 及滤波方程(5),可得误差系统

$$e(k+1) = (A_0 - KC_0)e(k) + (H_1FE - KH_2FE)x(k) + w(k) - Kv(k) \quad (6)$$

记 $\tilde{x}(k) = [x(k) \quad e(k)]^T$,则得增广系统

$$\tilde{x}(k+1) = (\tilde{A} + \tilde{H}F\tilde{E})\tilde{x}(k) + \tilde{w}(k) \quad (7)$$

式中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0 - KC_0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} E^T \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 - KH_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} w \\ w - Kv \end{bmatrix}$$

若增广系统(7) 稳定,则其稳态状态协方差

$$X = \lim_{k \to \infty} \mathrm{E}[(\tilde{x}(k) - \bar{\tilde{x}}(k))(\tilde{x}(k) - \bar{\tilde{x}}(k))^T] \quad (8)$$

存在,且满足

$$X = A_f X A_f^T + \tilde{W} \quad (9)$$

式中, $A_f = (\tilde{A} + \tilde{H}F\tilde{E})$, $\bar{\tilde{x}}(k)$ 为 $\tilde{x}(k)$ 的平均值, $\tilde{W}$ 为 $\tilde{w}$ 的协方差。

为使鲁棒估计器具有良好的动态、稳态特性,要求设计的滤波增益 K 满足如下约束:

1) 状态估计误差协方差 $X_e = \lim_{k \to \infty} \mathrm{E}[e(k)e^T(k)]$ 满足 $\mathrm{diag}\, X_e \leq \mathrm{diag}\, \sigma^2$, 式中 σ^2 为给定的状态估计误差方差上界, $\mathrm{E}[\cdot]$ 表示数学期望;

2) 增广系统极点集 $\Lambda A_f \subset \Phi(0, r)$, 其中 $\Phi(0, r)$ 表示复平面上以原点为圆心, 半径为 r 的开圆盘($r < 1$), 且此开圆盘含 A_0 的不可观特征值。

3 极点指标下鲁棒滤波器设计

为了得到本文的结论,需引用如下引理:

引理 1(Schur Complements) 设 X, Y, Z 为适维矩阵,且 X 和 Z 为对称阵,则

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

等价于 $Z - Y^T X^{-1} Y < 0$ 且 $X < 0$ 或 $X - YZ^{-1}Y^T < 0$ 且 $Z < 0$。

引理 2[4] 给定适维实常数矩阵 Y, Z 和对称实矩阵 M, 则不等式

$$M + YFZ + (YFZ)^T < 0 \quad (11)$$

对 $\forall F \in F^*$ 成立, 当且仅当存在某个标量 $\epsilon > 0$, 使

$$M + \epsilon\zeta^2 YY^T + \epsilon^{-1} Z^T Z < 0 \quad (12)$$

引理 3[5] 如果系统

$$x(k+1) = Ax(k) + w(k)$$

满足不等式组

$$AQA^T - r^2 Q < 0 \quad (13)$$

$$-Q + AQA^T + W < 0, \quad Q > 0 \quad (14)$$

则 $\Lambda A \subset \Phi(0, r)$ 且其稳态状态协方差

$$X = \lim_{k \to \infty} \mathrm{E}[x(k)x^T(k)] < Q$$

令 $Q^{-1} = R = \mathrm{diag}(R_1, R_2)$, $R_2 K = J$, 利用上述引理,可得:

定理 1　增广系统(7) 存在滤波增益 K 满足极点指标 2), 当且仅当实变量 ϵ_1, ϵ_2 和矩阵变量 R, J 的以下不等式组有可行解

$$\Psi_1(\epsilon_1, R, J) < 0 \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} & & \cdots & R_1 & 0 \\ \Psi_2(\epsilon_2, R, J) & & & R_2 & J \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ R_1 & R_2 & & -W^{-1} & 0 \\ 0 & J^{\mathrm{T}} & \cdots & 0 & -V^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

其中

$\Psi_1(\epsilon_1, R, J) =$

$$\begin{bmatrix} -\epsilon_1^{-1}I & 0 & \zeta H_1^{\mathrm{T}}R_1 & \zeta S_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_1^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta R_1H_1 & 0 & -rR_1 & 0 & R_1A_0 & 0 \\ \zeta S_2 & 0 & 0 & -rR_2 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & A_0^{\mathrm{T}}R_1 & 0 & -rR_1+\epsilon_1^{-1}E^{\mathrm{T}}E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_1^{\mathrm{T}} & 0 & -rR_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$\Psi_2(\epsilon_2, R, J)$ 满足 $\Psi_2(\epsilon_2, R, J) = \Psi_1(\epsilon_2, R, J)$ 且 $r = 1, S_2 = R_2H_1 - JH_2, S_1 = R_2A_0 - JC_0$; 而且若($\epsilon_1, \epsilon_2; R, J$) 是上述不等式组的任一解, 则 $K = R_2^{-1}J$ 就是一个满足指标 2) 的滤波增益, 而 R^{-1} 是增广系统(7) 的稳态状态协方差矩阵集合 X_K 的一个上界, 即 $\forall F \in F^*$ 恒有 $X < R^{-1} = Q$。

