

文章编号: 1001-0920(2003)01-0053-05

基于 PD 控制的机器人轨迹跟踪性能研究与比较

陈启军, 王月娟, 陈辉堂

(同济大学 信息与控制工程系, 上海 200092)

摘要: 定义同一个 Lyapunov 函数, 分析了基于 PD 的 3 种常用机器人轨迹跟踪算法的稳定性和鲁棒性, 得到了新的结论。PD 加前馈控制按指数收敛到 0, PD 及修改的 PD 加前馈控制收敛到一封闭球, 增大反馈系数可使球半径任意小。基于 PD 的轨迹跟踪算法对模型误差及有界不确定性干扰具有鲁棒性。实验研究验证了分析结果, 并对 3 种轨迹跟踪算法的控制性能进行比较。

关键词: PD 控制; PD 加前馈控制; 指数收敛; 鲁棒性

中图分类号: TP24

文献标识码: A

Comparative research of trajectory tracking performance of robotic manipulator based on PD control scheme

CH EN Qi-jun, WANG Yue-juan, CH EN Hui-tang

(Department of Information and Control Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: For the trajectory tracking of robotic manipulator, the stability and robustness of three kinds of control schemes based on PD control are analyzed. The tracking errors of PD control with feedforward compensation exponentially converge to zero and the tracking errors of PD control and modified PD with feedforward compensation exponentially converge to a closed ball. The ball radius can be set arbitrarily small by increasing feedback gains. These control schemes have robustness to model errors and bounded uncertain disturbances. The experiments of 2 DOF direct driven robotic manipulator demonstrate the control performance.

Key words: PD control; PD control with feedforward compensation; Exponentially convergence; Robustness

1 引言

在机器人控制算法中, PD 和 PD 是最简单的控制算法, 目前绝大多数工业机器人都采用这类控制算法^[1]。实践证明, 即使象机器人这类强耦合强非线性系统, 基于 PD 的控制算法也是有效的。但对机器人这类复杂的非线性系统, PD 控制算法的控制性能究竟如何, 理论上并没有完整的分析。Takegaki 等^[2]对机器人 PTP 控制提出了 PD 加重力补偿的控制算法, 并利用 Lyapunov 第二法证明了该算法

全局一致渐近稳定。他们的证明引用了 LaSalle 不变集原理, 这一结论不能应用于机器人轨迹跟踪, 因为在轨迹跟踪中 LaSalle 不变集原理的条件不成立。应用于轨迹跟踪的 PD 加前馈补偿控制源于 PD 加重力补偿, 这是 Koditschek^[3]首先提出的, 但并没有针对机器人动力学特点进行完整的稳定性分析。PD 加前馈补偿形式上与计算力矩方法相似, 计算力矩方法被证明是指数收敛的, 但 PD 加前馈控制的指数收敛性却一直没有得到证明。

收稿日期: 2001-10-08; 修回日期: 2002-02-01。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60005002)。

作者简介: 陈启军(1966—), 男, 湖北松滋人, 教授, 博士, 从事机器人控制、智能控制的研究; 王月娟(1935—), 女, 江苏无锡人, 教授, 博士生导师, 从事机器人控制、智能控制等研究。

本文针对机器人轨迹控制,分析了 PD, PD 加前馈补偿和修改的 PD 加前馈补偿 3 种控制算法的稳定性和鲁棒性,分析表明这 3 种控制算法都是全局按指数收敛的;通过采用同一种 Lyapunov 函数,比较了 3 种控制算法的轨迹跟踪性能;实验研究证实了本文的分析,并得到了关于控制受限的结论。

2 轨迹跟踪算法的稳定性

考虑具有 n 个旋转关节的刚性机器人,其动力学模型为

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau \quad (1)$$

其中: $\theta \in R^n$ 为关节角位移矢量, $M(\theta) \in R^{n \times n}$ 为惯性矩阵, $C(\theta, \dot{\theta}) \in R^n$ 表示离心力和哥式力项, $G(\theta) \in R^n$ 为重力项, $\tau \in R^n$ 为控制力矩。

