

文章编号: 1001-0920(2002)06-863-04

一类分段线性混杂系统的最优控制策略研究

翟海峰^{1,2}, 苏宏业^{1,2}, 董利达^{1,2}, 王肖^{1,2}, 褚健^{1,2}

(1. 浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 浙江 杭州 310027; 2. 浙江大学 先进控制研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要: 针对连续模式驻留的时延是确定性的分段线性混杂系统最优控制问题, 首先给出该类混杂系统模型, 采用一种新方法, 即混合动态规划方法来研究混杂系统的最优控制。然后利用 Lyapunov 方法证明采用这种控制策略时混杂系统的稳定性。最后通过一个数值例子来说明所提出方法的有效性。

关键词: 混杂系统; 最优控制; Lyapunov 稳定性

中图分类号: TP 271.8

文献标识码: A

Study on optimal control strategy for a class of piecewise linear hybrid systems

ZHA I H ai-feng^{1,2}, SU H ong-ye^{1,2}, DON G L i-da^{1,2}, WAN G X iao^{1,2}, CHU J ian^{1,2}

(1. National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027,

China; 2. Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The model of hybrid systems restricted to time-deterministic discrete transitions is presented. The quadratic optimal control problem for the hybrid systems is investigated based on mixed dynamical programming methods. The stability of the closed-loop hybrid systems is proved by Lyapunov method. A numerical example illustrates the effectiveness of the design approach.

Key words: hybrid systems; optimal control; Lyapunov stability

1 引言

近年来, 混杂系统已成为人们研究的热点之一, 对混杂系统的控制设计研究也取得了一些成果。Tittus 等^[1]提出了一类线性混杂系统, 即积分系统的基于迭代计算扩展跃变集, 类似于模型检验方法^[2]的一种控制综合方法。Branicky 等^[3]将混杂系统特定的控制综合问题描述成一个含有连续变量和离散事件变量的最优控制问题, 但是对于这样的混杂系统最优控制的一般性问题则很难求解。Stiver

等^[4]提出了基于自然不变集的混杂控制系统综合方法, 然而这样的方法需要对状态空间进行量化和界定处理才能利用较为成熟的离散事件系统方法来解决混杂系统的最优控制问题。

对混杂系统最优控制问题的研究具有很大困难, 虽然已取得了一些成果^[3-5], 但这些成果仍然是比较初步的。本文主要研究一类连续模式驻留时延确定的分段线性混杂系统的最优控制问题, 提出一种混合动态规划方法, 即采用离散动态规划和连续二次最优调节相结合的方法。这种方法能得到混杂

收稿日期: 2001-07-02; 修回日期: 2001-09-04

基金项目: 国家杰出青年基金项目(60025308); 高等学校优秀青年教学和科研奖励基金项目

作者简介: 翟海峰(1974—), 男, 江苏涟水人, 博士生, 从事离散事件与混杂动态系统控制理论等研究; 褚健(1963—), 男, 浙江海盐人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统鲁棒控制、非线性控制等研究。

系统的全局最优解。

2 混杂系统模型与问题描述

本文主要研究驻留在离散状态的时延确定的混杂系统最优控制设计问题。不同的离散变迁可以有不同的时延。

定义1 如果特定的变迁由切换律描述, 则混杂系统 H 可描述为如下分段线性形式

$$\dot{x}(t) = A_{q(t)}x(t) + B_{q(t)}u(t) \quad (1)$$

$$q(t) = \delta(x(t), q(t^-), t) \quad (2)$$

其中 $\delta: \mathbf{R}^n \times Q \times \mathbf{R} \rightarrow Q$ 确定在 t 时刻处于激活状态的连续子系统, 而本文则研究既确定连续输入又同时确定切换逻辑的最优控制实现问题, 下面给出变迁路径的定义。

