

文章编号: 1001-0920(2002)06-859-04

基于频域的广义预测控制器(GPC)的稳定性分析

毛宗星, 陈增强, 孙青林, 袁著祉
(南开大学 自动化系, 天津 300071)

摘要: 首先推导了广义预测控制器(GPC)的闭环反馈结构, 然后采用频域响应法分析了 GPC 控制下闭环系统的频率特性。根据对闭环系统频率特性的分析设计 GPC 的参数, 使得系统具有满意的稳定性和过渡特性。

关键词: 预测控制; 稳定性; 频域响应; 奈奎斯特判据; 伯德图
中图分类号: TP 273 **文献标识码:** A

Stability analysis of generalized predictive control based upon frequency domain

MAO Zong-xing, CHEN Zeng-qiang, SUN Qing-lin, Yuan Zhu-zhi
(Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: The closed-loop feedback structure of generalized predictive control (GPC) is proposed. Frequency response method is used to analyze the frequency characteristics of the closed-loop system under the control of GPC. In accordance with the analysis to the closed-loop system frequency characteristics, the tuning parameters of GPC are designed to make the system have satisfactory stability and transition characteristics.

Key words: predictive control; stability; frequency response; Nyquist criterion; Bode figure

1 引言

广义预测控制(GPC)^[1]自形成以来, 由于其具有良好的动态性能和很强的适应能力, 因而获得了控制界的高度重视。然而预测控制的实际应用已经领先于其理论分析。由于 GPC 中引进了多步预测, 并在有限时域内进行优化, 因而其算法具有一定的特殊性。控制器的主要设计参数 N , N_u , λ 及 α 都蕴含在闭环传递函数中, 并且对闭环系统的影响呈严重的

非线性性, 因此对稳定性进行量化分析具有相当的难度。目前已有的关于 GPC 稳定性分析的结果, 大都是针对一些比较特殊情况进行的^[2-4]。一般是将 N 趋于无穷, 使 GPC 趋于通常的 LQG 来获得稳定性。对于 N 为有限时的结论, 大都是在加权因子 $\lambda = 0$ 的条件下获得的, 适当选取 N_u 和预测的上下时域, 可以达到 dead-beat 控制或 mean-level 控制。

针对目前 GPC 的稳定性分析与设计尚缺乏有效的实用性方法的情况, 我们给出 GPC 稳定性分析

收稿日期: 2001-09-10; 修回日期: 2001-11-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(60174021); 国家科技攻关计划(2001BA204B01-02); 天津自然科学基金重点项目(013800711)

作者简介: 毛宗星(1975—), 男, 山东日照人, 博士生, 从事自适应控制、预测控制等研究; 袁著祉(1937—), 男, 山东青岛人, 教授, 博士生导师, 从事自适应控制、预测控制、工业过程控制等研究。

与设计中的频域方法。由于频域理论的稳定性分析与设计具有丰富的内容,且闭环系统的频域特性更能深刻地反映系统的本质性能,本文在离散域内设计控制器,给出闭环的反馈结构形式,再通过频域上的分析方法(如奈奎斯特图、伯德图、根轨迹图等)进行稳定性分析,并观察 N, N_u, λ 及 α 等控制器参数变化时对闭环性能的影响,用以指导控制器的设计。

2 广义预测控制器(GPC)

首先对 GPC^[1] 进行简要描述。假设 GPC 基于下面的离散时间动态系统

$$\begin{aligned} y(k) &= G(z^{-1})u(k) \\ G(z^{-1}) &= z^{-1}B(z^{-1})/A(z^{-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

GPC 的目标函数为

$$\begin{aligned} J = & \sum_{j=1}^N [\hat{y}(k+j|k) - w(k+j)]^2 + \\ & \sum_{j=1}^{N_u} \lambda [\Delta u(k+j-1)]^2 \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\{\hat{y}(k+j|k)\}$ 表示对 $y(k)$ 的向前多步预测序列, N 为预测时域, N_u 为控制时域, $\lambda(\lambda > 0)$ 为控制加权因子, $\{w(k+j)\}$ 为要跟踪的设定值柔化序列,由如下方程所产生

$$\begin{aligned} W = [w(k+1), \dots, w(k+N)]^T = \\ F_{\alpha y}(k) + F_{\alpha y_r}(k) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 为柔化因子,而

$$\begin{aligned} F_{\alpha} = [\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^N]^T \\ F_{\alpha} = [1 - \alpha, 1 - \alpha^2, \dots, 1 - \alpha^N]^T \end{aligned}$$

