第18卷 第1期　　控 制 与 决 策　　2003年1月
Vol 18 No. 1　　Control and Decision　　Jan. 2003

文章编号: 1001-0920(2003)01-0019-05

正则模糊神经网络是模糊值函数的泛逼近器

刘普寅
(北京师范大学 数学系, 北京 100875)

摘　要: 通过分析多元模糊值Bernstein 多项式的近似特性, 证明了4层前向正则模糊神经网络(FNN)的逼近性能。该类网络构成了模糊值函数的一类泛逼近器, 即在欧氏空间的任何紧集上, 任意连续模糊值函数能被这类FNN 逼近到任意精度。最后通过实例给出了实现这种近似的具体步骤。

关键词: 正则模糊神经网络; 模糊值Bernstein 多项式; 泛逼近器
中图分类号: TP183　　**文献标识码**: A

Regular fuzzy neural network as universal approximator of fuzzy valued function

LIU Pu-yin
(Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: The systematic analysis on approximation capability of four-layer feedforward regular fuzzy neural network (FNN) is presented. This is done by fuzzy valued multivariate Bernstein polynomial whose approximation to fuzzy valued functions is guaranteed. Such a four-layer FNN constitutes a universal approximator of fuzzy valued function. That is, each continuous fuzzy valued function defined on any compact set of Euclidean space can be approximated by the FNN to any degree of accuracy. A numerical example shows the realization process of the approximation.

Key words: Regular fuzzy neural network; Fuzzy valued Bernstein polynomial; Universal approximator

1 引　言

自20世纪90年代以来, 前向神经网络对于函数的逼近一直成为一个热点问题, 其研究也取得了丰硕的成果[1~4], 并在系统辨识[5]以及结构近似分析[6]等领域得到了广泛应用。

对于模糊环境中相应逼近问题的研究同样受到了普遍关注[7~14]。Buckley 等[7]研究了相关问题, 得出结论是: 混合型FNN 可作为模糊函数的泛逼近器, 而内部运算基于扩展原理和模糊算术的正则FNN 则不具有此性质。然而, 混合型FNN 在结构以及内部运算等方面具有很大的任意性[7], 这一事实使得这类网络难以设计和实现。正则FNN 的性能则优越得多, 其拓扑结构同普通网络一样, 而内部运算则基于扩展原理。那么, 正则FNN 能作为哪些连续模糊函数的泛逼近器? 这些模糊函数又有什么性质?对于这些问题的系统研究, 在理论和实际应用上无疑具有重要意义。

本文建立了4层前向正则FNN, 并将输入信号限制为实向量, 证明了这类正则FNN 可作为$\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R})$的连续模糊值函数的泛逼近器, 为实际系统设计和控制时模糊值函数的选取提供了依据。最后用实例说明了这种近似过程的具体实现步骤。

收稿日期: 2001-10-12; **修回日期**: 2002-01-24。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69974041, 69974006)。
作者简介: 刘普寅(1965—), 男, 湖南桃江人, 副教授, 博士生, 从事模糊控制、神经网络等研究。

2 预备知识

设$\mathbf{F}_0(\mathrm{R})$是有界模糊数全体, 即$\forall \tilde{A} \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$, 则有:

1) $\forall \alpha \in (0,1], \tilde{A}_\alpha \triangleq \{x \in \mathrm{R} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$是闭区间;

2) 支撑$\mathrm{Supp}(\tilde{A}) \triangleq \overline{\{x \in \mathrm{R} \mid \tilde{A}(x) > 0\}}$为有界集;

3) $\{x \in \mathrm{R} \mid \tilde{A}(x) = 1\} \neq \varnothing$。

为简单计, 记$\tilde{A}_0$为支撑$\mathrm{Supp}(\tilde{A})$。对于$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$, 用$D(\tilde{A}, \tilde{B})$表示$\tilde{A}, \tilde{B}$间的距离, 即

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (d_H(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha)) \tag{1}$$

这里d_H是Hausdorff度量, 即对$A, B \subset \mathrm{R}$, 有

$$d_H(A, B) = \max\Big\{\bigvee_{x \in A} \bigwedge_{y \in B} (|x - y|), \bigvee_{y \in B} \bigwedge_{x \in A} (|x - y|)\Big\} \tag{2}$$