为了便于比较,选用同一个 Lyapunov 函数来分析 3 种基于 PD 的轨迹跟踪算法的稳定性。

2.1 PD 控制

定理 1 对式(1)所示系统,考虑如下控制律

$$\tau = -K_p e - K_v \dot{e} \quad (2)$$

其中

$$e = \theta - \theta_d, \quad \dot{e} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d$$

$$K_p = \text{diag}(k_{p1}, k_{p2}, \dots, k_{pn})^T, \quad k_{pi} > 0$$

$$K_v = \text{diag}(k_{v1}, k_{v2}, \dots, k_{vn})^T, \quad k_{vi} > 0$$

如果期望跟踪的轨迹速度 $\dot{\theta}_d$ 和加速度 $\ddot{\theta}_d$ 有界,则可保证 e 和 \dot{e} 指数收敛到半径为 $r_i (i = 1, 2)$ 的封闭球,增大 K_p 和 K_v 可使球半径任意小。

证明 由式(1)和(2),系统的误差方程为

$$M(\theta)\ddot{e} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{e} + K_p e + K_v \dot{e} = -d_1 \quad (3)$$

其中

$$d_1 = M(\theta)\ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d + G(\theta)$$

定义如下 Lyapunov 函数

$$V(e, \dot{e}) = \frac{1}{2} e^T K_p e + \frac{1}{2} \dot{e}^T M \dot{e} + \alpha e^T M f(e) \quad (4)$$

其中

$$f(e) = \frac{e}{1 + |e|} = \beta e, \quad 0 < \alpha < 1$$

文献[4]已证明式(4)大于 0,因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \dot{e}) &= -\dot{e}^T K_v \dot{e} - \alpha f(e)^T K_p e - \alpha f(e)^T K_v \dot{e} + \\ &\alpha e^T M \dot{f}(e) + \alpha e^T C(\theta, \dot{\theta}) f(e) - \\ &(e^T + \alpha f(e)^T) d_1 \end{aligned}$$

由于

$\alpha e^T M \dot{f}(e) = 2\alpha\beta\lambda_{\max}(M) |e|^2$
 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示最大和最小特征值,并且

$$d_1 = M(\theta)\ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d + G(\theta)$$

$$\mathcal{Y}_1 = \sup (M(\theta)\ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d + G(\theta))$$

$$\mathcal{Y}_2 = \sup (k_c \dot{\theta}_d)$$

$$e^T C(\theta, \dot{\theta}) f(e) = e^T C(\theta, \dot{\theta}_d + \dot{e}) f(e)$$

$$\beta \sup (k_{c1} \dot{\theta}_d) |e| |e| + k_{c2} |e|^2 = \beta \mathcal{Y}_3 |e| |e| + \mathcal{Y}_4 |e|^2$$

所以

$$\dot{V}(e, \dot{e})$$

$$\begin{aligned} &= (\lambda_{\min}(K_v) - 2\alpha\beta\lambda_{\max}(M) - \mathcal{Y}_2 - \alpha\mathcal{Y}_4) |e|^2 + \\ &\alpha\beta(\lambda_{\max}(K_v) + \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_3) |e| |e| + \mathcal{Y}_1 |e| + \alpha\beta\mathcal{Y}_1 |e| \end{aligned}$$

定义

$$\mathcal{Y}_5 = 2\alpha\beta\lambda_{\max}(M) + \mathcal{Y}_2 + \alpha\mathcal{Y}_4$$

$$\mathcal{Y}_6 = \lambda_{\max}(K_v) + \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_3$$

总可选择足够大的 K_v , 使

$$\lambda_{\min}(K_v) - \mathcal{Y}_5 > 0$$

$$\dot{V}(e, \dot{e})$$

$$= (\lambda_{\min}(K_v) - \mathcal{Y}_5 - \frac{1}{2}\alpha\beta\mathcal{Y}_6) |e|^2 -$$

$$\alpha\beta(\lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\mathcal{Y}_6) |e|^2 +$$

$$\mathcal{Y}_1 |e| + \alpha\beta\mathcal{Y}_1 |e|$$

由于

$$\mathcal{Y}_1 |e| = (\lambda_{\min}(K_p) - \mathcal{Y}_5 - \frac{1}{2}\alpha\beta\mathcal{Y}_6) |e|^2$$

$$\frac{\mathcal{Y}_1^2}{\lambda_{\min}(K_p) - \mathcal{Y}_5 - (1/2)\alpha\beta\mathcal{Y}_6}$$

$$\frac{1}{4}(\lambda_{\min}(K_p) - \mathcal{Y}_5 - \frac{1}{2}\alpha\beta\mathcal{Y}_6) |e|^2$$

$$\mathcal{Y}_1 |e| = (\lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\mathcal{Y}_6) |e|^2$$

$$\frac{\mathcal{Y}_1^2}{\lambda_{\min}(K_p) - (1/2)\mathcal{Y}_6} - \frac{1}{4}(\lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\mathcal{Y}_6) |e|^2$$