定义2 对于分段线性混杂系统, 变迁路径定义为

$$r = ((t_0, e_0), (t_1, e_1), \dots, (t_K, e_K)) \quad (3)$$

其中, $t_0 < t_1 < \dots < t_K < t_f$, $0 < K < \infty$, 且 $e_0 = q_0$, $e_K = (q_{K-1}, q_K) \in E$, $k = 1, 2, \dots, K$ 。如果 $K = 0$, $r = (t_0, e_0)$ 。

如上定义, 混杂系统的变迁序列表明, 当 $t_k < t_{k+1}$ 时, 第 q_k 子系统在时间间隔 $[t_k, t_{k+1})$ 上处于激活状态, 则变迁路径由变迁序列 e_k 组成。为了避免混杂系统出现季诺现象, 令 $t_{k+1} - t_k > 0$ 。显然变迁路径依赖于连续控制输入和离散控制输入。因此混杂系统的最优控制问题描述如下:

问题1 对于分段线性混杂系统 H , 求变迁路径 r , 分段连续输入 $u(t) \in U \subset \mathbf{R}^m$, 使得代价函数

$$J = \Psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), q(t)) dt$$

最小, 其中 $t_0, x(t_0)$ 给定, $\Psi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $L: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times Q \rightarrow \mathbf{R}$ 。

3 混杂系统线性二次最优控制

利用离散动态规划思想, 可以将混杂系统的二次最优控制问题转变为如下多阶段决策问题。

问题2 对于分段线性混杂系统 H , 考虑下列性能指标

$$J = \min \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt + \sum_{i=0}^{N-1} (x^T(t_i)Qx(t_i) + u^T(t_i)Ru(t_i)) \right\} \quad (4)$$

其中 $x(t_0) = x_0$ 为初始连续状态, 每一个子系统的动态方程为

$$\dot{x}(t) = A_{q(i)}x(t) + B_{q(i)}u(t) \quad (5)$$

且离散事件发生在时间 $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ 。 $x(t) \in X \subset \mathbf{R}^n$ 为连续状态, 而 $i \in Q \subset \{1, 2, \dots\}$ 则为离散状态。最优控制的目标是寻找可行序列 $u_{q(i)}(t) \in U \subset \mathbf{R}^m$, 使得性能指标最小化。

在问题2中, i 表示多阶段决策的时段变量, $q(i)$ 表示第 i 个时段所处的离散状态, $u_{q(i)}(t)$ 则是第 i 个时段连续变量控制序列。根据式(4), 最后一项可看作无限时间最优控制问题, 其他各项则为有限时间二次最优控制问题, 因此可以采用一种结合离散动态规划和连续动态规划的混合动态规划方法, 以解决分段线性混杂系统最优控制问题。其主要思想是对于逻辑变迁过程, 采用离散动态规划的思想, 对于连续动态子系统则利用有限或无限二次最优控制策略, 每一步在确定连续最优控制的同时确定最优变迁路径。为了给出这样的递归最优控制策略, 首先给出离散变迁的前件算子的定义:

定义3 对于从 q 到 q 的变迁, $q, q \in Q$, 则关于 q 到 q 变迁的离散前件算子 $\text{Pre}(q)$ 定义为 $\text{Pre}(q) = \{q \mid q = \delta(x, q)\}$ 。

根据混合动态规划的递归最优控制策略思想, 并利用离散变迁的前件算子, 对于问题2可得到如下定理:

定理1 对于问题2, 离散事件发生在时刻 $t_0 < t_1 < \dots < t_N$, 则分段线性混杂系统 H 的最优路径和最优控制策略为

$$u_{q^*(i)}^*(t) = -R^{-1}B_{q(i)}^T P_{q^*(i)}(t)x^*(t) \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

$$u_{q^*(N)}^*(t) = -R^{-1}B_{q(N)}^T P_{q^*(N)}(t)x^*(t) \quad (7)$$

$$q^*(i) = \arg \left\{ \min_{q(i)} \min_{\text{Pre}(q(i+1))} J_{q(i)} \right\} \quad (8)$$

$$J_{q(i)} = \min_u \frac{1}{2} \left\{ x^T(t_{i+1})P_{q(i+1)}x(t_{i+1}) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \right\} \quad (9)$$