证明(必要性)　根据引理 3, 满足极点指标的滤波增益 K 一定满足

$$(\tilde{A} + \tilde{H}F\tilde{E})Q(\tilde{A} + \tilde{H}F\tilde{E})^{\mathrm{T}} - r^2Q < 0 \tag{18}$$

$$-Q + (\tilde{A} + \tilde{H}F\tilde{E})Q(\tilde{A} + \tilde{H}F\tilde{E})^{\mathrm{T}} + \hat{W} < 0 \tag{19}$$

且 $Q > 0$。将 $Q^{-1} = R, R_2K = J$ 代入式(18) 可得

$$-r^2R + (R\tilde{A} + R\tilde{H}F\tilde{E})R^{-1} \times (R\tilde{A} + R\tilde{H}F\tilde{E})^{\mathrm{T}} < 0 \tag{20}$$

即

$$-r^2R + \begin{bmatrix} R_1A_0 + R_1H_1FE & 0 \\ S_2FE & S_1 \end{bmatrix} R^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R_1A_0 + R_1H_1FE & 0 \\ S_2FE & S_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} < 0 \tag{21}$$

利用引理 1 得

$$\begin{bmatrix} -r_1R_1 & 0 & R_1A_0 & 0 \\ 0 & -rR_2 & 0 & S_1 \\ A_0^{\mathrm{T}}R_1 & 0 & -rR_1 & 0 \\ 0 & S_1^{\mathrm{T}} & 0 & -rR_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1H_1 \\ S_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + [0\ \ 0\ \ E^{\mathrm{T}}\ \ 0]^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}[H_1^{\mathrm{T}}R_1\ \ S_2^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0] < 0 \tag{22}$$

利用引理 2 知存在某正常数 ϵ_1, 使得

$$\begin{bmatrix} -rR_1 + \epsilon_1\zeta^2R_1H_1H_1^{\mathrm{T}}R_1 & \epsilon_1\zeta^2R_1H_1S_2^{\mathrm{T}} & R_1A_0 & 0 \\ \epsilon_1\zeta^2S_2H_1^{\mathrm{T}}R_1 & -rR_2 + \epsilon_1\zeta^2S_2S_2^{\mathrm{T}} & 0 & S_1 \\ A_0^{\mathrm{T}}R_1 & 0 & -rR_1 + \epsilon_1^{-1}E^{\mathrm{T}}E & 0 \\ 0 & S_1^{\mathrm{T}} & 0 & -rR_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{23}$$

再利用引理 1, 得上式等价于式(15), 于是($\epsilon_1; R, J$) 是 LMI(15) 的一组可行解。

同理, 反复利用引理 1 和引理 2, 不等式(19) 可转化为 LMI(16), 且存在某正常数 ϵ_2, 使得($\epsilon_2; R, J$) 是 LMI(16) 的一组可行解。综合二者得($\epsilon_1, \epsilon_2; R, J$) 是 LMI 组(15) 和(16) 的一个可行解, 由变量代换得 $K = R_2^{-1}J$, 再由引理 3 可得 $\forall F \in F^*$, 恒有 $X < R^{-1} = Q$。

将上述过程逆推, 即可得到充分性证明。□

4　极点/协方差指标下的满意滤波器设计

指标 1) 和 2) 是否相容以及相容解如何求取是周期系统满意滤波必须解决的问题。如果能找到一个定常滤波增益 K, 使得增广系统(7) 同时满足约束 1) 和 2), 则约束 1) 和 2) 相对系统(3) 的定常状态估计是相容的。

引理 4[5]　若记 $R_U = \mathrm{diag}(R_{1U}, R_{2U})$ 是 LMI(15) 和(16) 约束下 $\mathrm{Max}\{\mathrm{tr}R\}$ 的相应极大阵, 令 $Q_L = R_U^{-1}$, 则满足

$$\mathrm{diag}\,\sigma^2 > \mathrm{diag}(Q_L) \tag{24}$$

的误差方差上界指标 σ^2 与极点指标 $\Phi(0, r)$ 相容。

由引理 4 及定理 1 知, 满足约束 1) 和 2) 的满意滤波增益可由下述定理给出。

定理 2　系统(7) 给定极点指标 2), 若误差方差上界指标满足式(24), 则线性不等式组(15) 和(16) 及

$$\begin{bmatrix} -Q_t & I \\ I & -R \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$

必有可行解, 若(R, J)是其任一可行解, 则$K = R_2^{-1}J$是期望的满意滤波增益。其中Q_t满足$Q_t = \mathrm{diag}(Q_{1t}, Q_{2t})$, $\mathrm{diag}(Q_{2t}) = \mathrm{diag}\,\sigma^2$, 且$Q_t > Q_L$。