为了得到输出的向前第 j 步预测值 $\hat{y}(k+j|k)$, 需求解如下两组丢番图方程

$$1 = E_j(z^{-1})A(z^{-1})\Delta + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = G_j(z^{-1}) + z^{-j}H_j(z^{-1}) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

定义

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & g_0 \\ g_{N-1} & \dots & \dots & g_{N-N} \end{bmatrix}_{N \times N_u}$$

$$F = F(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})\Delta u(k-1) \quad (6)$$

其中 g_i 是 $G_N(q^{-1})$ 中关于 q^{-i} 项的系数,而

$$\begin{aligned} F(z^{-1}) &= [F_1(z^{-1}), \dots, F_N(z^{-1})]^T \\ H(z^{-1}) &= [H_1(z^{-1}), \dots, H_N(z^{-1})] \end{aligned}$$

优化目标函数(2)得到的控制律为

$$\Delta u(k) = h^T(W - F) \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} h^T = [1, 0, \dots, 0][G^T G + M]^{-1} G^T = \\ [h_1, \dots, h_N] \end{aligned}$$

3 GPC 的闭环反馈系统

将式(3)和式(6)代入(7),得

$$\Delta u(k) = h^T [F_{\alpha y_r}(k) - (F(z^{-1}) - F_{\alpha})y(k) - z^{-1}H(z^{-1})\Delta u(k)] \quad (8)$$

由式(8)得

$$T(z^{-1})\Delta u(k) = Ry_r(k) - S(z^{-1})y(k) \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} T(z^{-1}) &= 1 + z^{-1}h^T \bar{H}(z^{-1}) = \\ & 1 + z^{-1} \sum_{j=1}^N h_j H_j(z^{-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$R = h^T F_{\alpha} = \sum_{j=1}^N h_j (1 - \alpha^j) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S(z^{-1}) &= h^T (F(z^{-1}) - F_{\alpha}) = \\ & \sum_{j=1}^N h_j F_j(z^{-1}) - \sum_{j=1}^N h_j \alpha^j \end{aligned} \quad (12)$$

定理 1 GPC 控制下闭环系统稳定的充要条件是 $A(z^{-1})T(z^{-1})\Delta + z^{-1}B(z^{-1})S(z^{-1})$ 是 Hurwitz 多项式。

证明 将方程(1)两边同乘以 $T(z^{-1})\Delta$, 再将(9)代入(1)得

$$\begin{aligned} y(k) = \\ \frac{z^{-1}B(z^{-1})R}{A(z^{-1})T(z^{-1})\Delta + z^{-1}B(z^{-1})S(z^{-1})} y_r(k) \end{aligned} \quad (13)$$

由此式可得 GPC 控制下的闭环系统稳定的充要条件是其分母为 Hurwitz 多项式。

进一步,由式(13)可得图 1 所示的 GPC 控制下的闭环反馈系统为

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{G(z^{-1})}{1 + G(z^{-1})H(z^{-1})} D(z^{-1})y_r(k) \quad (14) \\ H(z^{-1}) &= \frac{S(z^{-1})}{T(z^{-1})\Delta}, \quad D(z^{-1}) = \frac{R}{T(z^{-1})\Delta} \end{aligned} \quad (15)$$

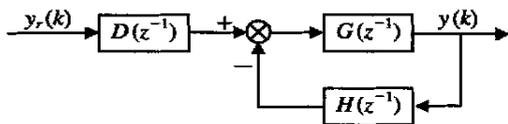


图 1 GPC 控制下的闭环反馈系统

由图可见,前馈通道的传递函数为 $D(z^{-1}) =$

$R/T(z^{-1})\Delta$, 反馈通道的传递函数为 $H(z^{-1}) = S(z^{-1})/T(z^{-1})\Delta$, 因此改变参数 N, N_u, λ 及 α 对系统的前馈通道和反馈通道均有影响。另外, 由于定量分析这些参数对系统性能的影响具有一定难度, 所以采用频域响应法来分析。

4 基于频率响应法的 GPC 稳定性分析与设计

频率响应法是应用频率特性研究控制系统的一种经典方法, 它有以下特点:

1) 应用奈奎斯特判据和幅频-相频响应判据等, 可以根据系统的开环频率特性研究闭环系统的稳定性, 而不必解出特征方程根;

2) 频率特性与过渡过程性能指标之间有一定的对应关系, 可以通过研究频率特性, 把系统参数的变化与过渡过程性能指标联系起来;

