

文章编号: 1001-0920(2003)01-0045-04

蚁群算法在连续空间寻优问题求解中的应用

汪 镭, 吴启迪

(同济大学 电子与信息工程学院, 上海 200092)

摘 要: 将蚁群算法引入连续空间的函数寻优问题求解, 通过将传统蚁群算法中的“信息量留存”过程拓展为连续空间中的“信息量分布函数”, 定义了相应的求解算法。对多极值函数和非线性连续函数的寻优实例仿真取得了良好的结果, 显示了蚁群算法在连续空间优化问题中的应用前景。

关键词: 蚁群算法; 连续空间寻优; 信息量分布函数

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A

Ant system algorithm in continuous space optimization

WANG Lei, WU Qi-di

(Institute of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The aim is to introduce the traditional ant system (AS) algorithm which is fit in combined optimization problem into optimization problem in continuous space. By expanding the “trail remaining” process in traditional AS into “trail distribution function” in continuous space, an extended AS algorithm is proposed. Simulation results of the global optimum value searching of multimimum continuous function and nonlinear continuous function demonstrate the effectiveness and the applicability of the algorithm.

Key words: Ant system algorithm; Continuous function optimization; Trail remaining distribution function

1 引 言

蚁群算法在求解组合优化问题中显示出优良的特征。这是一种基于种群的启发式搜索算法, 它充分利用蚁群能搜索从蚁穴至食物间最短路径的集体寻优特征, 以及该过程与旅行商问题(TSP)之间的相似性, 用该算法得到了具有NP-难度的旅行商问题^[1-3]的最优解。该算法还被用于求解Job-shop 调度问题^[4,5]、二次指派问题^[6-9]、背包问题^[10]等, 并被用于数据的特征聚类^[11], 取得了良好的仿真实验结果。

通过许多研究者的努力, 目前该算法已在最初模型的基础上得到了改进和扩展。蚁群算法在连续

空间寻优中的应用是人们所关注的, 因此本文结合在连续空间内的函数寻优问题求解, 对蚁群算法进行合理的定义。

2 连续空间内函数寻优的蚁群算法定义

在离散空间优化问题中, 蚁群算法的信息量留存、增减和最优解的选取, 都是通过离散的点状分布求解方式进行的。在连续空间的寻优问题求解中, 解空间是以区域性方式表示, 而不是以离散的点集方式表示。因此, 连续空间寻优蚁群算法与离散空间寻优蚁群算法之间, 至少应有蚁群信息量留存方式、蚁群在解空间中的寻优方式和蚁群行进策略 3 方面的不同。

收稿日期: 2001-10-29; 修回日期: 2002-02-01。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79970030, 60104004, 70271035); 国家高性能计算基金资助项目(99520)。

作者简介: 汪镭(1970—), 男, 江苏无锡人, 副教授, 博士, 从事智能自动化等研究; 吴启迪(1947—), 女, 浙江永嘉人, 校长, 教授, 博士生导师, 从事智能自动化、CMS 等研究。

总体而言,连续空间内蚁群算法的寻优过程在蚁群初始分布后,还应包括信息量分布函数给定、信息量分布状态分析、蚁群移动方向决策等循环过程。下面以一维空间函数 $y = f(x)$ 的最大值(最小值)寻优为例,进行一维连续空间内蚁群算法的应用研究。对于多维空间内的函数寻优,在此基础上作相应扩展即可。本文所定义的寻优方法如下:

第1步 将蚁群在解空间内按一定方式作初始分布。

首先根据问题定义域的大小,决定合适的蚁群规模,即蚁数 N 的大小。然后将问题的定义域进行 N 等分,并在 N 个子区间的中部放置一个单蚁 i ($i = 1 \sim N$)。而每个单蚁又带有一个随自己坐标位置变化的移动子区间,自己则处于该移动子区间的正中。各移动子区间的长度与问题定义域的 $1/N$ 相等,即将定义域 N 等分后所得的子区间长度相等。当各单蚁处于各子区间的中间位置时,定义各子区间内的蚁数为 1。当各单蚁移动时,根据其所带移动子区间与相邻两子区间的重叠程度变化,定义这两个相邻子区间内的实际蚁数变化。