所以

$$\dot{V}(e, \dot{e})$$

$$= \frac{1}{4}(\lambda_{\min}(K_p) - \mathcal{Y}_5 - \frac{1}{2}\alpha\beta\mathcal{Y}_6) |e|^2 -$$

$$\frac{1}{4}\alpha\beta(\lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\mathcal{Y}_6) |e|^2 +$$

$$\frac{\mathcal{Y}_7}{\lambda_{\min}(K_v) - \mathcal{Y}_5 - (1/2)\alpha\beta\mathcal{Y}_6} + \frac{\alpha\beta\mathcal{Y}_7}{\lambda_{\min}(K_p) - (1/2)\mathcal{Y}_6} = -\xi_1 \dot{e}^2 - \xi_2 \ddot{e}^2 + \epsilon$$

由于 α 可取很小的值, 总可通过选择足够大的 K_p 和 K_v , 以保证 $\xi_1 > 0, \xi_2 > 0$ 。由文献[5], e 和 \dot{e} 按指数收敛到半径为 $r_i (i = 1, 2)$ 的封闭球, 因此增大 K_p 和 K_v 可使球半径任意小。

2.2 PD 加前馈补偿控制

定理 2 对式(1)所示系统, 考虑如下控制律

$$\tau = -K_p e - K_v \dot{e} + M(\theta) \ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}_d + G(\theta) \quad (5)$$

如果期望轨迹速度 $\dot{\theta}_d$ 和期望轨迹加速度 $\ddot{\theta}_d$ 有界, 则可保证 e 和 \dot{e} 按指数收敛到 0。

证明 由式(1)和(5), 系统误差方程为

$$M(\theta) \ddot{e} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{e} + K_p e + K_v \dot{e} = 0 \quad (6)$$

定义与式(4)相同的 Lyapunov 函数, 并定义

$$\mathcal{Y}_7 = 2\alpha\beta\lambda_{\max}(M) + \alpha\mathcal{Y}_4$$

$$\mathcal{Y}_8 = \lambda_{\max}(K_v) + \mathcal{Y}_3$$

则有

$$\dot{V}(e, \dot{e}) = (\lambda_{\min}(K_v) - \mathcal{Y}_7 - \frac{1}{2}\alpha\beta\mathcal{Y}_8) \dot{e}^2 - \alpha\beta(\lambda_{\min}(K_p) - \frac{1}{2}\mathcal{Y}_8) e^2 = -\xi_3 \dot{e}^2 - \xi_4 e^2$$

因此总可通过选择足够大的 K_p 和 K_v , 以保证 $\xi_3 > 0, \xi_4 > 0$ 。所以 e 和 \dot{e} 按指数收敛到 0。

对于预先给定的跟踪轨迹, PD 加前馈控制有如下定理的修改形式^[6]。

定理 3 对式(1)所示系统, 考虑如下控制律

$$\tau = -K_p e - K_v \dot{e} + M(\hat{\theta}_t) \ddot{\theta}_d + C(\hat{\theta}_t, \dot{\theta}_d) \dot{\theta}_d + G(\hat{\theta}_t) \quad (7)$$

如果期望轨迹速度 $\dot{\theta}_d$ 和期望轨迹加速度 $\ddot{\theta}_d$ 有界, 则可保证 e 和 \dot{e} 收敛到半径为 $r_i (i = 1, 2)$ 的封闭球, 增大 K_p 和 K_v 可使球半径任意小。

证明 系统的误差方程为

$$M(\theta) \ddot{e} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{e} + K_p e + K_v \dot{e} = d_2 \quad (8)$$