证明 因为不等式组(15)和(16)有解, 所以有$R \leq R_U$, 而由式(25)知$R > Q_t^{-1}$, 且$Q_t^{-1} < Q_L^{-1} = R_U$, 故总能找到一个非常接近$R_U$的$R$使其满足$Q_t^{-1} < R < R_U$。由定理1可知可行解$(R, J)$满足极点指标。再根据引理4知滤波增益$K = R_2^{-1}J$为满足约束1)和2)的满意滤波增益。□

注1 利用Matlab软件中LMI工具箱对上述线性不等式组(15), (16)和(25)求可行解(R, J), 或对上述线性不等式组求$\mathrm{Min}\{\mathrm{tr}R\}$的解$(R, J)$。

5 数值算例

考虑如下形式的周期系统

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 3+0.5\sin(kT_s) & 0.2\cos(kT_s)+0.4 \end{bmatrix} x(k) + w(k) \tag{26}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1-4.5\cos(kT_s) & -1.8\sin(kT_s) \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} x(k) + v(k) \tag{27}$$

其中, $T_s = \pi/4$ ms为采样间隔, $\zeta = 1$, 噪声$w(k)$和$v(k)$的强度为$W = \mathrm{diag}(0.01, 0.01)$, $V = \mathrm{diag}(1, 1)$, 在满足指标: 1) 极点$\Lambda(A_f) \subset \Phi(0, 0.9)$; 2) 滤波误差方差上界$\mathrm{diag}\,\sigma^2 = \mathrm{diag}(3^2, 11^2)$下, 试对$x(k)$进行滤波处理。

采用式(3)有

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 3 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^0 = \mathrm{diag}(1, 0.1), \quad F = \delta \in [-1, 1]$$

选定$\epsilon_1 = 2\,000$, $\epsilon_2 = 2\,000$, 在约束LMI组(15)和(16)下, 由$\mathrm{Max}\{\mathrm{tr}R\}$求得$R_U^{-1} = Q_L$。易知$\mathrm{diag}\,\sigma^2 > \mathrm{diag}(Q_L)$, 故满意估计增益$K$存在。再根据定理2取

$$Q_{1t} = \begin{bmatrix} 16 & -53.229 \\ -53.229 & 625 \end{bmatrix}$$

$$Q_{2t} = \begin{bmatrix} 9 & 8.197 \\ 8.197 & 121 \end{bmatrix}$$

由$\mathrm{Min}\{\mathrm{tr}R\}$满足LMI组(15), (16), (25)及关系$K = R_2^{-1}J$可得

$$K = \begin{bmatrix} -0.000 & 0.196 \\ -0.111 & 2.697 \end{bmatrix}, \quad X_e = \begin{bmatrix} 0.054 & 0.594 \\ 0.594 & 8.438 \end{bmatrix}$$

误差系统(6)的极点

$$\lambda(A_{f_2}) = 0.315\,2 \pm \mathrm{i}0.164\,2$$

而系统(3)的极点$\lambda(A_{f_1})$保持不变。

6 结 论

本文研究了一类离散线性周期系统鲁棒估计问题。利用周期系统参数在区间上变化的特性, 将上述问题转化为区间系统满足区域极点/方差等多指标鲁棒滤波问题, 并通过LMI方法进行优化设计鲁棒滤波器, 同时, 给定的指标都是区域指标, 更贴近实际工程。此外, 由于线性周期系统在各个周期内特性基本相同, 将任一周期内的鲁棒状态估计扩展到整个周期系统也是可行的。算例表明, 估计误差方差与对应极点都满足期望指标1)和2)。当然, 对线性周期系统多指标的满意控制以及寻找更直接描述周期系统的方法等问题还有待于进一步研究。

参考文献(References):

[1] Hotz A F. Direct variance design——A multiobjective control theory[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(1): 174-184.

[2] 胡金春, 郭治. 未来空域窗的参数论证[J]. 兵工学报, 1999, 20(1): 13-18.
(Hu Jin-chun, Guo Zhi. Parameter demonstration of future airspace window[J]. *Acta Armamentara*, 1999, 20(1): 13-18.)

[3] 吴方向, 史忠科, 戴冠中. 区间系统的H_∞鲁棒控制[J]. 自动化学报, 1999, 25(5): 705-708.
(Wu Fang-xiang, Shi Zhong-ke, Dai Guan-zhong. H_∞ robust control for interval systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(5): 705-708.)

[4] Xie L, M Fu, C E De Souza. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1253-1256.

[5] 王远钢, 夏璇. 离散控制系统中圆形极点与方差上界约束的相容性[J]. 南昌航空工业学院学报, 1999, 13(4): 13-16.
(Wang Yuan-gang, Xia Xuan. Consistency of constraint indices on circular pole and variance with upper bound[J]. *J of Nanchang Institute of Aeronautical Technology*, 1999, 13(4): 13-16.)