第 18 卷 第 2 期 控 制 与 决 策 2003 年 3 月
Vol. 18 No. 2 Control and Decision Mar. 2003

文章编号: 1001-0920(2003)02-0221-04

模糊决策的基础——模糊集比较与排序

李荣钧
(华南理工大学 工商管理学院, 广东 广州 510640)

摘 要: 研究模糊决策中模糊集的比较与排序问题。通过引入模糊极大集和模糊极小集为参照系统并以海明距离为计量工具, 定义了两个模糊效用函数和一个模糊优先关系作为模糊集的排序指标。前者适合于多个模糊集的整体分析, 后者适合于两两之间的比较判别。对于两个模糊集的排序问题, 模糊效用函数自动退化为相应的模糊优先关系。系统分析了 3 种指标的性能及关系, 并举例说明了它们的应用。

关键词: 模糊集; 比较与排序; 模糊决策
中图分类号: O159.1 **文献标识码**: A

Basis of fuzzy decision—Comparison and ranking of fuzzy sets

LI Rong-jun
(College of Business Administer, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: The problem of comparison and ranking of fuzzy sets in decision making is studied. Two fuzzy utility functions and a fuzzy preference relation are proposed on the basis of fuzzy maximum set, fuzzy minimum set and Hamming distance. The fuzzy utility functions are used to rank multiple fuzzy sets, while the fuzzy preference relation is used to compare two fuzzy sets. When there exist only two fuzzy sets, the fuzzy utility functions are reduced automatically to corresponding fuzzy preference relations. The properties of, and relationships among, the fuzzy utility functions and fuzzy preference relation are analyzed systematically. An illustrative example is given for demonstration.

Key words: Fuzzy sets; Comparison and ranking; Fuzzy decision making

1 引 言

由于模糊环境下的决策事物常被表示为相应的模糊集合, 故模糊决策最终归结为对模糊集的比较与判别。1976 年以来, 已有许多文献发表了模糊集排序的方法。但这些方法在复杂情形下都或多或少地缺乏分辨力, 甚至与人们的直觉相抵触。迄今为止, 没有任何一种方法被公认是最好的, 也没有一个简单的法则可据以判别和解释那些能被人们普遍接受的所谓黄金选择。

现有的模糊集排序方法可划分为两种基本类型: 一是采用效用函数的形式将每个模糊集独立地映射到实数轴上, 从而得到一个以实数大小为准的自然顺序; 二是在模糊集两两之间建立一个优先关系, 并按照模糊集的优先程度来确定它们的优劣。这两种方法在特定决策情形下的分辨能力互有强弱, 其决策结果也并不总是一致的。为慎重起见, 决策者往往要分别采用多种方法进行试比较后才能作出决断[1]。

本文在 Nakamura[2] 和 Yuan[3] 的研究基础上以模糊极大集和模糊极小集为基准, 以海明距离为计量工具, 定义了两个模糊效用函数和一个模糊优先关系作为模糊集的排序指标。前者适合于多个模糊集的整体分析, 后者适合于两两之间的比较判别。当只有两个模糊集存在时, 模糊效用函数将自动退化

收稿日期: 2001-11-28; **修回日期**: 2002-04-01。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70071035)。
作者简介: 李荣钧(1946—), 男, 湖南永州人, 教授, 博士, 从事优化理论与模糊技术的研究。

为相应的模糊优先关系。

2 模糊集与模糊运算

定义 1 实数域R 中的模糊子集$\tilde{A}$定义为$\mu_{\tilde{A}}$: $R \to [0, 1]$, 式中 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 表示 x 属于$\tilde{A}$ 的程度, 且 $\forall x, y \in R, \lambda \in [0, 1]$。

1) $\tilde{A}$ 是正则模糊集, 当且仅当

$$\sup_{x \in R} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \tag{1}$$

2) $\tilde{A}$ 是凸模糊集, 当且仅当

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(y)\} \tag{2}$$

3) $\tilde{A}$ 的α截集是实数域R 中的清晰子集A_α, 定义为

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \tag{3}$$

定义 2 设$\tilde{A}$与$\tilde{B}$是实数域R 中的两个正则凸模糊子集, 分别具有连续隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 和 $\mu_{\tilde{B}}(y)$。令"○"代表一个经典算子, 如+, -, ×, ∧, ∨等, 而令(⊙) 代表相应的模糊算子, 则加于$\tilde{A}$,$\tilde{B}$ 上的模糊运算$\tilde{A}$(⊙)$\tilde{B}$ 被定义为

$$\mu_{\tilde{A}(\odot)\tilde{B}}(z) = \sup_{x, y: z = x \circ y} \{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)\} \tag{4}$$

定义 3 实数域R 中的模糊优先关系R 是一个 $R \times R$ 空间中的模糊子集, 具有隶属函数$\mu_R(\tilde{A}, \tilde{B})$, $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \subseteq R$, 式中 $\mu_R(\tilde{A}, \tilde{B})$ 表示$\tilde{A}$ 优于$\tilde{B}$ 的程度:

1) R 是互补的, 当且仅当

$$\mu_R(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \mu_R(\tilde{B}, \tilde{A}) \tag{5}$$

2) R 是可传递的, 当且仅当

$$\mu_R(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 1/2$$

和

$$\mu_R(\tilde{B}, \tilde{C}) \geq 1/2 \Rightarrow \mu_R(\tilde{A}, \tilde{C}) \geq 1/2 \tag{6}$$

3) R 是模糊序关系, 当且仅当R 是互补的和可传递的。

3 模糊集排序方法分析

3.1 Nakamura 方法

Nakamura[2] 在模糊集$\tilde{A}_i$,$\tilde{A}_j$ 之间定义了模糊优先关系$\tilde{R}_N$, 具有隶属函数

$$\mu_{R_N}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}[d_H(\tilde{A}_i^L, \tilde{A}_i^L \wedge \tilde{A}_j^L) + \\ d_H(\tilde{A}_i^R, \tilde{A}_i^R \wedge \tilde{A}_j^R)], \quad \Delta \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, \quad \Delta = 0 \end{cases} \tag{7}$$

式中

$$d_H(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \int_{\in R} \left|\mu_{\tilde{A}_i}(x) - \mu_{\tilde{A}_j}(x)\right| dx$$

是模糊集$\tilde{A}_i$,$\tilde{A}_j$ 之间的Hamming 距离; $\tilde{A}^L$ 与$\tilde{A}^R$ 是$\tilde{A}$ 的左、右模糊集, 定义为

$$\mu_{\tilde{A}^R}(y) = \sup_{y \leq x} \mu_{\tilde{A}}(x), \quad \mu_{\tilde{A}^L}(y) = \sup_{y \geq x} \mu_{\tilde{A}}(x) \tag{8}$$

而$\tilde{A}_i^L \wedge \tilde{A}_j^L$ 和$\tilde{A}_i^R \wedge \tilde{A}_j^R$ 是由式(4) 定义的模糊极小集; 此外

$$\Delta = d_H(\tilde{A}_i^L, \tilde{A}_i^L \wedge \tilde{A}_j^L) + d_H(\tilde{A}_j^L, \tilde{A}_i^L \wedge \tilde{A}_j^L) + d_H(\tilde{A}_i^R, \tilde{A}_i^R \wedge \tilde{A}_j^R) + d_H(\tilde{A}_j^R, \tilde{A}_i^R \wedge \tilde{A}_j^R) \tag{9}$$

$\mu_{R_N}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)$ 的具体计算方式见图 1。

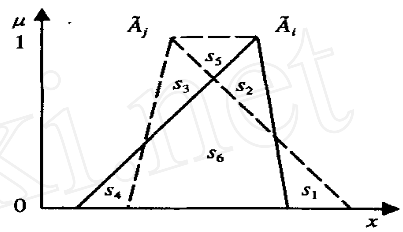

图 1 Nakamura 方法

图 1 中各部分面积的意义及相互关系为

$$\begin{aligned} d_H(\tilde{A}_i^L, \tilde{A}_i^L \wedge \tilde{A}_j^L) &= s_4 \\ d_H(\tilde{A}_i^R, \tilde{A}_i^R \wedge \tilde{A}_j^R) &= s_1 \\ d_H(\tilde{A}_j^L, \tilde{A}_i^L \wedge \tilde{A}_j^L) &= s_3 + s_5 \\ d_H(\tilde{A}_j^R, \tilde{A}_i^R \wedge \tilde{A}_j^R) &= s_2 + s_5 \end{aligned} \tag{10}$$

从而有

$$\begin{aligned} &\mu_{\tilde{R}_N}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \\ &\frac{s_2 + s_3 + 2s_5}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + 2s_5} \\ &\mu_{\tilde{R}_N}(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i) = \\ &\frac{s_1 + s_4}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + 2s_5} = \\ &1 - \mu_{\tilde{R}_N}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) \end{aligned} \tag{11}$$

Nakamura 证明了 $\mu_{\tilde{R}_N}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)$ 是互补的和可传递的, 因而是一个模糊序关系。但从决策的角度看, $\mu_{\tilde{R}_N}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)$ 有致命的缺陷: 当两个模糊集充分靠近时, $\mu_{\tilde{R}_N}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)$ 可能取 0～ 1 之间的任何数值, 而不是必然地趋近于 1/2。换言之, Nakamura 的决策曲线是不连续的, 当客观条件处于临界状态时, $\mu_{\tilde{R}_N}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)$ 的取值变得捉摸不定。造成Nakamura 决策可预见性差的原因是该指标只考虑了模糊集之间的差异性, 而忽略了模糊集之间的同一性。

