第18卷第1期 控 制 与 决 策 2003年1月
Vol. 18 No. 1 Control and Decision Jan. 2003

文章编号: 1001-0920(2003)01-0066-03

保证能控性和能观性的采样方式

郭 戈[1], 王 伟[2]
(1. 甘肃工业大学 电气工程与信息工程学院, 甘肃 兰州 730050;
2. 大连理工大学 信息与控制研究中心, 辽宁 大连 116023)

摘 要: 提出一种简单的采样间隔可任意选择的不等间距采样方法, 它能保证对于任意能控或能观连续系统, 其离散系统一定能控或能观, 而与系统参数无关。以该方式离散化后的系统为周期性时变系统, 因而既可直接设计时变系统的反馈控制律, 也可先将一个周期内的方程化为时不变方程, 再按定常系统进行控制律设计。

关键词: 连续系统; 采样; 离散化; 数字控制
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Sampling guaranteeing controllability and observability

GUO Ge[1], *WANG Wei*[2]
(1. College of Electric Engineering and Information Engineering, Gansu University of Technology, Lanzhou 730050, China; 2. Research Center of Information and Control, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: A simple nonequidistant sampling method is presented. It guarantees the controllability and observability of a continuous system, no matter its parameters are, during the procedure of discretization with arbitrary average sampling time. The discretized system using this method is periodically time-varying. Thus feedback control laws can be designed either directly for the time-varying system or for the approximated time-invariant subsystem in one period of variation.

Key words: Continuous system; Sampling; Discretization; Digital control

1 引 言

离散系统中已有的等间距周期性采样原理, 在文献和工程实践中被普遍采用, 其数学原理也简单明了[1,2]。但一个连续系统经过这样的采样和保持化为离散系统后, 系统的能控性和能观性等重要性能可能会受到影响, 甚至导致系统稳定性发生变化, 从而使得到的离散系统无法由输出反馈实现稳定控制。这是导致许多具有重要理论意义和应用价值的研究成果一直不能应用于工程实践的关键原因, 严重影响了控制理论在社会生产中的作用和贡献。因此, 寻求在将连续系统化为离散系统的过程中, 不影响系统的能控性和能观性等主要性能的离散化方法, 是控制理论和控制工程领域中一项意义重大的研究课题。

一般说, 采样周期 T 的选择必须满足 $(\lambda_p - \lambda_q)T \neq (2\pi j)l$, $l = \pm 1, \pm 2, \cdots$, 其中 λ_i 为连续系统的特征值。该条件只给出了系统数据确知时采样周期的大致选择原则, 而当系统数据及相关特征值不明确(如自适应控制问题), 或在某个有界区间内取值时(如鲁棒控制问题), 合适的采样周期则很难确

收稿日期: 2001-10-22; **修回日期**: 2001-12-24。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69635010); 甘肃省省长基金资助项目(GS015-A52-012)。
作者简介: 郭戈(1972—), 男, 甘肃庄浪人, 副教授, 博士, 从事复杂工业过程建模与控制、智能化系统等研究; 王伟(1955—), 男(满族), 辽宁鞍山人, 教授, 博士生导师, 从事预测控制、智能控制等研究。

定。有些学者[3,4] 指出, 对于任意采样周期, 都可设计一种不改变系统能控性的广义保持器函数。还有学者对此进行推广, 指出对于几乎任意采样周期, 都可设计这样的广义保持器函数, 使得给定的几乎任意有限个系统的能控性不受离散化的影响。但这一结论显然不能推广到所有能控系统的无限集合, 也无法适用于能观性问题。另外, 文献[5] 提出的多次采样方法所用的仍是等周期采样策略, 可认为是广义保持器函数的近似, 并不具有一般适用性。

本文根据最新样本包含最新信息, 因而长期累积信息与输出高密度采样信息等价这一事实, 提出一种简单的不等间距采样方法。它能保证对于任意能控或能观连续系统, 其离散系统一定能控或能观, 而与系统参数无关。

2　不等间距采样策略

考虑如下线性时变连续系统

$$\Sigma_C: \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(0) = x_0 \\ y = C(t)x \end{cases} \tag{1}$$

其中: 状态 $x \in R^n$, 输入 $u \in R^q$, 输出 $y \in R^p$。如果将系统的状态转移矩阵写成 Floquet 形式[6], 即 $\Phi(t, t_0) = F(t - t_0)e^{J(t-t_0)}$, 其中: $F(t)$ 为连续函数, J 为常数矩阵, 则

$$\Sigma_D: x_{k+1} = F(t_{k+1} - t_k)e^{J(t_{k+1}-t_k)}x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t_{k+1} - \tau)e^{J(t_{k+1}-\tau)} \times B(t_{k+1} - \tau)u_k \mathrm{d}\tau \tag{2}$$