其中 $x^*(t)$ 是最优轨迹, 对应的 $P_{q(i)}(t)$ 为如下满足边界条件的 Riccati 矩阵微分方程的解

$$\begin{cases} \dot{P}_{q(i)}(t) = -P_{q(i)}(t)A_{q(i)} - A_{q(i)}^T P_{q(i)}(t) + P_{q(i)}(t)B_{q(i)}R^{-1}B_{q(i)}^T P_{q(i)}(t) - Q \\ P_{q(i)}(T) = P_{q(i+1)}(0) \end{cases} \quad (10)$$

其中, $i = 0, 1, \dots, N-1$; $T_i = t_{i+1} - t_i$; $P_{q(i)}(T)$ 是

从第 $q(i)$ 子系统向第 $q(i+1)$ 子系统变迁时 $P_{q(i)}(t)$ 的值, $P_{q(i)}(0)$ 为 $P_{q(i)}(t)$ 在相应子系统的初始值, 而 $P_{q(N)}$ 则是下列 Riccati 方程的解

$$-P_{q(N)}A_{q(N)} - A_{q(N)}^T P_{q(N)} + P_{q(N)}B_{q(N)}R^{-1}B_{q(N)}^T P_{q(N)} - Q = 0 \quad (11)$$

证明 对于逻辑切换过程, 同样利用离散动态规划思想, 从方程(5) 最后一项向后递归计算得到解. 首先, 计算最后一项最优控制律 $u_N^*(t)$. 相应地, 最后一项最优性能指标为

$$J_{q(N)}^* = \min \int_N (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

对应连续动态子系统为

$$\dot{x}(t) = A_{q(N)}x(t) + B_{q(N)}u(t)$$

根据线性时不变系统的无限时间二次最优控制定理, 可以得到

$$u_{q(N)}^*(t) = -R^{-1}B_{q(N)}^T P_{q(N)}x^*(t)$$

其中 $P_{q(N)}$ 满足 Riccati 方程

$$-P_{q(N)}A_{q(N)} - A_{q(N)}^T P_{q(N)} + P_{q(N)}B_{q(N)}R^{-1}B_{q(N)}^T P_{q(N)} - Q = 0$$

同时, 可得最优性能指标为

$$J_{q(N)}^* = x^T(t_N)P_{q(N)}x(t_N)$$

因此第 $N-1$ 时段的最优性能指标则为

$$J_{q(N-1)}^* = \min_{q(N-1)} \min_{\text{Pre}(q(N))} J_{q(N-1)}$$

其中

$$J_{q(N-1)} = \min_u \int_{N-1}^N \{x^T(t)P_{q(N)}x(t) + (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt\}$$

首先考虑 $J_{q(N-1)}$ 和相应的动态子系统为

$$\dot{x}(t) = A_{q(N-1)}x(t) + B_{q(N-1)}u(t)$$

显然根据有限时间二次最优控制定理有

$$u_{q(N-1)}^*(t) = -R^{-1}B_{q(N-1)}^T P_{q(N-1)}(t)x^*(t)$$

其中 $P_{q(N-1)}$ 满足 Riccati 方程

$$\begin{cases} P_{q(N-1)}(t) = \\ -P_{q(N-1)}(t)A_{q(N-1)} - A_{q(N-1)}^T P_{q(N-1)}(t) + \\ P_{q(N-1)}(t)B_{q(N-1)}R^{-1}B_{q(N-1)}^T P_{q(N-1)}(t) - Q \\ P_{q(N-1)}(T_{N-1}) = P_{q(N)} \end{cases}$$

同时可得到相应的性能指标

$$J_{q(N-1)} = x^T(t_{N-1})P_{q(N-1)}(t_{N-1})x(t_{N-1})$$

然后根据

$$q^*(N-1) = \arg \left\{ \min_{q(N-1)} \min_{\text{Pre}(q(N))} J_{q(N-1)} \right\}$$

确定 $q^*(N-1)$, 从而进一步确定了 $N-1$ 步的最

优变迁 $e_{N-1}^* = (q^*(N-1), q^*(N))$, 最优控制序列 $u_{q^*(N-1)}^*$ 和最优性能指标 $J_{q^*(N-1)}^*$; 依次类推, 直到初始时段, 即可证明定理 1 成立.