其中$\vee$和$\wedge$是max-min模糊算子。由文献[15]知, $(\mathbf{F}_0(\mathrm{R}), D)$是一个完备可分的度量空间。记

$$\mathbf{F}_0(\mathrm{R})^n = \underbrace{\mathbf{F}_0(\mathrm{R}) \times \cdots \times \mathbf{F}_0(\mathrm{R})}_{n} \tag{3}$$

若$(\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n), (\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{B}_n) \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})^n$, 则定义

$$D_n((\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n), (\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{B}_n)) = \sum_{i=1}^{n} D(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i) \tag{4}$$

容易证明, $(\mathbf{F}_0(\mathrm{R})^n, D_n)$为完备可分度量空间。对于$\tilde{A} \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$, 设$\tilde{A}_\alpha = [a_\alpha^1, a_\alpha^2]$, 用$|\tilde{A}|$表示

$$D(\tilde{A}, \{0\}) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \{|a_\alpha^1| \vee |a_\alpha^2|\} \tag{5}$$

若函数$f: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, 则由扩展原理[16]知, f可扩展为$\tilde{f}: \mathbf{F}_0(\mathrm{R})^n \to \mathbf{F}(\mathrm{R})$: $\forall \tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$, 有

$$\tilde{f}(\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n)(y) = \bigvee_{f(x_1, \cdots, x_n) = y} \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \{\tilde{A}_i(x_i)\}\Big) \tag{6}$$

这里$\mathbf{F}(\mathrm{R})$是R上的模糊集全体。根据文献[16], 若f连续, 则$\tilde{f}: \mathbf{F}_0(\mathrm{R})^n \to \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$。为简单计, 仍记$\tilde{f}$为$f$。对于$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$, 用$\tilde{A} + \tilde{B}$和$\tilde{A} \cdot \tilde{B}$分别表示扩展加法和扩展乘法。若$\tilde{B} \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$, $a \in \mathrm{R}$, 则$a \cdot \tilde{B}$或$\tilde{B} \cdot a$是$\tilde{B}$的a数乘。而对$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{R}^n$, $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n) \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})^n$, 用$\langle x, \tilde{X}\rangle$或$\langle \tilde{X}, x\rangle$表示模糊内积, 即

$$\langle x, \tilde{X}\rangle \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \tilde{X}_i \tag{7}$$

当$\tilde{X}$退化为向量$X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{R}^n$时, $\langle x, \tilde{X}\rangle$为$\mathrm{R}^n$中的内积。给定$m \in \mathrm{N}$以及多元函数$f: [0,1]^n \to \mathrm{R}$, 则定义关于$f$的Bernstein多项式为

$$P_m(f; x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i_1, \cdots, i_n = 0}^{m} \binom{m}{i_1} \cdots \binom{m}{i_n} f\Big(\frac{i_1}{m}, \cdots, \frac{i_n}{m}\Big) \times x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} (1 - x_1)^{m - i_1} \cdots (1 - x_n)^{m - i_n} \tag{8}$$

记

$$K_{m; i_1, \cdots, i_n}(x_1, \cdots, x_n) = \binom{m}{i_1} \cdots \binom{m}{i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} (1 - x_1)^{m - i_1} \cdots (1 - x_n)^{m - i_n}$$

容易验证

$$\sum_{i_1, \cdots, i_n = 0}^{m} K_{m; i_1, \cdots, i_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \Big\{\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x_j^i (1 - x_j)^{m-i}\Big\} = (x_1 + 1 - x_1)^m \cdots (x_n + 1 - x_n)^m = 1 \tag{9}$$

定义关于模糊值函数$J: [0,1]^n \to \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$的模糊值Bernstein多项式为

$$B_m(J; x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i_1, \cdots, i_n = 0}^{m} K_{m; i_1, \cdots, i_n}(x_1, \cdots, x_n) \cdot J\Big(\frac{i_1}{m}, \cdots, \frac{i_n}{m}\Big) \tag{10}$$