根据以上定义可知,如果问题的定义域为 $[Start, End]$,则当蚁数为 N 时,各子区间长度

$$D_{RL} = \frac{End - Start}{N} \quad (1)$$

由以上描述知,每个单蚁所带的移动子区间长度 $D_{MRL} = D_{RL}$,而蚁群的初始坐标分布为

$$x_i = Start + \left(\frac{i}{N} - \frac{1}{2}\right)D_{RL} \quad (2)$$

其所处子区间 i 的左边界为

$$x_{L_i} = Start + (i - 1)D_{RL} \quad (3)$$

右边界为

$$x_{R_i} = Start + iD_{RL} \quad (4)$$

当单蚁移动 Δx 时,由于相邻子区间与其所带移动区间的重合度变化 Δx ,则定义相邻两区间内相应于此单蚁移动的实际蚁数 N_{R_i} 的变化

$$\Delta n = \frac{\Delta x}{D_{MRL}} = \frac{\Delta x}{D_{RL}} \quad (5)$$

即向右移动时,右边子区间内的实际蚁数增加 Δn ,而左边子区间内的实际蚁数减少 Δn ;向左移动时则反之。

第2步 根据蚁群所处解空间位置的优劣决定当前蚁群的信息量分布。

根据蚁群当前位置 x_i 处的函数值 $f(x_i)$ 的大小,按寻优问题类别的不同,决定其所留下的相应信

息量分布函数的峰值 M_i 的大小,并给出相应的信息量分布函数。例如特定区间内的函数最小值寻优,可定义相应的信息量分布函数峰值

$$M_i = C - f(x_i) \quad (6)$$

其中 C 为根据具体 $f(x_i)$ 的大体范围所设定的常数,满足 $C > f(x_i)$ 。这样,对应于较小的函数值,其信息量分布函数的峰值反而大。再如函数最大值的寻优,当 $f(x_i) > 0$ 时,则可定义

$$M_i = C_1 f(x_i) \quad (7)$$

其中 C_1 为根据具体问题而设定的正常数。当 $f(x_i) < 0$ 时,可定义

$$M_i = \frac{C_3}{C_2 - f(x_i)} \quad (8)$$

C_2 和 C_3 的设定同上。对于一维空间内的函数寻优问题,可定义单蚁所对应的信息量分布函数

$$T_i(x) = \frac{M_i e^{-k_i(x-x_i)}}{[1 + e^{-k_i(x-x_i)}]^2} \quad (9)$$

这样的信息量分布函数呈草帽形,其峰值为 M_i ,中心点偏移值为 x_i ,根据实际问题所定义的波形压缩系数为 k_i 。

第3步 根据当前蚁群散布的总信息量分布和上一循环中信息量的遗留及挥发情况,决定各子区间内应有的蚁数。

首先,求得当前蚁群散布的总信息量分布函数在各子区间内的积分值

$$IN_i = \int_{x_{L_i}}^{x_{R_i}} T_i(x) dx \quad (10)$$

各子区间的实际总信息量

$$I_i = IN_i + \eta_{L_{ast}} - E_V \quad (11)$$

它是当前蚁群在该子区间内散布的信息量 (IN_i) 加上上一次总信息量的遗留部分 ($\eta_{L_{ast}}$, η 为信息量留存系数),再与所设定的信息量挥发常量 E_V 相减所得的结果。然后,求取实际总信息量在整个问题区间的总和值

$$I_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N I_i \quad (12)$$

这样,根据各子区间实际总信息量 I_i 占 I_{Σ} 的比例,便可求得当前蚁群分布条件下各子区间应有的蚁数

$$N_M = \frac{I_i}{I_{\Sigma}} N \quad (13)$$

第4步 根据各子区间内应有的蚁群分布与当前蚁群分布之间的差别,决定蚁群的移动方向,并加以移动。

首先,根据已求得的各子区间内应有的蚁数 N_M ,以所考察之蚁当前所处区间为界进行求和操

作, 求出被考察之蚁所处区间 i 以左应有蚁数之和 N_{ML} 及所处区间 i 以右应有蚁数之和 N_{MR} , 作为判定被考察之蚁移动方向的依据条件。其中

$$N_{ML} = \sum_{j=1}^{i-1} N_{jM}, \quad N_{MR} = \sum_{j=i+1}^N N_{jM} \quad (14)$$

这里, 还需根据已知各子区间内实际蚁数 N_{iR} , 以所考察之蚁当前所处区间为界进行求和操作, 求出被考察之蚁所处区间 i 以左实际蚁数之和 N_{iRL} 及所处区间 i 以右实际蚁数之和 N_{iRR} 。其中

$$N_{iRL} = \sum_{j=1}^{i-1} N_{jR}, \quad N_{iRR} = \sum_{j=i+1}^N N_{jR} \quad (15)$$

然后, 根据被考察之蚁所处区域及其左右实际蚁数与应有蚁数之间的差别, 决定该蚁的运动方向, 并作 Δx 的坐标变化。其运动规则如表 1 所示。其他情况下被考察之蚁均不变。

