第 18 卷 第 2 期 控 制 与 决 策 2003 年 3 月
Vol. 18 No. 2 Control and Decision Mar. 2003

文章编号: 1001-0920(2003)01-0217-04

开放式基金流动性风险的最优控制

刘海龙, 仲黎明, 吴冲锋
(上海交通大学 安泰管理学院, 上海 200052)

摘 要: 在证券价格服从离散时间算术布朗运动的假设下, 得到资产流动性风险最优控制策略, 并对该策略进行有关参数的敏感性分析。研究结果表明, 流动性系数较大时, 最优控制策略接近于线性策略; 流动性系数较小时, 资产管理者会迅速将资产头寸降至理想水平, 并在大部分时间内保持这种状态, 直到变现期末达到资产目标头寸。最优策略对管理者的风险厌恶程度、资产波动率和流动性系数较为敏感, 而对证券超额收益率敏感程度较低。

关键词: 开放式基金; 流动性风险; 最优控制; 变现
中图分类号: F830.9 **文献标识码**: A

Optimal control of liquidity risk of the open-end fund

LIU Hai-long, ZHONG Li-ming, WU Chong-feng
(Management School, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China)

Abstract: Under the assumption that the security's price follows the discrete-time arithmetic Brown motion process, the optimal control strategy of the asset's liquidity risk is proposed and the parameters sensitivity of the strategy is analyzed. The optimal strategy approximates to the linear strategy if the liquidity coefficient is small enough. Otherwise, the manager initially sells very rapidly from initial position down to the optimum level, and keeps the optimal magnitude in most time of the period, and reaches the required scale at the end of the period rapidly. The strategy is sensitive to the manager's risk tolerance, the asset volatility rate and the liquidity coefficient, but it is insensitive to the security excess return rate.

Key words: Open-end fund; Liquidity risk; Optimal control; Liquidation

1 引 言

开放式基金流动性风险, 是指所持有的资产在变现过程中价格的不确定性和可能遭受的损失。与封闭式基金相比, 开放式基金没有发行规模的限制, 可随时增加发行, 也可随时赎回, 具有更大的弹性和流动性。这需要基金管理者在确定资产组合时就应考虑未来可能面临的赎回要求, 确定基金投资组合中的现金比例; 而一旦所面临的赎回要求的基金份额大于其所持有的现金, 必须将组合中的一部分有价证券进行变现。变现行为会对证券价格产生冲击, 从而导致额外的成本, 对基金资产净值产生负面影响。

Perold[1]考察了 Value Line 基金从 1965 年到 1986 年的收益情况, 发现帐面上该基金跑赢大市 20%, 而实际上仅有 2.5%。这是由于流动性风险而使基金在变现过程中产生的执行成本过高造成的。因此, 对证券投资基金流动性风险管理的研究具有重要的实际意义, 但这方面的定量研究并不多见。

收稿日期: 2001-08-20; **修回日期**: 2002-02-01。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70173031); 国家杰出青年科学基金资助项目(70025303)。
作者简介: 刘海龙(1959—), 男, 吉林省吉林市人, 教授, 博士, 从事金融工程等研究; 吴冲锋(1962—), 男, 浙江温州人, 教授, 博士生导师, 从事金融工程等研究。

Bertsima 等[2]只是将最优交易策略定义为可使执行成本最小化的交易策略, 并利用随机最优控制理论得出最优策略闭合形式的解。Almgren 等研究了完全变现时的交易策略, 并给出了完全变现时最优交易策略的解析解[3]。

本文研究在基金管理者为履行赎回义务时, 如何在不完全变现的情况下, 对其所面临的流动性风险和波动性风险进行最优控制。在假设证券价格服从离散时间算术布朗运动的基础上, 得到了不完全变现时流动性风险的最优控制策略。最后通过一个算例进行敏感性分析。