3 主要结果

本章主要证明: 具有实数输入的4层前向正则FNN可作为模糊值函数的泛逼近器。讨论所用工具是模糊值Bernstein多项式。

引理1 设I为子标集, $\{a_i \mid i \in I\}$, $\{b_i \mid i \in I\} \subset [0,1]$, 且$h > 0$, 使$\forall i \in I$, $|a_i - b_i| \leq h$。则

$$\Big|\bigvee_{i \in I} a_i - \bigvee_{i \in I} b_i\Big| \leq h, \quad \Big|\bigwedge_{i \in I} a_i - \bigwedge_{i \in I} b_i\Big| \leq h \tag{11}$$

引理2 设$\tilde{A}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$, $m \in \mathrm{N}$, 且$\{\tilde{W}_k \mid k = 1, \cdots, m\}$, $\{\tilde{V}_k \mid k = 1, \cdots, m\} \subset \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$。则有:

1) $D(\tilde{A} \cdot \tilde{A}_1, \tilde{A} \cdot \tilde{A}_2) \leq |\tilde{A}| \cdot D(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$;

2) $D\Big(\sum_{k=1}^{m} \tilde{W}_k, \sum_{k=1}^{m} \tilde{V}_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{m} D(\tilde{W}_k, \tilde{V}_k)$。

定理1 设$J: [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \to \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$是连续模糊值函数, 且$\forall \epsilon > 0$, $m \in \mathrm{N}$, 使$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, 则有

$$D(B_m(J; x_1, \cdots, x_n), J(x_1, \cdots, x_n)) < \epsilon \tag{12}$$

证明 不妨设$[a_i, b_i] = [0, 1]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则有

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (i - mt)^2 t^i (1 - t)^{m-i} = mt(1 - t) \leq m/4 \tag{13}$$

由于 J 在 $[0,1]^n$ 上一致连续, 故对 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, $m\in\mathbb{N}$, 满足 $\forall i_1,\cdots,i_n=1,\cdots,m$, 且

$$\forall x,y\in\left[\frac{i_1-1}{m},\frac{i_1}{m}\right]\cdots\left[\frac{i_n-1}{m},\frac{i_n}{m}\right]$$

则有
$$D(J(x),J(y))<\epsilon/2 \tag{14}$$

存在 $M>0$, 使 $\forall x,y\in[0,1]^n$, $D(J(x),J(y))<M$。对于 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$, 由式 (9), (13), (14) 和引理 2 得

$$D(B_m(J;x_1,\cdots,x_n),J(x_1,\cdots,x_n))=$$
$$D\left(\sum_{i_1,\cdots,i_n=0}^{m}K_{m;i_1,\cdots,i_n}(x)\cdot J\left(\frac{i_1}{m},\cdots,\frac{i_n}{m}\right),J(x)\right)\leq$$
$$\frac{\epsilon}{2}+\frac{Mn}{m^2\delta^2}\frac{m}{4}=\frac{\epsilon}{2}+\frac{Mn}{4m\delta^2} \tag{15}$$

选取 $m>\frac{Mn}{2\epsilon\delta^2}$, 则定理得证。□

若 J 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 当定理 1 中的 $[a_1,b_1]\cdots[a_n,b_n]$ 变为 $\mathbb{R}^n$ 的任意紧子集时, 则定理 1 结论仍然为真。记集合

$$\mathbf{P}=\Big\{P:\mathbb{R}^n\to\mathbf{F}_0(\mathbb{R})\ \Big|\ P(x)=\sum_{k=1}^{q}\widetilde{W}_k\cdot P_k(x),\ q\in\mathbb{N},\widetilde{W}_k\in\mathbf{F}_0(\mathbb{R})\Big\} \tag{16}$$

其中 $P_k(\cdot)$ 是 n 元多项式。

定义 1　设 $\mathbf{C}$ 是 $\mathbb{R}^n\to\mathbf{F}_0(\mathbb{R})$ 全体模糊值函数的子类。对于 $J:\mathbb{R}^n\to\mathbf{F}_0(\mathbb{R})$, 若 $\forall\epsilon>0$ 以及紧集 $U\subset\mathbb{R}^n$, $\forall H\in\mathbf{C}$, 使 $\forall x\in U$, $D(J(x),H(x))<\epsilon$, 则称 $\mathbf{C}$ 是 J 的泛逼近器。