表 1 被考察之蚁坐标变化运动规则

规则	$N_{iRL} ? N_{ML}$	$N_{iR} ? N_M$	$N_{iRR} ? N_{MR}$	被考察之蚁坐标变化值
1	<	=	>	$-\Delta x$
2	>	=	<	$+\Delta x$
3	=	>	<	$+\Delta x$
4	>	>	<	$+\Delta x$
5	<	>	=	$-\Delta x$
6	<	>	>	$-\Delta x$
7	<	>	<	$+/-\Delta x$

在完成一次蚁群整体移动之后, 又可返回第 2 步, 进行相应的信息量分布、考察和蚁群移动操作。如此循环往复, 直到产生最优解。

3 实例研究及仿真结果

例 1 多极值函数的最小值寻优问题求解。被寻优的函数为

$$y = f_1(x) = 5x^6 - 36x^5 + 82x^4 - 60x^3 + 36$$

此为多极值函数, 已知其局部最优点位于 $x = 1, x = 2$ 和 $x = 3$ 处。在 $x = 2$ 处函数取得局部最大值, 在 $x = 1$ 和 $x = 3$ 处函数取得局部最小值, 其中在 $x = 3$ 处为全局最小值。函数的寻优区间为 $[0, 3.5]$, 如图 1 所示。

为表征算法的收敛特征, 定义该例中蚁群的总体求解误差

$$E_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N |x_i - 3|$$

这里需要选择的参数为: 蚁群规模(蚁数 N), 信息量

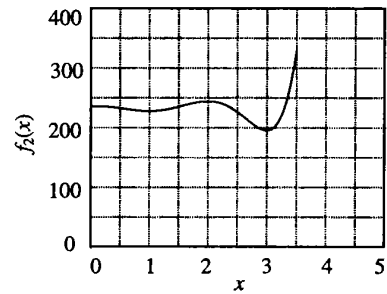


图 1 用于蚁群算法寻优的多极值函数

分布函数的压缩系数 k_i , 信息留存系数 η , 寻优步长 Δx , 信息量挥发常数 E_v 等。各函数峰值 M_i 取为 $[C - f_1(x_i)]$ 。

总体而言, 整个蚁群都能从初始的均匀分布状态按所给算法以一定精度趋于最优解。当求解空间随寻优过程逐步缩小时, 经 5 次寻优过程后, 其最终的总体求解误差 $E_{\Sigma} = 0.037$, 即每个单蚁的平均求解误差为 0.14%。在 5 次寻优过程中, $N = 9$, 循环次数均取 500, η 均取 0.01, E_v 均取 50, M_i 表达式中的常数 $C = 150$ 。

这里以第 1 次寻优过程为例, 给出所定义蚁群算法的总体求解误差变化过程, 如图 2 所示, 其中 k 代表蚁数。典型的 5 次寻优过程的蚁群算法参数设定列于表 2。

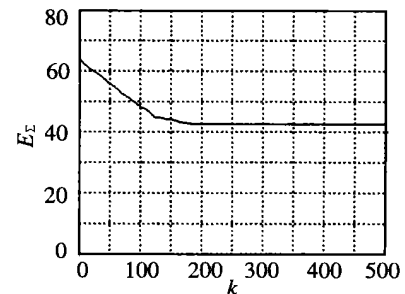


图 2 第 1 次寻优过程的误差变化动态

表 2 蚁群算法的参数设定

次数	寻优区间	压缩系数 k_i	寻优步长 Δx	总体求解误差 E_{Σ}	蚁群的最终分布
1	[0, 3.5]	6	0.008	1.29	[2.6, 3.2]
2	[2.4, 3.4]	1.8	0.008	0.884	[2.8, 3.1]
3	[2.7, 3.2]	2.8	0.004	0.297	[2.95, 3.05]
4	[2.9, 3.1]	6.9	0.004	0.096	[2.97, 3.02]
5	[2.95, 3.05]	14.05	0.003	0.037	[2.99, 3.01]