2 问题描述

这里在离散时间的假设下, 考虑机构投资者的大额交易, 给出单个风险资产变现策略的定义。

假设开放式基金持有大量某风险资产(股票)X 股, 需要在时刻 T 变现 Y 股。将 T 分为 N 个长度为 s 的时间间隔, 为简单起见, 假设所有时间间隔相同, 但这一假设限制不是必需的。定义离散时间 $t_k = sk$, $t_0 = 0, t_N = sN = T, k = 0, 1, \cdots, N$。

交易策略为 $x_0, x_1, \cdots, x_N$, 其中 x_k 为 t_k 时刻所持有的股数。$x_0 = X, x_N = X - Y$。定义 $n_k = x_{k-1} - x_k, k = 0, 1, \cdots, N$, n_k 为时间间隔 (t_k, t_{k-1}) 内出售的资产数量。

定义交易速率

$$v_k = \frac{n_k}{s} = \frac{1}{s}(x_{k-1} - x_k)$$
$$k = 1, 2, \cdots, N$$

假定最初股票价格为 P_0, 则资产市值最初为 XP_0。股票价格变动受波动、漂移和交易策略的冲击 3 方面的影响, 其中波动和漂移只受与交易策略无关的市场因素影响。因此, 假定价格变动服从如下算术布朗运动

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1} - \sigma\tau^{1/2}\xi_k + \mu s - s\alpha v_k = \\ &P_0 + \sigma\sum_{j=1}^{k} s^{1/2}\xi_j + \mu t_k - \sum_{j=1}^{k}\alpha s v_j \end{aligned} \tag{1}$$

其中: σ 表示资产波动率, μ 表示期望增长率, ξ_j 表示均值为 0、方差为 1 的独立同分布正态随机变量, α 表示每出售单位股票所引起股票价格变动的数量, 它反映了交易策略对股票价格的冲击, 其流动性越好 α 越小, 流动性越差 α 越大。假定变现所得投资于无风险收益, 则 μ 为超过无风险收益的超额收益。

当不存在市场冲击时, P_k 服从算术布朗运动, 所以在时刻 t_k 均值为 $P_0 + \mu t_k$, 方差为 $\sigma^2 t_k$。假设 $\mu = P\bar{\mu}$, $\sigma = P\bar{\sigma}$, 其中 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\sigma}$ 在 P 变化时保持不变。由于本文考察的是短期变化, P 的变动很小, 从而可近似认为 μ 和 σ 是不变的。

式(1) 还可写成

$$P_k = P_0 + \sigma\sum_{j=1}^{k} s^{1/2}\xi_j + \mu t_k - \alpha(X - x_k) \tag{2}$$

当不存在波动和漂移时, 股票价格是资产中即时持有的线性函数。这一点与文献[4] 的结论是一致的。

3 交易策略的成本

按交易策略完成变现后的资产总值为已变现资产的价值 $Y\bar{P}$ 与未变现资产的价值 $(X - Y)P_N$ 之和, 其中 $\bar{P}$ 为资产变现时得到的平均出售价格, 它是变现获得的现金与变现资产数量的比值。按该交易策略进行变现的总成本为

$$\begin{aligned} &XP_0 - Y\bar{P} - (X - Y)P_N = \\ &YP_0 - Y\bar{P} + (X - Y)(P_0 - P_N) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} Y\bar{P} &= \sum_{k=1}^{N} n_k P_k = \\ &\sum_{k=1}^{N} P_0(x_{k-1} - x_k) + \sigma\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} s^{1/2}(x_{k-1} - \\ &x_k)\xi_j + \mu\sum_{k=1}^{N} sk(x_{k-1} - x_k) - \\ &\sum_{k=1}^{N}\alpha(X - x_k)(x_{k-1} - x_k) \end{aligned} \tag{4}$$