由定理 1 知, $\mathbf{P}$ 是任意连续模糊值函数 $J:\mathbb{R}^n\to\mathbf{F}_0(\mathbb{R})$ 的泛逼近器。记

$$\mathbf{H}=\Big\{H:\mathbb{R}^n\to\mathbf{F}_0(\mathbb{R})\ \Big|\ H(x)=\sum_{x=1}^{q}\widetilde{W}_k\times\Big(\sum_{j=1}^{p}\widetilde{V}_{kj}\cdot\sigma(\langle x,\widetilde{U}(j)\rangle+\widetilde{\Theta}_j)\Big),p,q\in\mathbb{N},$$
$$\widetilde{W}_k,\widetilde{V}_{kj},\widetilde{\Theta}_j\in\mathbf{F}_0(\mathbb{R}),\widetilde{U}(j)\in\mathbf{F}_0(\mathbb{R})^n\Big\} \tag{17}$$

$\mathbf{H}$ 中的每个元素 H 即为一个含有两个隐含层的前向正则 FNN。其中第 1 层隐含结点有转移函数 $\sigma(\cdot)$, 阈值为 $\widetilde{\Theta}_j$; 第 2 层隐含结点是线性的(如图 1 所示), $\widetilde{U}(j)=(\widetilde{U}_{1j},\cdots,\widetilde{U}_{nj})$。若限制 $\widetilde{U}(j),\widetilde{V}_{kj},\widetilde{\Theta}_j$ 分别为 $u(j)\in\mathbb{R}^n$, v_{kj}, $\theta_j\in\mathbb{R}$, 则得 $\mathbf{H}$ 的子集

$$\mathbf{H}_0=\Big\{H:\mathbb{R}^n\to\mathbf{F}_0(\mathbb{R})\ \Big|\ H(x)=\sum_{k=1}^{q}\widetilde{W}_k\times$$

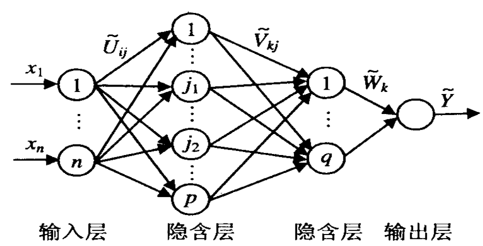


图 1　4 层前向正则 FNN

$$\Big(\sum_{j=1}^{p}v_{kj}\sigma(\langle u(j),x\rangle+\theta_j)\Big),p,q\in\mathbb{N},$$
$$\widetilde{W}_k\in\mathbf{F}_0(\mathbb{R}),v_{kj},\theta_j\in\mathbb{R},u(j)\in\mathbb{R}^n\Big\} \tag{18}$$

为研究 $\mathbf{H}$ 或 $\mathbf{H}_0$ 的泛逼近性, 首先给出泛逼近器的一般性质, 即有如下引理:

引理 3　若 $\mathbf{C}$ 是模糊值函数 $J:\mathbb{R}^n\to\mathbf{F}_0(\mathbb{R})$ 的泛逼近器, 且 $\forall H\in\mathbf{C}$, H 连续, 则 J 也是连续的。

由如下定理易知, 具有实数输入的 4 层前向正则 FNN 拥有同普通前向网络类似的性质。

定理 2　设 $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 Tauber-Wiener 函数, 则有:

1) 对于任何 $P\in\mathbf{P}$, $\mathbf{H}_0$ 可作为 P 的泛逼近器;

2) 若 $J:\mathbb{R}^n\to\mathbf{F}_0(\mathbb{R})$ 连续, 则 $\mathbf{H}_0$ 和 $\mathbf{H}$ 均为 J 的泛逼近器。

证明　设

$$P(x)=\sum_{k=1}^{q}\widetilde{W}_k\cdot P_k(x),\quad x\in\mathbb{R}^n \tag{19}$$

且不妨设 $|\widetilde{W}_1|,\cdots,|\widetilde{W}_q|$ 不全为 0。任取紧集 $U\subset\mathbb{R}^n$, 以及 $\epsilon>0$, 对于多项式 $P_k(k=1,\cdots,q)$, 存在 $p_k\in\mathbb{N}$, $v'_{k1},\cdots,v'_{kp_k}$, $\theta'_{k1},\cdots,\theta'_{kp_k}\in\mathbb{R}$, $u'_k(1),\cdots,u'_k(p_k)\in\mathbb{R}^n$, 使 $\forall x\in U$, 有

$$\Big|P_k(x)-\sum_{j=1}^{p_k}v'_{kj}\sigma(\langle x,u'_k(j)\rangle+\theta'_j)\Big|<\frac{\epsilon}{q\cdot\bigvee_{k=1}^{q}\{|\widetilde{W}_k|\}} \tag{20}$$