根据定理 1, 可得到如下混合动态规划的递归算法:

Step 1: 给定初始状态 (q_0, x_0) , 并计算最后一项的最优性能指标 $J_{q(N)}^*$ 和最优控制序列 $u_{q(N)}^*(t)$, 然后令 $i = N-1$;

Step 2: 根据式(9), 计算所有离散状态下的最优性能指标 $J_{q(i)}$ 和最优控制序列 $u_{q(i)}^*(t)$, 其中 $q(i) = \text{Pre}(q(i+1))$;

Step 3: 计算 $q^*(i) = \arg \left\{ \min_{q(i)} \min_{\text{Pre}(q(i+1))} J_{q(i)} \right\}$, 从而确定最优控制序列 $u_{q^*(i)}^*(t)$ 和最优变迁 $e_i^* = (q^*(i), q^*(i+1))$;

Step 4: 令 $i = i-1$, 重复计算 Step 2 和 Step 3, 直至 $i = 0$.

4 闭环混杂系统稳定性分析

近年来, 关于混杂系统的 Lyapunov 稳定性充分条件已取得很多结果. Ye 等^[6] 提出了不变集的概念, 定义了几类不变集类 Lyapunov 稳定性概念, 并给出了混杂系统的 Lyapunov 稳定性充分条件. Branicky^[7] 和 Pettersson^[8] 提出了多 Lyapunov 函数方法. 任何控制系统的设计都是在保证稳定性的前提下进行的. 因此为了分析采用本文方法设计的闭环混杂系统的稳定性问题, 首先介绍如下引理:

引理 1^[8] 如果存在标量函数 $V_q: I(q) \rightarrow R$, 每一个 $V_q(x)$ 关于 $x, \forall x \in I(q), q \in X_D$, 连续可微, K 类函数 $\alpha: R^+ \rightarrow R^+$ 和 $\beta: R^+ \rightarrow R^+$, 使得

$$\begin{aligned} \alpha(x) &\leq V_q(x) \leq \beta(x) \\ \forall x &\in I(q), q \in X_D \\ \dot{V}_q(x) &\leq 0, \forall x \in I(q), q \in X_D \\ V_r(x) &\leq V_q(x), \forall x \in I(q) \cap I(r) \end{aligned}$$

成立, 那么混杂系统在 Lyapunov 意义下是稳定的.

利用混合动态规划递归策略得到的闭环混杂系统的稳定性结果为如下定理:

定理 2 采用混合动态规划方法得到的闭环混杂系统在 Lyapunov 意义下是稳定的.

证明 选取 Lyapunov 函数

$$V_{q(i)}(x(t)) = x^T(t)P_{q(i)}(t)x(t)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1$$

那么

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V_{q(i)}(x(t)) = \\ & x^T(t) P_{q(i)}(t) x(t) + x^T(t) \dot{P}_{q(i)}(t) x(t) + \\ & x^T(t) P_{q(i)}(t) \dot{x}(t) = \\ & x^T(t) (P_{q(i)}(t) + A_{q(i)}^T P_{q(i)}(t) + \\ & P_{q(i)}(t) A_{q(i)} - \\ & 2P_{q(i)}(t) B_{q(i)} R^{-1} B_{q(i)}^T P_{q(i)}(t)) x(t) = \\ & - x^T(t) (Q + P_{q(i)}(t) B_{q(i)} \times \\ & R^{-1} B_{q(i)}^T P_{q(i)}(t)) x(t) \quad 0 \end{aligned}$$