其中: $\sum_{k=1}^{N} P_0(x_{k-1} - x_k) = YP_0$ 为变现资产的初始市值, 后面的项表示变现中的利润或损失; $\sigma\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} s^{1/2}(x_{k-1} - x_k)\xi_j$ 为波动的总影响; $\mu\sum_{k=1}^{N} sk(x_{k-1} - x_k)$ 为变现资产预期的回报; $-\sum_{k=1}^{N}\alpha(X - x_k)(x_{k-1} - x_k)$ 为由于变现而引起资产总值的损失, 它与该资产的流动性密切相关。

未变现资产期末的价格为

$$P_N = P_0 + \sigma\sum_{k=1}^{N} s^{1/2}\xi_k + \mu sN - \alpha Y$$

由于变现行为对资产价格产生负向冲击, 期末未变现资产的价值损失为

$$\begin{aligned} &(X - Y)P_0 - (X - Y)P_N = \\ &(X - Y)\left[-\sigma\sum_{k=1}^{N} s^{1/2}\xi_k - \mu sN + \alpha Y\right] \end{aligned} \tag{5}$$

在本文的假设下, 成本是一随机变量, 其均值和方差依赖于交易策略 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$。下面给出交易策略成本的期望和方差。由式(4) 和(5) 得

$$E_x(XP_0 - Y\bar{P} - (X - Y)P_N) = -\mu\sum_{k=1}^{N} s x_k - \frac{1}{2}\alpha Y^2 + \alpha X Y + \frac{1}{2}\alpha s\sum_{k=1}^{N} s v_k^2 \tag{6}$$

$$V_x(XP_0 - Y\bar{P} - (X - Y)P_N) = -\sigma^2\sum_{k=1}^{N} s x_k^2 \tag{7}$$

其中下标 x 是其所依赖的交易策略。方程(6) 和(7) 表明交易策略中期望成本和方差是对立的, 减少其中的一个, 必须以增大另一个为代价。因此, 本文确定的最优交易策略是: 给定交易策略的期望成本, 使交易策略的方差最小; 或者给定交易策略的方差, 使交易策略的期望成本最小。由于在两种情况下求得的最优控制策略 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是等价的, 因此本文只研究如下最优控制问题

$$\begin{cases} \min E_x(XP_0 - Y\bar{P} - (X - Y)P_N) \\ V_x(XP_0 - Y\bar{P} - (X - Y)P_N) = V^* \\ x_0 = X, \quad x_N = X - Y \end{cases} \tag{8}$$

当 E_x 和 V_x 是凹函数时, 最优控制策略 x 是唯一的。

4　最优控制策略

利用拉格朗日乘数法求解最优控制问题(8), 则有

$$\min[E(XP_0 - Y\bar{P} - (X - Y)P_N) + \lambda(V(XP_0 - Y\bar{P} - (X - Y)P_N) - V^*)] \tag{9}$$

其中 $\lambda > 0$ 为资产管理者的风险厌恶系数。定义

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_N) = E_x(\cdot) + \lambda V_x(\cdot)$$

它是控制变量 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 的二次凹函数, 从而具有最小值。由满足对每个控制变量偏导数为 0 的一阶条件, 得

$$\partial U/\partial x_k = -\mu s + 2\lambda\sigma^2 s x_k - \alpha(x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}) = 0 \tag{10}$$

再由边界条件 $x_0 = X$, $x_N = X - Y$, 得线性差分方程(10) 的通解

$$x_k = x^* + \frac{\sinh(\beta(T - sk))}{\sinh(\beta T)}(X - x^*) + \frac{\sinh(\beta sk)}{\sinh(\beta T)}(X - Y - x^*) \tag{11}$$