3) 当系统在某些频率范围内存在严重的噪声时, 应用频率响应法, 可以设计出能够满意抑制这些噪声的系统。

本节采用频率响应法来研究反馈通道的稳定性。由图 1 可得反馈通道的特征方程为

$$1 + G(z^{-1})H(z^{-1}) = 0 \quad (16)$$

所以只需考虑

$$G(z^{-1})H(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B(z^{-1})S(z^{-1})}{A(z^{-1})T(z^{-1})\Delta} =$$

$$\Phi(z)/\Psi(z) = G^*(z) \quad (17)$$

的频率响应。基于离散域内奈奎斯特判据和对数频率稳定判据(伯德图), 可得 GPC 下闭环系统稳定的两个定理。

定理 2 设 $A(z^{-1})T(z^{-1})\Delta$ 在单位圆外根的个数为 P , $G^*(z)$ 的奈奎斯特曲线反时针围绕 $(-1, j0)$ 的圈数为 R , 则反馈控制系统稳定的充要条件是 $\tilde{P} = R$ 。

证明 设闭环特征方程 $1 + G(z^{-1})H(z^{-1})$ 在单位圆外的特征根的个数为 Z , 则由奈奎斯特判据知 $Z = P - R$, 由 $\tilde{P} = R$ 知 $Z = 0$, 所以闭环方程没有在单位圆外的特征根; 另外由于奈奎斯特曲线的圈数是定值, 所以特征方程没有在单位圆上的根(临界稳定根), 因此闭环系统稳定。

注 1 如果 $A(z^{-1})T(z^{-1})\Delta$ 在单位圆上有根, 则这些根的个数不必记入在 \tilde{P} 的数目中。但此时奈奎斯特曲线不封闭。例如 $A(z^{-1})T(z^{-1})\Delta$ 中可能包含 v 个积分环节 $1/\Delta$, 则绘制奈奎斯特曲线后, 应从

与频率 0^+ 对应的点开始, 反时针方向补画 v 个半径为无穷大的圆。这样 $G(z^{-1})H(z^{-1})$ 的轨迹也就变成了有固定圈数的封闭曲线。

推论 1 设系统开环稳定($A(z^{-1})$ 的根都在单位圆内), 并且控制器的设计使得 $T(z^{-1})$ 不含单位圆外的根, 则闭环稳定的充要条件是 $G(z^{-1})H(z^{-1})$ 的轨迹不围绕 $(-1, j0)$ 点。

定理 3 设 $A(z^{-1})T(z^{-1})\Delta$ 在单位圆外的根的个数为 \tilde{P} , 并且在 $G^*(z)$ 的对数幅频曲线大于 0 dB 的频率范围内, 如果对数相频曲线穿越 -180° 线的次数为 N , 则闭环系统稳定的充要条件是 $\tilde{P} = 2N$ 。

证明略。

注 2 当 $G^*(z)$ 包含 v 个积分环节 $1/\Delta$ 时, 在相频曲线 ω 为 0^+ 的地方, 应补画一条从相角 $G^*(j0) + v \cdot 90^\circ$ 到 $G^*(j0)$ 的虚线。计算正穿越次数时, 应将补上的虚线看成对数相频曲线的一部分。

应用定理 2 和定理 3, 便可采用奈奎斯特图和伯德图对 GPC 进行稳定性分析, 并指导参数设计。

5 仿真研究

本节对如下系统

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 - s + 1)}, \quad T = 1 \text{ s}$$

离散化模型

$$G(z^{-1}) = \frac{0.657 0z^{-1} + 0.925 0z^{-2}}{1 - 3.136 3z^{-1} + 4.854 6z^{-2} - 2.718 3z^{-3}z^{-1}}$$

设计 GPC 控制器, 并在频域上进行稳定性分析。

选择参数: $N = 10, N_u = 4, \lambda = 0.75, \alpha = 0.1$, 得

$$R = 0.085 0$$

$$T(z^{-1}) = 1 + 2.721 2z^{-1} + 2.295 4z^{-2}$$

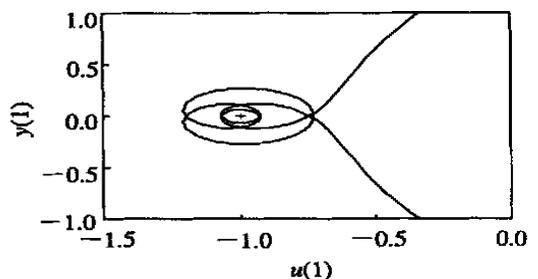


图 2 闭环系统的奈奎斯特响应曲线

$$S(z^{-1}) = 2.7505 - 11.5437z^{-1} + 15.5506z^{-2} - 6.7823z^{-3}$$

绘制 $G^*(z)$ 的奈奎斯特曲线如图 2 所示。

从图中可见 $\tilde{R} = 4$, 由 $A(z^{-1})$ 和 $T(z^{-1})$ 可知 $\tilde{P} = 4$, 于是 $\tilde{P} = \tilde{R}$, 由定理 2 可知闭环系统稳定。