例 2 非线性函数的最大值寻优问题求解。被寻优的非线性函数为

$$y = f_2(x) = 3x^2 e^{-x}$$

此为非线性单极值函数, 在 $x = 2$ 处取得全局最大值 1.624。寻优区间为 $[0, 3]$, 如图 3 所示。定义蚁群的总体求解误差

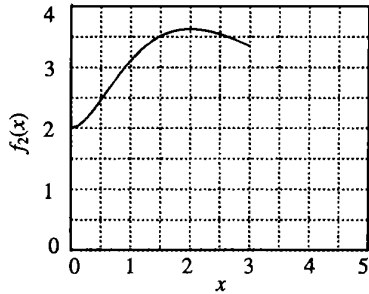


图 3 用于蚁群算法寻优的非线性函数

$$E_{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - 2|$$

这里令各信息量分布函数的峰值形式为 $Cf_2(x_i)$, 取 $N = 9, \eta = 0.01, \Delta x = 0.0002, E_v = 65, C = 200$ 。整个蚁群算法只需对 k_i 进行调整, 便可使蚁群进入良好的收敛状态(循环次数统一为 8000)。当求解空间随寻优过程逐步缩小时, 经 4 次典型求解过程后, 其最终的总体求解误差 $E_{\Sigma} = 0.055$, 即每个单蚁的平均求解误差为 0.31%。

这里也以第 1 次寻优过程为例, 给出所定义蚁群算法的总体求解误差变化过程, 如图 4 所示。典型的 4 次寻优过程的蚁群算法参数设定列于表 3。

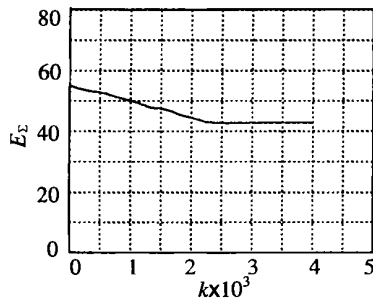


图 4 第 1 次寻优过程的误差变化动态

表 3 蚁群算法的参数设定

次数	寻优区间	压缩系数 k_i	总体求解误差 E_{Σ}	蚁群的最终分布
1	[0, 3]	20	1.347	[1.75, 2.14]
2	[1.5, 2.4]	180	0.450	[1.91, 1.98]
3	[1.8, 2.1]	580	0.150	[1.97, 1.99]
4	[1.9, 2.05]	580	0.055	[1.99, 2.01]

4 结 语

在连续空间的优化问题求解中, 各单蚁智能体通过散布与所在解空间位置优劣程度相关的信息量分布函数, 对蚁群的总体运动方向作出影响, 而蚁群

的总体运动方向是在特定区域内, 对整个蚁群的信息量分布状态进行考察之后决定的。蚁群运动的总体效果反映在连续的解空间内逐步收敛到最优解所在的邻近区域, 各单蚁的信息量分布函数对整个解空间所处区域均有影响, 只是影响程度随各单蚁所在解空间位置距离的增加而递减。为避免蚁群初始分布不均对整个问题求解效果的影响, 以及蚁群最终趋于问题的局部最优解, 作者推荐在问题求解之初, 对蚁群在解空间内作均匀分布。而判定蚁群运动方向, 则以各单蚁所在子区域为界的总体信息量分布状况为依据。

本文将用于离散空间优化问题的蚁群算法扩展到连续空间的寻优问题求解, 对其求解方式作了合理的定义, 并将其用于多极值连续函数寻优和非线性连续函数寻优。仿真结果证明了用于连续空间寻优的蚁群算法的有效性。

从本质上说, 蚁群算法应以分布式的协同优化计算方式为特征。在串行计算机上对蚁群算法的模拟, 并不能真正体现蚁群算法的本质特征。因此, 进一步的工作应开展协同运算机理的研究和算法的并行机实现。

参考文献(References):

- [1] Dorigo M, Gambardella L M. Ant colony system: A cooperative learning approach to the travelling salesman problem [J]. *IEEE Trans Evol Comp*, 1997, 1(1): 53-66
- [2] Dorigo M, Maniezzo V, Colomi A. Ant system: Optimization by a colony of cooperating agents [J]. *IEEE Trans SM C: Part B*, 1996, 26(1): 29-41.
- [3] Gambardella L M, Dorigo M. Solving symmetric and asymmetric TSPs by ant colonies [A]. *Proc IEEE Int Conf Evol Comp* [C]. Piscataway, 1996 622-627.
- [4] Boryczka U, Boryczka M. Generative policies in ant systems for scheduling [A]. *6th European Congr Intell Tech Soft Comp* [C]. Bruxelles, 1998 1: 382-386
- [5] Boryczka U. Learning with delayed rewards in ant systems for the job-shop scheduling problem [A]. *First Int Conf Rough Sets Current Trends Comp* [C]. Bruxelles, 1998 271-274
- [6] Gambardella L M, Taillard E D, Dorigo M. Ant colonies for the quadratic assignment problem [J]. *J Oper Res Soci*, 1999, 50(2): 167-176

(下转第 57 页)