其中

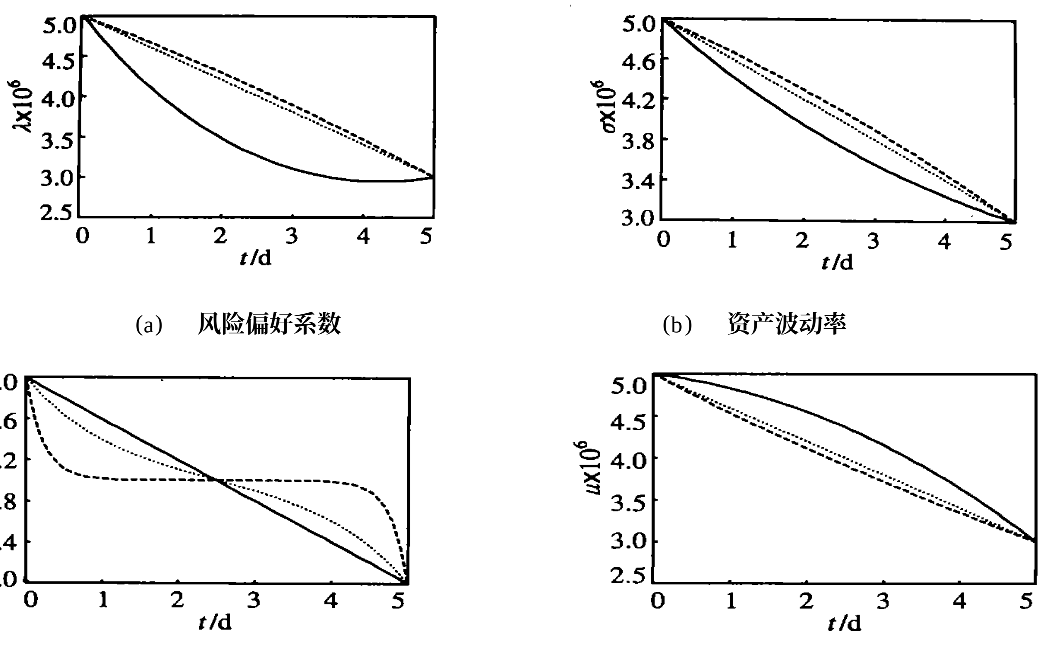
$$x^* = \frac{\mu}{2\lambda\sigma^2}, \quad \beta = \frac{1}{s}\mathrm{arcosh}\left(1 + \frac{\lambda\sigma^2 s}{\alpha}\right)$$

$\sinh(\cdot)$ 是双曲正弦函数, $\mathrm{arcosh}(\cdot)$ 是反双曲余弦函数。式(11) 就是流动性风险最优控制策略。

5　数值分析

上面得到的最优控制策略依赖于模型中各种参数的选取, 因此进行有关参数的敏感性分析, 对实际中确定和调整控制策略具有重要的指导意义。

假定某项资产的年超额收益率为 20%, 年波动率为 50%, 初始价格为 10 元, 一年中的交易日为 250天, 资产平均日交易量为2 M 股。假定证券投资基金管理者通过对所要变现的资产进行大量的观察, 发现该项资产的日交易量达到平均日交易量的 2% 时, 将使价格变动一个单位 0. 01 元。基金管理者