当 $i = N$, 选取

$$V_{q(N)}(x(t)) = X^T(t) P_{q(N)} x(t)$$

那么

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V_{q(N)}(x(t)) = \\ & x^T(t) P_{q(N)} x(t) + x^T(t) \dot{P}_{q(N)} x(t) = \\ & x^T(t) (A_{q(N)}^T P_{q(N)} + P_{q(N)} A_{q(N)} - \\ & 2P_{q(N)} B_{q(N)} R^{-1} B_{q(N)}^T P_{q(N)}) x(t) = \\ & - x^T(t) (Q + P_{q(N)} B_{q(N)} \times \\ & R^{-1} B_{q(N)}^T P_{q(N)}) x(t) \quad 0 \end{aligned}$$

当进行变迁作用时, 并且 $\forall x \in I(i) \cap I(i+1)$, 则有

$$\begin{aligned} & V_{q(i+1)}(x(t)) - V_{q(i)}(x(t)) = \\ & x^T(t_{i+1}) P_{q(i+1)}(0) x(t) - \\ & x^T(t_{i+1}) P_{q(i)}(T_i) x(t_{i+1}) = \\ & x^T(t_{i+1}) (P_{q(i+1)}(0) - \\ & P_{q(i)}(T_i)) x(t_{i+1}) \quad 0 \end{aligned}$$

因此闭环混杂系统是 Lyapunov 意义下稳定的。

5 算 例

为简单起见, 仅考虑由两个一阶受控系统组成的分段线性混杂系统的数值例子, 即

$$\dot{x}(t) = a_q x(t) + b_q u_q(t), \quad q = 1, 2,$$

其中, $a_1 = -1, a_2 = -2, b_1 = b_2 = 1$ 。性能指标为

$$J = \min \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt$$

最优控制序列可通过求解 Riccati 方程来构造, 且 $Q = 1, R = 0.1$ 。假定混杂系统从离散状态 1 变迁到离散状态 2, 然后再从离散状态 2 变迁到离散状态 1 并停留在离散状态 1, 从而混杂系统动态过程在离散状态 1 下达到稳定状态。两个子系统之间的变迁发生在时刻

$$t_k = (k+1)T, \quad k = 0, 1, 2$$

$$T = 0.1, \quad x(0) = 1$$

则性能指标可描述为

$$J = \frac{1}{2} \left\{ \int_{t_0}^{t_{i+1}} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt + \int_{t_2}^{t_1} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \right\}$$

利用 MATLAB 软件, 首先计算最后一项最优控制律, 则可得 Riccati 方程的解为 $P_2 = 0.2317$, 最优控制 $u_2^* = -2.317x(t)$ 。然后考虑第 2 项, 解 Riccati 方程得

$$\begin{aligned} P_1(t) = & -\frac{1}{5} - \frac{\sqrt{14}}{10} \tanh(\sqrt{14}t - \frac{\sqrt{14}}{10}) - \\ & \frac{1}{2} \log(11) - \frac{1}{2} \log(13) - \frac{1}{2} \log(32.423) + \\ & \frac{1}{2} \log(-32.636489 + 8.634000 \sqrt{14}) \end{aligned}$$

并将其代入 $u_1^* = -10 \times P_1(t)x(t)$, 则可得到最优控制, 且 $P_1(0) = 0.2003$ 。

类似地, 可求得第 1 项的最优控制

$$\begin{aligned} P_0(t) = & -\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{11}}{10} \tanh(\sqrt{11}t - \frac{\sqrt{11}}{10}) + \\ & \frac{1}{2} \log(\frac{1.819819}{180.181} - \frac{546.000}{180.181} \sqrt{11}) \end{aligned}$$