令 $p=\sum_{k=1}^{q}p_k$, $k=2,\cdots,q$, 记 $\beta_k=\sum_{r=1}^{k-1}p_r$, $\beta_1=0$, $\forall k=1,\cdots,q$, $j=1,\cdots,p$。定义

$$v_{kj}=\begin{cases}v'_{k(j-\beta_k)}, & \beta_k<j\leq\sum_{r=1}^{k}p_r\\ 0, & 否\quad则\end{cases}$$

$$\theta_j=\theta'_{k(j-\beta_k)},\quad\beta_k<j\leq\sum_{r=1}^{k}p_r$$

$$u(j) = u'_{k(j-\beta_k)}, \quad \beta_k < j \le \sum_{r=1}^{k} p_r$$

取

$$H(x) = \sum_{k=1}^{q} \widetilde{W}_k \cdot \sum_{j=1}^{p} v_{kj}\,\sigma(\langle x, u(j)\rangle + \theta_j) \tag{21}$$

则 $H \in \mathbf{H}$。由引理 2 及式(20) 知, $\forall x \in U$, $D(H(x), P(x)) < \epsilon$。

2) 由定理 1 和定理 2 证明 1 即得。从而定理得证。□

定理 3 若 $\sigma: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 是连续 Tauber-Wiener 函数, 且 $J: \mathrm{R}^n \to \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$, 则下述各命题等价:

1) J 连续;

2) $\mathbf{H}_0$ 是 J 的泛逼近器;

3) $\mathbf{H}$ 是 J 的泛逼近器;

4) $\mathbf{P}$ 是 J 的泛逼近器。

由定理 1～ 定理 3 及引理 3 即得证。

4 例 子

本章通过一个实例来说明由定理 2 和定理 3 所示近似的具体实现过程。设转移函数

$$\sigma(t) = \frac{1}{1 + \exp(-t)} \tag{22}$$

其中 σ 是 Tauber-Wiener 函数[2,5]。给定误差界 $\epsilon = 0.2$, 维数 $n = 1$, 便可直接验证如下引理:

引理 4 设 $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 是连续可微函数, f' 是 f 的导函数, $C \subset \mathrm{R}$ 是紧集, $\|f'\|_C$ 是 f' 在 C 上的最大模。设 $\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2 \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$, 且 $\mathrm{Supp}(\widetilde{W}_j) \subset C$, $j = 1, 2$, 则

$$D(f(\widetilde{W}_1), f(\widetilde{W}_2)) \le \|f'\|_C D(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2) \tag{23}$$

引理 5[2] 设 $f: [0, 1] \to \mathrm{R}$ 是连续函数, $N \in \mathrm{N}$, $t_j = j/N$ $(j = 0, 1, \cdots, N)$, 且

$$\forall t \in \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right], \quad \left|f(t) - f\left(\frac{j-1}{N}\right)\right| < \frac{\epsilon}{4}$$

记

$$g(t) = f(0) + \sum_{j=1}^{N}\left(f\left(\frac{j}{N}\right) - f\left(\frac{j-1}{N}\right)\right)\sigma\left(K\left(t - \frac{j-1}{N}\right)\right) \tag{24}$$

其中 $K/N > W$, $t > W \Rightarrow |\sigma(t) - 1| < 1/N$, $t < -W \Rightarrow |\sigma(t)| < 1/N$。则 $\forall t \in [0, 1]$, $|f(t) - g(t)| < \epsilon$。

给定模糊值函数 $S: \mathrm{R} \to \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$ 如下: $\forall t \in \mathrm{R}$, $S(t) = \exp\{\cos(\widetilde{W} \cdot t)\}$, 这里 $\widetilde{W} \in \mathbf{F}_0(\mathrm{R})$ 是给定的模糊数。则 $\forall x \in \mathrm{R}$, 有

$$\widetilde{W}(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2 - 2x, & 1/2 < x \le 1 \\ 0, & \text{否 则} \end{cases}$$