6 结 语

为了克服 GPC 稳定性定量分析的难点和参数设计的盲目性, 本文推导了 GPC 的闭环反馈系统, 采用频率特性方法来表示控制系统的性质, 指导 GPC 的参数设计。所获得的设计方法具有重要的工程实际意义, 为 GPC 的推广与应用开辟了一条有效的途径。

参考文献(References):

[1] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized pre-

dictive control[J]. *Automatica*, 1987, 23(1): 137-160.

[2] Clarke D W, Mohtadi C. Properties of generalized predictive control[J]. *Automatica*, 1989, 25(6): 859-875.

[3] Rawlings J B, Muske K B. The stability of constrained receding horizon control[J]. *IEEE Trans on AC*, 1993, 38(10): 1512-1516.

[4] 席裕庚, 张峻. 广义预测控制系统闭环特性研究[J]. 中国科学(E 辑), 1996, 26(6): 519-527.

(Xi Yugeng, Zhang Jun. The closed-loop properties of generalized predictive control[J]. *Science in China(E)*, 1996, 26(6): 519-527.)

[5] 孙明玮, 陈增强, 袁著祉. 典型工业过程的无超调预测控制设计[J]. 控制与决策, 2000, 15(2): 213-216.

(Sun Mingwei, Chen Zengqiang, Yuan Zhuzhi. Non-overshoot predictive control design for typical industrial process[J]. *Control and Decision*, 2001, 15(2): 213-216.)

(上接第 855 页)

参考文献(References):

[1] 席裕庚. 预测控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.

[2] 王群仙, 陈增强, 袁著祉. 基于 BP 网络的 PID 型预测自校正控制器[J]. 控制与决策, 1998, 13(2): 185-188.

(Wang Qunxian, Chen Zengqiang, Yuan Zhuzhi. PID structure predictive self-tuning controller based on BP neural network[J]. *Control and Decision*, 1998, 13(2): 185-188.)

[3] 李少远, 席裕庚. 具有模糊约束模拟的广义预测控制[J]. 上海交通大学学报, 2001, 35(11): 1631-1634.

(Li Shaoyuan, Xi Yugeng. Parameters tuning of generalized predictive control with fuzzy constraints simula-

tion[J]. *J of Shanghai Jiaotong University*, 2001, 35(11): 1631-1634.)

[4] 李少远, 席裕庚. 基于模糊目标和模糊约束的满意控制[J]. 控制与决策, 2000, 15(6): 674-677.

(Li Shaoyuan, Xi Yugeng. Satisfactory control based on fuzzy goals and fuzzy constraints[J]. *Control and Decision*, 2000, 15(6): 674-677.)

[5] D W Clark, C Mohtadi. Properties of generalized predictive control[J]. *Automatica*, 1989, 25(6): 859-875.

[6] C E Rohrs, M Athans. Some design guidelines for discrete-time adaptive controllers[J]. *Automatica*, 1984, 20(5): 653-660.

(上接第 858 页)

参考文献(References):

[1] Li Shu, Tang Tom, Collins Donald W. Minimum inventory variability schedule with applications in semiconductor fabrication[J]. *IEEE Trans on Semicond Manuf*, 1996, 9(1): 145-149.

[2] Lu Steve C H, Ramaswamy D, Kumar P R. Efficient scheduling policies to reduce mean and variance of cycle-time in semiconductor manufacturing plants[J]. *IEEE Trans on Semicond Manuf*, 1994, 7(3): 373-388.

[3] Harrison J M, Wein L M. Scheduling networks of queues: Heavy traffic analysis of a two-station closed network[J]. *Oper Res*, 1990, 38(6): 1052-1064.

[4] Little J D. A proof for the queueing formula: $N = \lambda W$ [J]. *Oper Res*, 1961, 9(3): 383-387.

[5] Wein L M. On the relationship between yield and cycle-time in semiconductor wafer fabrication [J]. *IEEE Trans on Semicond Manuf*, 1992, 5(2): 156-158.

[6] Yugeng X. Satisfactory control of complicated industrial process[J]. *Information and Control*, 1995, 24(1): 14-20.

[7] Yaron K, Gideon L. Multi-criteria scheduling optimization using fuzzy logic[A]. *Proc of the IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics[C]*, 1998. 445-450.