将 $P_0(t)$ 代入 $u_0^* = -10 \times P_0(t)x(t)$, 可得到第 1 项最优控制律, 从而可得到混杂系统的控制序列。

6 结 语

本文讨论了分段线性混杂系统的二次最优控制问题。首先介绍了一类变迁时间确定的分段线性混杂系统模型, 基于一种混合动态规划方法, 研究了分段线性混杂系统的二次最优控制问题, 并给出了求解策略。然后讨论了采用本文方法所得到的闭环混杂系统的稳定性问题。最后给出一个例子说明了本文方法的有效性。

参考文献 (References):

- [1] Tittus M, Egardt B. Control-law synthesis for linear hybrid systems[A]. Proc of the 3rd Conf on Decision and Control[C]. Orlando, 1994: 961-966.
- [2] Alur R, Coucoubetis C, Halbwachs N, et al. The algorithmic analysis of hybrid systems[J]. Theoretical Computer Science, 1995, 138(1): 3-34.

(下转第 875 页)

参考文献(References):

- [1] Kharatishvili G L. The maximum principle in the theory of optimal process with time-lags [J]. *Dolk Akad N auk*, 1961, 136(1): 39-43
- [2] Kharatishvili G L. *A Maximum Principle in External Problem with Delays, Mathematical Theory of Control* [M]. Academic Press: A V Balakrishnan, L W Neustadt, 1967.
- [3] Bender D J, Laub A J. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Contr*, 1987, 32(8): 672-688
- [4] Cobb D. Descriptor variable systems and optimal state regulation [J]. *IEEE Trans on Automatic Contr*, 1983, 28(5): 601-611
- [5] Chen Y, Ma S, Cheng Z. Singular optimal control problem of linear singular systems with linear-quadratic cost [A]. *Proc 14th World Congress of IFAC* [C]. Beijing, 1999. F: 223-228
- [6] Zhu J, Ma S, Cheng Z. Singular LQ problem for descriptor systems [A]. *Proc 38th IEEE Conf Decision Contr* [C]. Arizona, 1999. 4098-4099
- [7] Ross D W, Flügge-Lotz I. An optimal control problem for systems with differential difference equation dynamics [J]. *SIAM J Control*, 1969, 7(7): 608-623

(上接第 866 页)

- [3] Branicky M S, Mitter S K. Algorithms for optimal hybrid control [A]. *Proc IEEE Conf on Decision and Control* [C]. New Orleans, 1995. 2661-2666
- [4] Stiver J A, Antsaklis P J, Lemmon M D. Hybrid control system design based on natural invariants [A]. *Proc of the 34th Conf on Decision and Control* [C]. New Orleans, 1995. 1445-1460
- [5] Xu X, Antsaklis P J. Optimal control of switched systems: New results and open problems [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Chicago Illinois, 2000. 2683-2687.
- [6] Ye H, Michel A N. Stability theory for hybrid dynamical systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 461-474
- [7] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475-482
- [8] Pettersson S, Lennartson B. Control design of hybrid systems [A]. *Lecture Notes in Computer Science, Hybrid Systems* [C]. Grenoble, 1997. 1201: 240-254

(上接第 870 页)

参考文献(References):

- [1] 章兢, 刘晓燕. 基于图像序列处理的回转窑煅烧区温度测量 [J]. *电子测量与仪器学报*, 1999, 13(4): 67-71.
(ZHANG Jing, LIU Xiaoyan. The measurement of sintering temperature in kiln based on image processing [J]. *The Transaction of Electric Measurement and Instrument* 1999, 13(4): 67-71.)
- [2] 谭皓, 李立源, 陈维南. 基于BP网络的锅炉炉膛火焰燃烧状态自动识别 [J]. *自动化学报*, 1998, 24(2): 667-670
(TAN Hao, LI Liyuan, CHEN Weinan. Burner flame recognition based on backpropagation neural network [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(2): 667-670.)
- [3] D L Hall. *Mathematical Techniques in Multisensor Data Fusion* [M]. Norwood: Artech House Publisher, 1992
- [4] 赵振宇, 徐用懋. 模糊理论和神经网络的基础与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1996
- [5] 袁南儿, 王万良, 苏宏业. 计算机新型控制策略及应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1998