其中: $x_k := x(k)$, $y_k := y(k)$, u_k 代表 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 上的输入。由于所采用的是不等间距采样方法, 因此离散系统 Σ_D 必为时变系统。为了分析其能控性和能观性, 下面给出能控性和能观性的定义。

定义 1(能控性)　如果存在一个正整数 I, 使得对任意给定的初始时间 t_k, 都存在一个控制序列 $\{u_k, u_{k+1}, \cdots, u_{k+I-1}\}$, 使系统由初始状态 x 转移到终止状态 $\bar{x}$, 则称离散系统 Σ_D 一致完全能控。

定义 2(能观性)　如果存在一个正整数 I, 使得对任意给定的初始时间 t_k, 状态 x_k 由 $\{y_k, y_{k+1}, \cdots, y_{k+I}\}$ 和 $\{u_k, u_{k+1}, \cdots, u_{k+I-1}\}$ 唯一确定, 则称离散系统 Σ_D 一致完全能观。

这里, 完全性是指能控和能观与初始状态和终止状态无关; 而一致性是指能控和能观与初始时刻的选择无关。二者使离散系统的能控性和能观性与定常系统在性质上是相似的。

下面给出本文的采样模式

$$t_k = \begin{cases} kT, & k = 1, 2, \cdots, N \\ NT + \bar{T}, & k = N + 1 \\ t_{k-(N+1)} + NT + \bar{T}, & k > N + 1 \end{cases} \tag{3}$$

其中: $N \in Z^+$ $(N \geq n)$, $T, \bar{T} \in R^+$, 且 $T / \bar{T}$ 为无理数。这里 R, Z, R^+, Z^+ 分别表示实数集、整数集、正实数集和正整数集。该采样模式为不等间距周期性采样, 每个周期都有 N 个间隔为 T 的连续采样点和一个间隔为 $\bar{T}$ 的采样点。在此采样模式和零阶保持器作用下, 所得的离散系统有如下结论:

定理 1　1) 如果 Σ_C 能控, 则 Σ_D 一定能控; 2) 如果 Σ_C 能观, 则 Σ_D 一定能观。

为使结论具有完整性, 这里有必要指出, 如果连续系统 Σ_C 不能控或不能观, 则上述结论在其能控子空间或能观子空间上仍然成立。因此, 定理 1 可进而描述为: 在本文的采样方式和零阶保持器下, 系统由连续系统化为离散系统的过程中, 不会改变其能观性或能控性。

3　定理的证明

前已指出, 离散系统为周期性时变系统, 其特性在整个时间空间中具有一致性。因此只需证明整数 I 的存在性, 无须针对任意时刻 t_k, 而只针对初始时刻 $t_0 = 0$ 即可。后面将给出具体的证明过程。

3.1　能 观 性

当且仅当方程族

$$y_k = C(t_k)\Phi(t_k, 0)x_0 = C(t_k)F(t_k)e^{Jt_k}x_0 \quad k \in Z_0^+ \tag{4}$$

(Z_0^+ 表示非负整数) 不具有唯一解 x_0, 或当且仅当存在一个非零向量 $\xi \in R^n$, 对于所有 $k \in Z_0^+$ 都可使下列关系成立

$$C(t_k)F(t_k)e^{Jt_k}\xi \equiv 0 \tag{5}$$

则称系统 Σ_D 不能观测。这一事实是下面证明的基础。另外, 虽然本文提出的采样方式为可变间距采样, 但也是周期性采样, 因而有下述结论:

引理 1　对任意 t, 如果对于 $i = 0, 1, \cdots, n - 1$ 有下列关系

$$C(t + iT)F(t + iT)e^{J(t+iT)}\xi = 0 \tag{6}$$

则对全部 $i \in Z$ 都有此关系成立。

引理 1 反映了一个客观事实, 即对一个线性连续系统的输出等距采样时, n 个连续采样点包含的有关初始状态的信息与无限个采样点所包含的信息相同。

另一方面, 由于每个采样周期的最后一个采样间隔都为 $\bar{T}$, 因而两段由 n 个间隔为 T 的采样序列

之间出现一个不正常过渡, 导致如果引理 1 中的时间 t 覆盖一个采样周期的全部采样点, 即 $t = j(NT + \overline{T})\ (j \in Z_0^+)$, 则 $(t + iT)\ (i \in Z)$ 便覆盖了全部时间段 $iT + j\overline{T}\ (i \in Z, j \in Z_0^+)$, 其中 $iT + j\overline{T}$ 密集覆盖时间区间 $[0, \infty)$。上述结论可由如下引理给出。