其中

$$d_2 = \mathcal{Y}_9 + \mathcal{Y}_{10} \dot{e}$$

定义

$$\mathcal{Y}_9 = \sup(M(\hat{\theta}_t) - M(\theta) \ddot{\theta}_d +$$

$$k_{c3} \dot{\theta}_d^2 + G(\hat{\theta}_t) - G(\theta))$$

$$\mathcal{Y}_{10} = \sup(k_{c4} \dot{\theta}_d)$$

选取与式(4)相同的 Lyapunov 函数, 类似于 PD 控制的分析, 可证定理 3 的结论成立。

显然, 修改后的 PD 加前馈控制, 其动力学补偿项可以离线计算。

3 鲁棒性

对于 PD 控制, 考虑有界不确定性干扰 $\mu(\theta, \dot{\theta}, t)$ 存在情况下的轨迹跟踪性能。假定 $\mu(\theta, \dot{\theta}, t)$ 满足如下约束

$$\mu(\theta, \dot{\theta}, t) = \mu_1 + \mu_2 \dot{\theta} \quad (9)$$

其中 μ_1 和 μ_2 为正常数。引入有界不确定性干扰 $\mu(\theta, \dot{\theta}, t)$ 后, 机器人的动力学模型变为

$$M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + G(\theta) + \mu(\theta, \dot{\theta}, t) = \tau \quad (10)$$

由式(2)和(10), 系统的误差方程变为

$$M(\theta) \ddot{e} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{e} + K_p e + K_v \dot{e} = -d_3 \quad (11)$$

由于

$$\mu(\theta, \dot{\theta}, t) = \mu_1 + \mu_2 \dot{\theta} = \mu_1 + \sup(\mu_2 \dot{\theta}_d) + \mu_2 \dot{e}$$

所以类似于 PD 控制稳定性的分析, 定理 1 的结论依然成立。这说明 PD 控制能克服有界不确定性干扰, 并可通过增大 K_p 和 K_v 使因干扰产生的轨迹误差任意小。对于 PD 加前馈补偿控制, 由于包含动力学补偿项, 本文考虑模型误差和有界不确定性干扰 $\mu(\theta, \dot{\theta}, t)$ 存在下的轨迹跟踪性能, 则式(5)的控制律变为

$$\tau = -K_p e - K_v \dot{e} + \hat{M}(\hat{\theta}_t) \ddot{\theta}_d + \hat{C}(\hat{\theta}_t, \dot{\theta}_d) \dot{\theta}_d + \hat{G}(\hat{\theta}_t) \quad (12)$$

其中 $\hat{\cdot}$ 表示估计值。由式(10)和(12), 误差方程为

$$M(\theta) \ddot{e} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{e} + K_p e + K_v \dot{e} = d_4 \quad (13)$$

$$d_4 = \mathcal{Y}_{11} + \mathcal{Y}_{12} \dot{e}$$

$$\mathcal{Y}_{11} = \sup(\hat{M}(\hat{\theta}_t) - M(\theta) \ddot{\theta}_d + k_{c5} \dot{\theta}_d^2 + \hat{G}(\hat{\theta}_t) - G(\theta) + \mu_1 + \mu_2 \dot{\theta}_d)$$

$$\mathcal{Y}_{12} = \sup(k_{c6} \dot{\theta}_d) + \mu_2$$

类似于 PD 控制稳定性的分析, 在模型误差和有界不确定性干扰 $\mu(\theta, \dot{\theta}, t)$ 存在下, 采用 PD 加前馈控制, e 和 \dot{e} 按指数收敛到半径为 $r_i (i = 1, 2)$ 的封

闭球, 并且通过增大 K_p 和 K_v 可使球半径任意小。

4 实验研究

本文的实验对象为一应用于异形玻璃切割的两关节直接驱动机器人, 该机器人的动力学模型为

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12}\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ D_{21}\cos(\theta_1 - \theta_2) & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{12}\dot{\theta}_1\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ -D_{12}\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix} = \tau$$

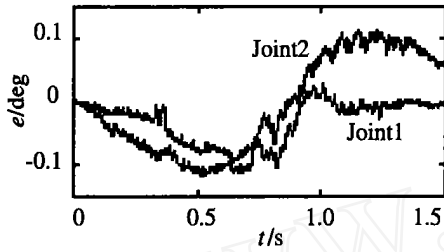
$$D_{11} = 2\,462 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad D_{22} = 0\,362 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$D_{12} = D_{21} = 0\,147 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