由引理 4 容易验证, S 在 R 上连续。对于误差界 $\epsilon = 0.2$, 确定近似表示 S 的 4 层前向 FNN 的步骤如下:

步骤 1 确定关于 S 的模糊值多项式 $P(\cdot)$, 易知 $|\widetilde{W}| < 1/6$, 而对应于引理 4, $f(t) = \exp(\cos(t))$, $\forall t_1, t_2 \in [0, 1]$。容易验证, $\mathrm{Supp}(\widetilde{W} \cdot t_i) \subset [0, 1]$, $i = 1, 2$。则有

$$\begin{aligned} &D(S(t_1), S(t_2)) = D(f(\widetilde{W} \cdot t_1), f(\widetilde{W} \cdot t_2)) \le \\ &\|f'\|_{[0,1]} D(\widetilde{W} \cdot t_1, \widetilde{W} \cdot t_2) \le \\ &\exp\{\sin(1)\}\,|\widetilde{W}|\,|t_1 - t_2| < \\ &2.32\,|\widetilde{W}|\,|t_1 - t_2| \le 2.32\,|t_1 - t_2| \end{aligned}$$

设 $q \in \mathrm{N}$, 则有

$$D\left(S\left(\frac{i}{q}\right), S\left(\frac{i-1}{q}\right)\right) \le \frac{2.32}{q}, \quad i = 1, \cdots, q$$

由定理 1 得

$$M \triangleq \bigvee_{t_1, t_2 \in [0,1]} \{D(S(t_1), S(t_2))\} \le 2.32$$

$$\delta = 0.08$$

当 $q \ge M/\epsilon\delta^2$, 即 $q \ge 182$ 时, 则 $D(B_q(S(t), S(t)) < \epsilon/2$, $t \in [0, 1]$。为简单计, 取 $q = 4$ 来完成所需近似过程, 则有

$$B_q(S)(t) = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k} t^k (1-t)^{4-k} \times \exp\left(\cos\left(\widetilde{W} \cdot \frac{k}{4}\right)\right)$$

步骤 2 对于 $k = 0, 1, \cdots, 4$, 确定 3 层前向网络 N_k。记

$$P_k(t) = \binom{4}{k} t^k (1-t)^{4-k}$$

则

$$W_k \triangleq \exp\left(\cos\left(\widetilde{W} \cdot \frac{k}{4}\right)\right) \Rightarrow |\widetilde{W}_k| \le 2.72$$

由引理 5 得 3 层前向网络

$$N_k(t) = P_k(0) + \sum_{j=1}^{p_k}\left(P_k\left(\frac{j}{p_k}\right) - P_k\left(\frac{j-1}{p_k}\right)\right) \times \sigma\left(K_j\left(t - \frac{j-1}{p_k}\right)\right) \tag{25}$$

其中: $k = 0, 1, \cdots, 4$, K_j 和 p_k 满足下列条件

$$|t_1 - t_2| < 1/p_k \Rightarrow$$

$$|P_k(t_1) - P_k(t_2)| < \frac{\epsilon}{2q \bigvee_{1 \le k \le q}\{|\widetilde{W}_k|\}}$$

$$K_j/p_k \ge W: t > W \Rightarrow |\sigma(t) - 1| < 1/p_k$$

$$t < W \Rightarrow \left|\sigma(t)\right| < 1/p_k \qquad (26)$$

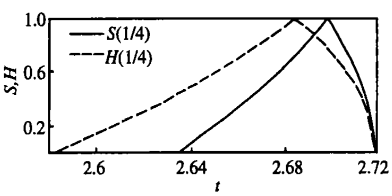
容易验证, $\|P_k'\|_{[0,1]} \le 4, k = 0, 1, \cdots, 4$。故由式(26)及引理2, 可以选取 $W = 6.2, p_k = 440 (k = 0, 1, \cdots, 4), K_j = 2\,630 (j = 1, \cdots, p_k)$。

步骤 3　构造 4 层正则 FNN $H: \mathbb{R} \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R})$。由定理 2 及式(25), 令