引理 2　对于任意 $t \geq 0$ 和 $\epsilon > 0$, 都存在 $i \in Z$ 和 $j \in Z_0^+$, 使下列关系成立

$$\left| t - (iT + j\overline{T}) \right| < \epsilon \tag{7}$$

在这些结论的基础上, 便可证明定理 1 的能观性。

定理 1 能观性证明　(用反证法) 假设 Σ_D 不能观, 则对某非零向量 $\xi \in R^n$, 式(5) 成立。于是由式(5)、采样模式(3) 及引理 1 知, 对于所有 $i \in Z$ 和 $j \in Z_0^+$, 都有下列关系成立

$$C(iT + j\overline{T})F(iT + j\overline{T})e^{J(iT + j\overline{T})}\xi = 0$$

由于矩阵指数函数为解析函数, 因此由引理 2 进而可得, 对于所有 $t \geq 0$, 都有下述关系成立

$$C(t)F(t)e^{Jt}\xi = C(t)\Phi(t, 0)\xi = 0$$

这说明 Σ_C 不能观, 但这与题设 Σ_C 能观相矛盾。故假设 Σ_D 不能观不成立, 所以 Σ_D 能观。□

3.2　能 控 性

由式(2) 可得 $l\ (l \in Z_0^+)$ 时刻的离散系统状态为

$$x_l = F(t_l)e^{J(t_l)}x_0 + \sum_{k=0}^{l-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t_l - \tau)e^{J(t_l - \tau)} \times B(t_l - \tau)u_k \mathrm{d}\tau \tag{8}$$

即

$$x_l - F(t_l)e^{Jt_l}x_0 = \sum_{k=0}^{l-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t_l - \tau)e^{J(t_l - \tau)}B(t_l - \tau)u_k \mathrm{d}\tau \tag{9}$$

对于能控性问题, x_l 和 x_0 可以是任意值, 所以式(9) 左侧可以是 R^n 中的任意向量。式(9) 右侧则根据 l 的不同而适用于某特定的关于 l 单调递增的向量集合, 且对应于每个 l 构成 R^n 的一个子空间。如果对某有限 l, 相应的子空间与 R^n 相等, 则 Σ_D 显然能控。相反, 如果 Σ_D 不能控, 则式(9) 右侧就会在某个固定的子空间上而与 l 无关。也就是说, 此时存在一个非零向量 $\xi \in R^n$, 对于所有 $k \in Z_0^+$, 都有下列关系成立

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \xi^{\mathrm{T}}F(t_l - \tau)e^{J(t_l - \tau)}B(t_l - \tau)\mathrm{d}\tau = 0 \tag{10}$$

或

$$\int_0^{t_k} \xi^{\mathrm{T}}F(\tau)e^{J\tau}B(\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \tag{11}$$

于是有下述引理(与能观性的引理 1 对应):

引理 3　如果对任意 $\bar{t} \in R$, 当 $i = 0, 1, \cdots, n$ 时, 有下述关系成立

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t} + iT} \xi^{\mathrm{T}}F(\tau)e^{J\tau}B(\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \tag{12}$$

则该关系对全部 $i \in Z$ 都成立。

在此结论的基础上, 便可证明定理 1 的能控性。

定理 1 能控性证明　(用反证法) 假设 Σ_D 不能控, 则对某非零向量 $\xi \in R^n$, 有

$$\int_0^{t_k} \xi^{\mathrm{T}}F(\tau)e^{J\tau}B(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \quad k \in Z_0^+ \tag{13}$$

记 $t_k = j(NT + \overline{T}) + iT$, $j \in Z_0^+$, $i \in \{0, 1, \cdots, N\}$。将 $\bar{t} = j\overline{T}$ 代入引理 3, 可得下列关系

$$\int_0^{iT + j\overline{T}} \xi^{\mathrm{T}}F(\tau)e^{J\tau}B(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$$

$$i \in Z, \quad j \in Z_0^+ \tag{14}$$

由于 $iT + j\overline{T}\ (i \in Z, j \in Z_0^+)$ 密集覆盖了引理 2 中的整个正实空间, 故有

$$\int_0^{t} \xi^{\mathrm{T}}F(\tau)e^{J\tau}B(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^{t} \xi^{\mathrm{T}}\Phi(\tau, 0)B(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \quad t \in R^+ \tag{15}$$

这说明 $\xi^{\mathrm{T}}e^{-A\tau}B \equiv 0$, 因而 Σ_C 不能控。但这与题设矛盾, 所以 Σ_D 能控。□

4　正整数 I 的确定

为能在实际工程控制中应用上述重要结论, 有必要给出定义中正整数 I 的大致取值, 这样才能确定由本文采样方法得到的离散系统是否具有一致完全能控性或能观性。为此, 本文有下述结论:

推论 1　如果连续定常系统 Σ_C 能控(能观), 则采用本文采样方法得到的离散系统 Σ_D 也能控(能观), 且正整数 $I = (N + 1)n$。

证明　由于能控性和能观性的证明类似, 这里采用反证法仅证能观性。假设对于 $k \in Z_0^+$, 状态 x_k 在观测区间 $[t_k, t_{k+(N+1)n-1}]$ 内无法确定, 则存在某非零向量 $\xi \in R^n$, 有

$$Ce^{A(t_{k+(N+1)j+i} - t_k)}\xi = 0$$

$$i \in \{0, 1, \cdots, N\}, \quad j \in \{0, 1, \cdots, n - 1\} \tag{16}$$

由于是周期性采样, 即

$$t_{m+(N+1)} - t_m = NT + \overline{T}, \quad m \in Z_0^+ \tag{17}$$

因此

$$t_{k+(N+1)j+i} = t_{k+i} + (NT + \overline{T})j \tag{18}$$

可得

$$Ce^{A(NT + \overline{T})j}e^{(t_{k+i} - t_k)}\xi = 0 \tag{19}$$

(下转第 72 页)

算法运用形状随时间变化而变化的目标函数，在参数学习过程中对不同质量的样本数据采取不同的优化方式，有效地提高了系统的抗干扰能力。所提出的模糊逻辑系统鲁棒学习算法具有逼近精度高，不内插所有训练样本，适合于非线性系统辨识等优点，能较好地解决工程应用中噪声干扰问题，具有较高的实际工程应用价值。

参考文献(References):

[1] 王立新. 自适应模糊系统与控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.

[2] Wang L X, Mendel J M. Fuzzy basis function, universal approximation and orthogonal least squares learning[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 1992, (3): 807-814.

[3] Branco P J C, Dente J A. Fuzzy systems modeling in practice[J]. *Fuzzy Sets Syst*, 2001, 121(1): 73-93.

[4] Huber P J. *Robust Statistic*[M]. New York: Wiley, 1981.

[5] 周江文. 抗差最小二乘法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1997.

[6] 黄幼才. 数据探测与抗差估计[M]. 北京: 测绘出版社, 1990.

[7] 李银国, 曹长修. 神经元网络鲁棒能量函数的构造原理[J]. 模式识别与人工智能, 1996, 9(1): 1-9.
(Li Guoyin, Cao Changxiu. The construction principle for robust energy function of neural networks[J]. *Pattern Recog Artif Intell*, 1996, 9(1): 1-9.)

[8] Hampel F R, Rousseeuw P J. *Robust Statistics — The Approach Based on Influence Function*[M]. New York: Wiley, 1986.

[9] Jang J S, Sun C T, Mizutani E. *Neuro-fuzzy and Soft Computing*[M]. Prentice Hall, 1997.

[10] Ronald R Yager, Dimitar P Filev. Approximate clustering via the mountain method[J]. *IEEE Trans Syst Man Cybern*, 1994, (8): 1274-1284.

(上接第 68 页)

根据凯莱-汉密尔顿定理，式(19)可推广到整个 $j \in Z$ 上。由于式(19)对所有 $i \in \{0, 1, \cdots, N\}$ 都成立，因此对于所有 $s \in Z_0^+$，均有 $Ce^{(t_{k+s}-t_k)}\xi = 0$ 成立，由此推出 Σ_D 不能观。但这与定理 1 中的结论相矛盾，所以采样点数 $I = (N+1)n$。□

5 结 论

本文提出一种简单的采样方法，它能保证采样过程不影响连续系统的能控性和能观性。采用这种采样方法，平均采样时间间隔可以任意选择，而不依赖于系统的具体参数。该方法的一个主要优点是它适用于任何 n 阶能控或能观系统的无限开集合。所提出的采样方法为不等间距周期性采样，所以离散化后的系统为周期性时变系统，因而既可直接设计时变系统的反馈控制律，也可先将一个周期内的方程化为时不变方程，然后进行定常系统控制律设计。

参考文献(References):

[1] Huo B C. *Digital Control Systems*[M]. New York: Rinehart Winston, 1980. 20-78.

[2] Chew K K, Tomizuka M. Digital control of repetitive errors in disk drive systems[J]. *IEEE Contr Syst Mag*, 1998, 10(1): 16-20.

[3] Middleton R, Freudenberg J. Non-pathological sampling for generalized sampled-data hold functions[J]. *Automatica*, 1995, 31(4): 315-319.

[4] Bartolini G, Ferrara A, Utkin V I. Design of discrete-time adaptive sliding mode control[A]. *Proc 31st CDC*[C]. Arizona: Marsel Dekker, 1992. 2387-2391.

[5] Chan C Y. Discrete adaptive sliding mode tracking controller[J]. *Automatica*, 1997, 33(8): 999-1002.

[6] Bittanti S, Colaneri P, Guardabassi G. *H*-controllability and observability of linear periodic systems[J]. *SIAM J Contr Opt*, 1984, 22(6): 889-893.