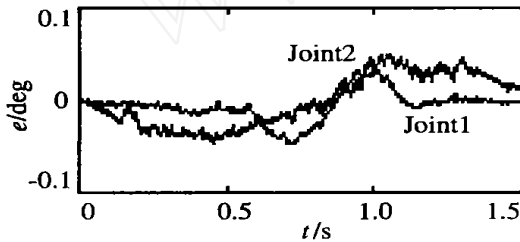
让机器人以 1 m/s 的速度跟踪长度为 900 mm 的直线, 分别进行不带载跟踪和带载跟踪。控制参数为: $k_{p1} = 3\,000, k_{p2} = 2\,000, k_{v1} = 230, k_{v2} = 210$ 。

不带负载时的关节轨迹误差如图 1 所示, 机器人末端带 1 kg 负载时的关节轨迹误差如图 2 所示。

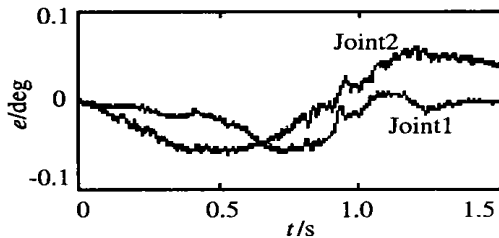
图 1 和图 2 显示, 基于 PD 的 3 种轨迹跟踪算法都有较好的控制性能。在不带负载的情况下, PD 加前馈控制的性能最好, PD 控制相对较差, 这说明动



(a) PD 控制

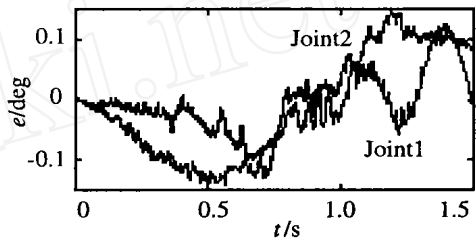


(b) PD 加前馈

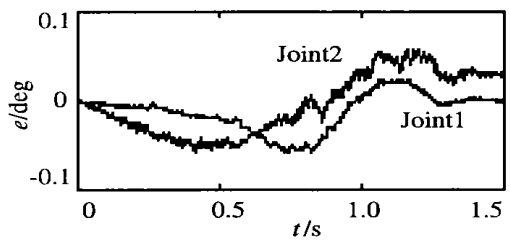


(c) 修改的 PD 加前馈

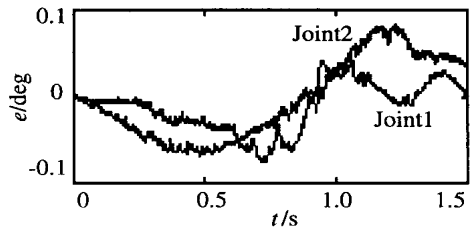
图 1 不带负载时的关节轨迹误差



(a) PD 控制

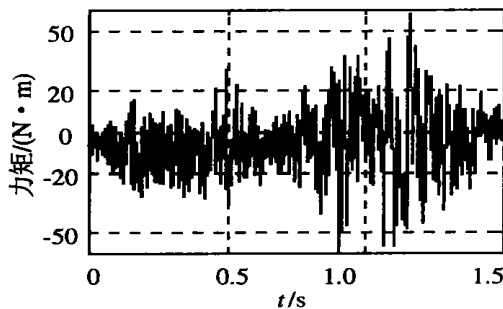


(b) PD 加前馈

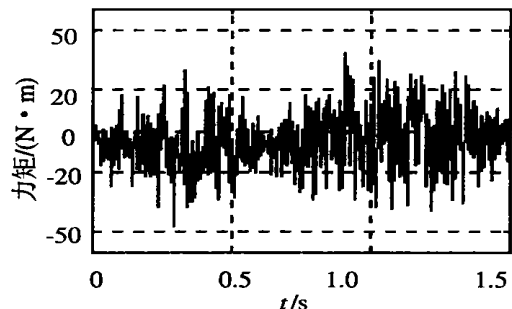


(c) 修改的 PD 加前馈

图 2 带负载时的关节轨迹误差



(a) 关节 1



(b) 关节 2

图 3 PD 控制计算出的力矩

力学补偿的效果是明显的; 修改的 PD 加前馈不可能达到 PD 加前馈的控制性能。在机器人末端加上 1 kg 负载后, 轨迹误差变大, 但变化的幅度较小, 这说明基于 PD 的轨迹跟踪算法对模型误差有一定的鲁棒性。按照前述分析, 增加 K_p 和 K_v 可使轨迹误差任意小, 但实验中发现, 进一步增大 K_p 和 K_v , 轨迹误差并没有明显变小, 3 种控制律情况基本一样。一个重要的原因是关节力矩的限制。