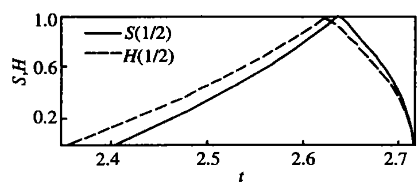
$$H(t) = \sum_{k=1}^{q} \tilde{W}_k \cdot \sum_{j=1}^{p} v_{kj}\sigma(u_j \cdot t + \theta_j) \qquad (27)$$

则 $\forall t \in [0, 1], D(S(t), H(t)) < \varepsilon$。由于 $P_0(0) = 1 = 2\sigma(0), \tilde{W}_0 = \exp(\cos(\tilde{W} \cdot 0)) = \exp(1), P_k(0) = 0, k = 1, \cdots, 4$, 则有

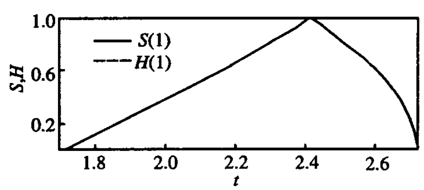
$$H(t) = \left[2\sigma(0) + \sum_{j=1}^{440}\left(\left(1 - \frac{j}{440}\right)^4 - \left(1 - \frac{j-1}{440}\right)^4\right) \times \sigma\left(2\,630t - \frac{263(j-1)}{44}\right)\right]\exp(1) + \sum_{k=1}^{4}\exp\left(\cos\left(\tilde{W} \cdot \frac{k}{4}\right)\right) \cdot \sum_{j=1}^{440}\left(P_k\left(\frac{j}{440}\right) - P_k\left(\frac{j-1}{440}\right)\right)\sigma\left(2\,630t - \frac{263(j-1)}{44}\right)$$



(a)　$S(1/4)$ 和 $H(1/4)$



(b)　$S(1/2)$ 和 $H(1/2)$



(c)　S(1) 和 H(1)

图 2　模糊集 S 和 H

原模糊值函数 $S(\cdot)$ 与其 FNN 近似 $H(\cdot)$ 在 $t = 1/4, t = 1/2$ 和 $t = 1$ 处的值, 即模糊集 $S(1/4)$ 与 $H(1/4), S(1/2)$ 与 $H(1/2)$ 和 $S(1)$ 与 $H(1)$ 对应的隶属曲线如图 2 所示。

通过比较可以看出, 即使选取阶数比式(20)要求低得多的多项式, 对应的 4 层前向 FNN $H(\cdot)$ 对模糊值函数 $S(\cdot)$ 的逼近精度也能满足给定条件。

5　结　　语

本文在一般意义下得到了 4 层前向正则 FNN 的泛逼近性, 并就一维情形给出了这类近似的实现步骤。今后的研究工作主要集中于以下两个重要问题: 1) 如何设计更为简单、明了且易实现的近似算法; 2) 就二维和二维以上的高维情形, 给出简单且易实现的近似过程。

参考文献(References):

[1] Carozza M, Rampone S. Function approximation from noise data by an incremental RBF network[J]. *Pattern Recog*, 1999, 32(12): 2081-2083.

[2] Chen T P, Chen H, Liu R W. Approximation capability in $C(R^n)$ by multilayer feedforward networks and related problems[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 1995, 6(1): 25-30.

[3] Hornik Kurt. Approximation capabilities of multilayer feedforward networks[J]. *Neural Networks*, 1991, 4(2): 251-257.

[4] Scarselli F, Tsoi A C. Universal approximation using feedforward neural networks: A survey of some existing methods and some new results[J]. *Neural Networks*, 1998, 11(1): 15-37.

[5] Chen T P, Liang Y. Output capability of neural network to dynamical system defined in whole space[J]. *Science in China—Series E*, 1998, 28(4): 338-349.

[6] Luo J G, Yu J, Wang H, et al. Research on structural approximation methods based on artificial neural network[J]. *Science in China—Series A*, 1994, 24(6): 653-658.

[7] Buckley J J, Hayashi Y. Can fuzzy neural nets approximate continuous fuzzy functions[J]. *Fuzzy Sets Syst*, 1994, 61(1): 43-51.

[8] Feuring T, Lippe W M. The fuzzy neural network approximation lemma[J]. *Fuzzy Sets Syst*, 1999, 102(2): 227-237.