(a)　风险偏好系数　　(b)　资产波动率

(c)　流动性系数　　(d)　超额收益率

图 1　最优变现策略的敏感性

持有该项资产初始头寸 5M 股, 欲在一周内(5 个交易日) 变现 2M 股。从而确定参数值

$$\mu = P_0\bar{\mu} = 10 \times 0.20/250 = 0.008$$

$$\sigma = P_0\bar{\sigma} = 10 \times 0.5/\sqrt{250} = 0.316$$

$$\alpha = 0.01/(2 \times 10^6 \times 2\%) = 2.5 \times 10^{-7}$$

下面用图例分别给出最优变现策略对风险偏好系数 λ, 资产波动率 σ, 流动性系数 α 和超额收益率 μ 的敏感性。

图 1(a) 在 $\sigma = 0.316, \alpha = 2.5 \times 10^{-7}, s = 1, \mu = 0.008$ 的假设下, 分别给出了 $\lambda = 10^{-7}$(实线), $\lambda = 10^{-8}$(点线) 和 $\lambda = 10^{-9}$(折线) 3 种情况下最优变现策略随时间的变化规律; (b) 在 $\lambda = 10^{-8}, \alpha = 2.5 \times 10^{-7}, s = 1, \mu = 0.008$ 的假设下, 分别给出了 $\sigma = 0.616$(实线), $\sigma = 0.316$(点线) 和 $\sigma = 0.016$(折线) 3 种情况下最优变现策略随时间的变化规律; (c) 在 $\lambda = 10^{-8}, \sigma = 0.316, s = 1, \mu = 0.008$ 的假设下, 分别给出了 $\alpha = 2.5 \times 10^{-7}$(实线), $\alpha = 2.5 \times 10^{-9}$(点线) 和 $\alpha = 2.5 \times 10^{-11}$(折线) 3 种情况下最优变现策略随时间的变化规律; (d) 在 $\lambda = 10^{-8}, \sigma = 0.316, \alpha = 2.5 \times 10^{-7}, s = 1$ 的假设下, 分别给出了 $\mu = 0.08$(实线), $\mu = 0.008$(点线) 和 $\mu = 0.0008$(折线) 3 种情况下最优变现策略随时间的变化规律。

从图 1 可以看出, 风险偏好系数 λ 越大, 资产管理者越厌恶风险, 变现的速度就越快; 反之, 变现的速度就越慢。资产波动率 σ 越大, 资产的波动性也越大, 变现的速度就越快, 以降低波动性风险。流动性系数 α 越大, 最优变现策略就越接近线性策略; 反之, 最初资产管理者将很快出售资产到最理想的水平(本例为 $x^* \approx 4.0 \times 10^6$, 即变现所需变现资产的一半), 并在大部分时间内保持这种状态, 直到最后快速完成变现。超额收益率 μ 越大, 变现的速度就越慢; 当 μ 较小时, 其变化对最优变现策略的影响不敏感。

6 结 语

本文在一定的假设前提下, 得出了可使变现行为对基金资产净值影响最小的最优变现策略, 并对有关参数进行了敏感性分析, 得出一些初步的结论。最优控制策略的有关特性依赖于严格的假设前提, 而一旦变现期较长, 证券价格的前后差异就会过大。价格服从几何布朗运动假设下的最优控制策略会更符合现实情况。

参考文献(References):

[1] Perold A. The implementation shortfall: Paper versus reality[J]. *J Portfolio Management*, 1988, 14: 4-9.

[2] Bertsima D, Lo A W. Optimal control of liquidation costs[J]. *J Financial Markets*, 1998, 1(1): 1-50.

[3] Almgren R, Chriss N. Optimal liquidation[R]. Chicago: The University of Chicago, 1998.

[4] Jarrow R A. Market manipulation bubbles, corners and short squeeze[J]. *J Financial Quantity Analysis*, 1992, 27(2): 311-336.

(上接第 212 页)

[7] 姚长辉. 我国商业银行竞争力分析与对策选择[J]. 经济科学, 2001, (4): 46-61.
(Yao C H. Competition analyzing of our national commercial banks' competition power and their counter selection[J]. *Economic Science*, 2001, (4): 46-61.)

[8] 陈桂云, 潘德惠. 流域水资源的模型及其合理利用[J]. 东北大学学报, 1999, 20(5): 552-554.
(Chen G Y, Pan D H. Water resources model of river valley and its application in the optimal use of the river[J]. *J of Northeastern University*, 1999, 20(5): 552-554.)

[9] 潘德惠. 经济管理中非线性分布参数系统的模型辨识与控制[J]. 东北大学学报, 1997, 18(增刊): 385-389.
(Pan D H. Model identification and control of nonlinear distributed parameter system in economics and management[J]. *J of Northeastern University*, 1997, 18(S): 385-389.)

[10] 杜拉克 P F. 杜拉克论管理[M]. 孙忠译. 海口: 海南出版社, 2000. 1-125.