当 $k_{p1} = k_{p2} = 3\ 300$, $k_{v1} = k_{v2} = 250$ 时, 按 PD 控制跟踪计算出的力矩变化如图 3 所示。可以看出一些位置超过了电机最大力矩 $20\ \text{N} \cdot \text{m}$ 。

5 结 论

本文定义一种新的 Lyapunov 函数, 应用 Corless 关于指数收敛的理论, 对 3 种常用的基于 PD 的机器人轨迹跟踪算法的稳定性、鲁棒性和收敛速率作了分析和比较。实验研究表明, 基于 PD 的 3 种轨迹跟踪算法都有较好的跟踪性能, 增加反馈系数轨迹误差减小。但对一个实际的物理系统, 与理论分析有所差别, 轨迹误差不可能任意小, 它存在一个下界, 因为进一步增加反馈系数, 会导致关节力矩受限

和 高频 振 颤。力矩受限是影响控制性能的一个重要因素, 这是设计高级控制算法时应考虑的实际问题。

参考文献 (References):

- [1] Rocco P. Stability of PD control for industrial robot arms [J]. *IEEE Trans Robot Automat*, 1996, 12 (4): 606-614
- [2] Takegaki M, Arimoto S. A new feedback method for dynamic control of manipulators [J]. *ASME Trans DSMC*, 1981, 103: 119-125
- [3] Koditschek D E. Natural motion for robot arms [A]. *Proc IEEE Conf Decision Control* [C]. Las Vegas, 1984 733-735
- [4] 陈启军. 宏-微机器人系统及其连续轨迹控制研究 [D]. 上海: 同济大学, 1999
- [5] Corless M. Guaranteed rates of exponential convergence for uncertain systems [J]. *J Optim Theory Appl*, 1990, 64(3): 481-494
- [6] Paden B, Riedle B. A positive-real modification of a class of nonlinear controller for robot manipulators [A]. *Proc American Control Conf* [C]. Atlanta, 1988 1782-1785

(上接第 48 页)

- [7] Maniezzo V, Dorigo M, Colnari A. Algodesk: An experimental comparison of eight evolutionary heuristics applied to the quadratic assignment problem [J]. *European J Oper Res*, 1995, 81(1): 188-204
- [8] Maniezzo V. Exact and approximate nondeterministic tree-search procedures for the quadratic assignment problem [J]. *Infor J Comp*, 1999, 11(4): 358-369
- [9] Maniezzo V, Colnari A. Ant system applied to the quadratic assignment problem [J]. *IEEE Trans Knowl Data Eng*, 1999, 11(5): 769-778
- [10] Leguizamón G, Michalewicz Z. A new version of ant system for subset problems [A]. *Proc Congr Evol Comp* [C]. Darmstadt, 1999. 2: 1459-1464
- [11] Douzono H, Hara S, Kawamoto S, et al. A clustering method using genetic algorithm and ant system [A]. *Joint Conf Intell Syst* [C]. Springerlag, 1998. 2: 407-410

(上接第 52 页)

- [5] Suzuki I. Fundamental properties and application of temporal Petri nets [A]. *Proc 9th Annual Conf Infor Syst* [C]. Baltimore: Johns Hopking Univ, 1985. 641-646
- [6] Suzuki I, Lu H. Temporal Petri nets and their application to modeling and analysis of a handshake daisy chain arbiter [J]. *IEEE Trans Comput*, 1989, 38(5): 696-704
- [7] Zurawski R. Verifying correctness of interfaces of design models on manufacturing systems using functional abstractions [J]. *IEEE Trans Ind Electr*, 1997, 44(3): 307-320
- [8] 蒋昌俊. 离散事件动态系统的 PN 机理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2000
- [9] Shatz SM, Mai K, Black C. Design and implementation of a Petri net-based toolkit for Ada tasking analysis [J]. *IEEE Trans Parallel Distr Syst*, 1990, 1(4): 424-441
- [10] Barkaoui K. Verification in concurrent programming with Petri nets structural techniques [A]. *Proc 3rd Int IEEE High Assur Syst Eng Symp* [C]. 1998. 124-133