(下转第 28 页)

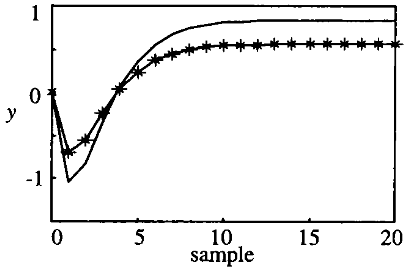


图 2 系统输出

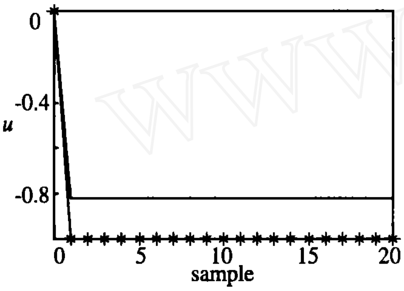


图 3 系统输入

5 结 语

在基于 Hammerstein 模型的两步法控制中加入对中间变量的约束, 可解决非线性代数方程无实解问题, 使系统更容易稳定, 性能指标更优, 系统稳定时稳态误差更小。本文具体给出了中间变量的确定方法, 据此可以具体设计基于Hammerstein模型的两步法控制器。

参考文献(References):

[1] Anbunmani K, Patnaik L M, Sarma I G. Self-tuning-minimum variance control of nonlinear systems of the Hammerstein model[J]. *IEEE Trans Autom Contr*, 1981, 26(10): 959-961.

[2] Zhu Q M, Warwich K, Douce J L. Adaptive general predictive controller for nonlinear systems[J]. *IEE Proc D*, 1991, 138(1): 33-40.

[3] Bloemen H H J, Van d Boom T J J, Verbruggen H B. Model-based predictive control for Hammerstein-Wiener systems[J]. *Int J Contr*, 2001, 74(5): 482-495.

[4] Zhu X F, Seborg D E. Nonlinear predictive control based on Hammerstein models[J]. *Control Theory Appl*, 1994, 11(6): 564-575.

[5] 徐湘元, 毛宗源. 基于 Hammerstein 模型的预测控制的分析与研究[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(8): 529-532. (Xu Xiangyuan, Mao Zongyuan. The analysis and research of predictive control based on Hammerstein model[J]. *Control Theory Appl*, 2000, 17(8): 529-532.)

[6] Wang W. Generalized predictive control of nonlinear systems of the Hammerstein form[J]. *Control Theory Appl*, 1994, 11(6): 672-680.

[7] Pearson R K, Pottmann M. Gray-box identification of block-oriented nonlinear models[J]. *J Proc Contr*, 2000, 10(4): 301-315.

[8] 张峻. 预测控制若干理论问题的研究[D]. 上海: 上海交通大学, 1997.

(上接第 23 页)

[9] Liu Puyin. On the approximation realization of fuzzy closure mapping by multilayer regular fuzzy neural network[J]. *Multiple Valued Logic*, 2000, 5(3): 463-480.

[10] Liu Puyin. A novel fuzzy neural network and its approximation capability[J]. *Science in China—Series F*, 2001, 44(3): 184-194.

[11] Liu Puyin. Analyses of regular fuzzy neural networks for approximation capability[J]. *Fuzzy Sets Syst*, 2000, 114(3): 329-338.

[12] Liu Puyin, Wang Huaxing. Universal approximation of a class of continuous fuzzy valued functions by regular fuzzy neural networks[J]. *Acta Elect Sinica*, 1997, 25(11): 41-45.

[13] Liu Puyin, Wang Hao. Research on approximation capability of regular fuzzy neural network to continuous fuzzy function[J]. *Science in China—Series E*, 1999, 41(2): 143-151.

[14] Mao J H, Zhang X F, Li Y D. Research on fuzzy system as universal approximator for function[J]. *Science in China—Series E*, 1997, 27(4): 362-367.

[15] Diamond P, Kloeden P. *Metric Spaces of Fuzzy Sets*[M]. Singapore: World Sci Press, 1994.

[16] Nguyen H T. A note on the extension principle for fuzzy sets[J]. *J Math Anal Appl*, 1976, 64(2): 369-380.