力学补偿的效果是明显的; 修改的 PD 加前馈不可能达到 PD 加前馈的控制性能。在机器人末端加上 1 kg 负载后, 轨迹误差变大, 但变化的幅度较小, 这说明基于 PD 的轨迹跟踪算法对模型误差有一定的鲁棒性。按照前述分析, 增加 K_p 和 K_v 可使轨迹误差任意小, 但实验中发现, 进一步增大 K_p 和 K_v , 轨迹误差并没有明显变小, 3 种控制律情况基本一样。一个重要的原因是关节力矩的限制。

当 $k_{p1} = k_{p2} = 3\ 300$, $k_{v1} = k_{v2} = 250$ 时, 按 PD 控制跟踪计算出的力矩变化如图 3 所示。可以看出一些位置超过了电机最大力矩 $20\ \text{N} \cdot \text{m}$ 。

5 结 论

本文定义一种新的 Lyapunov 函数, 应用 Corless 关于指数收敛的理论, 对 3 种常用的基于 PD 的机器人轨迹跟踪算法的稳定性、鲁棒性和收敛速率作了分析和比较。实验研究表明, 基于 PD 的 3 种轨迹跟踪算法都有较好的跟踪性能, 增加反馈系数轨迹误差减小。但对一个实际的物理系统, 与理论分析有所差别, 轨迹误差不可能任意小, 它存在一个下界, 因为进一步增加反馈系数, 会导致关节力矩受限

和 高频 振 颤。力矩受限是影响控制性能的一个重要因素, 这是设计高级控制算法时应考虑的实际问题。

参考文献 (References):

- [1] Rocco P. Stability of PD control for industrial robot arms [J]. *IEEE Trans Robot Automat*, 1996, 12 (4): 606-614
- [2] Takegaki M, Arimoto S. A new feedback method for dynamic control of manipulators [J]. *ASME Trans DSMC*, 1981, 103: 119-125
- [3] Koditschek D E. Natural motion for robot arms [A]. *Proc IEEE Conf Decision Control* [C]. Las Vegas, 1984 733-735
- [4] 陈启军. 宏-微机器人系统及其连续轨迹控制研究[D]. 上海: 同济大学, 1999
- [5] Corless M. Guaranteed rates of exponential convergence for uncertain systems [J]. *J Optim Theory Appl*, 1990, 64(3): 481-494
- [6] Paden B, Riedle B. A positive-real modification of a class of nonlinear controller for robot manipulators [A]. *Proc American Control Conf* [C]. Atlanta, 1988 1782-1785
- [7] Maniezzo V, Dorigo M, Colnari A. Algodesk: An experimental comparison of eight evolutionary heuristics applied to the quadratic assignment problem [J]. *European J Oper Res*, 1995, 81(1): 188-204
- [8] Maniezzo V. Exact and approximate nondeterministic tree-search procedures for the quadratic assignment problem [J]. *Infor J Comp*, 1999, 11(4): 358-369
- [9] Maniezzo V, Colnari A. Ant system applied to the quadratic assignment problem [J]. *IEEE Trans Knowl Data Eng*, 1999, 11(5): 769-778
- [10] Leguizamón G, Michalewicz Z. A new version of ant system for subset problems [A]. *Proc Congr Evol Comp* [C]. Darmstadt, 1999. 2: 1459-1464
- [11] Douzono H, Hara S, Kawamoto S, et al. A clustering method using genetic algorithm and ant system [A]. *Joint Conf Intell Syst* [C]. Springerlag, 1998. 2: 407-410
- [5] Suzuki I. Fundamental properties and application of temporal Petri nets [A]. *Proc 9th Annual Conf Infor Syst* [C]. Baltimore: Johns Hopkins Univ, 1985. 641-646
- [6] Suzuki I, Lu H. Temporal Petri nets and their application to modeling and analysis of a handshake daisy chain arbiter [J]. *IEEE Trans Comput*, 1989, 38(5): 696-704
- [7] Zurawski R. Verifying correctness of interfaces of design models on manufacturing systems using functional abstractions [J]. *IEEE Trans Ind Electr*, 1997, 44(3): 307-320
- [8] 蒋昌俊. 离散事件动态系统的 PN 机理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2000
- [9] Shatz SM, Mai K, Black C. Design and implementation of a Petri net-based toolkit for Ada tasking analysis [J]. *IEEE Trans Parallel Distr Syst*, 1990, 1(4): 424-441
- [10] Barkaoui K. Verification in concurrent programming with Petri nets structural techniques [A]. *Proc 3rd Int IEEE High Assur Syst Eng Symp* [C]. 1998. 124-133

(上接第 48 页)

(上接第 52 页)