3.2 Yuan 方法

Yuan[3] 定义了模糊差$\tilde{A}_i - \tilde{A}_j$ 与实数 0 之间的优先关系$R_Y(\tilde{A}_i - \tilde{A}_j, 0)$, 具有隶属函数

$$\mu_{R_Y}(\tilde{A}_i - \tilde{A}_j, 0) = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)/\lambda, & \lambda > 0 \\ 1/2, & \lambda = 0 \end{cases} \tag{12}$$

式中 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$, 而

$$\lambda_1 = \int_{(\tilde A_i - \tilde A_j)^R_\alpha > 0} (\tilde A_i - \tilde A_j)^R_\alpha \mathrm{d}\alpha \tag{13a}$$

$$\lambda_2 = \int_{(\tilde A_i - \tilde A_j)^L_\alpha > 0} (\tilde A_i - \tilde A_j)^L_\alpha \mathrm{d}\alpha \tag{13b}$$

$$\lambda_3 = \int_{(\tilde A_i - \tilde A_j)^R_\alpha < 0} (\tilde A_i - \tilde A_j)^R_\alpha \mathrm{d}\alpha \tag{13c}$$

$$\lambda_4 = \int_{(\tilde A_i - \tilde A_j)^L_\alpha < 0} (\tilde A_i - \tilde A_j)^L_\alpha \mathrm{d}\alpha \tag{13d}$$

$$\begin{cases} (\tilde A_i - \tilde A_j)^L_\alpha = \inf\limits_{\mu_{\tilde A_i - \tilde A_j}(z) \geq \alpha} (z) \\ (\tilde A_i - \tilde A_j)^R_\alpha = \sup\limits_{\mu_{\tilde A_i - \tilde A_j}(z) \geq \alpha} (z) \end{cases} \tag{14}$$

其计算方法见图 2。

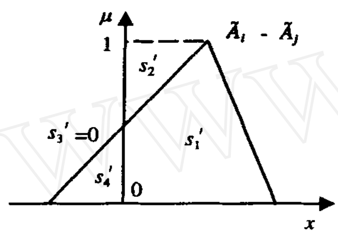

图 2　Yuan 方法

图中: $\lambda_1 = s_1' + s_2'$, $\lambda_2 = s_2'$, $\lambda_3 = s_3'$, $\lambda_4 = s_3' + s_4'$, 且

$$\mu_{\tilde R_Y}(\tilde A_i - \tilde A_j, 0) = \frac{s_1' + 2s_2'}{s_1' + 2s_2' + 2s_3' + s_4'} \tag{15}$$

与图 1 对比可知: $s_1' = s_2 + s_4 + s_6$, $s_2' = s_5$, $s_3' = 0$, $s_4' = s_1 + s_5 + s_6$。

Yuan 方法的最大特点在于它不是对模糊集 $\tilde A_i$, $\tilde A_j$ 直接比较, 而是用模糊差值 $\tilde A_i - \tilde A_j$ 与实数 0 间接比较。通过这一转换, 模糊集 $\tilde A_i$, $\tilde A_j$ 之间的异同从 $\tilde A_i - \tilde A_j$ 中得到综合反映, 而不同于 Nakamura 方法, 仅比较二者的最好情形和最坏情形, 因而克服了临界状态下指标的不可测性, 使决策的变化过程趋于平稳。

4　新模糊集排序方法

从图 1 和图 2 可知, Nakamura 指标和 Yuan 指标均为面积参数 $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ 在特定条件下的组合。其中 s_6 体现了 $\tilde A_i$, $\tilde A_j$ 之间的同一性, 而其它参数刻画了二者的差异性。显然, 不同的判别准则导致不同的参数组合。考虑到多个模糊集排序的一般情形和两个模糊集比较的特殊情形, 本文首先定义下面的模糊极大集和模糊极小集, 然后以海明距离为计量工具, 构造所需的模糊效用函数和模糊优先关系。

定义 4　设有 n 个实数域上的正则模糊集 $\tilde A_1$, $\tilde A_2, \cdots, \tilde A_n$, 其模糊极大集记为 max, 模糊极小集记为 min, 具有隶属函数

$$\mu_{\widetilde{\max}}(x) = \sup_{\substack{x = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n}} \min(\mu_{\tilde A_1}(x_1), \cdots, \mu_{\tilde A_n}(x_n)) \tag{16}$$

$$\mu_{\widetilde{\min}}(x) = \sup_{\substack{x = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \cdots, \mu_{A_n}(x_n)) \tag{17}$$

定义 5　对于实数域上的正则模糊集 $\tilde A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 定义模糊效用函数

$$f_1(\tilde A_i) = \frac{\tilde A_i \text{ 与 min 之间的差异}}{\text{max 与 min 之间的差异}} = \begin{cases} \dfrac{d[\tilde A_{iL}, \min_L] + d[\tilde A_{iR}, \min_R]}{d[\max_L, \min_L] + d[\max_R, \min_R]} & \max \neq \min \\ 0.5, & \max = \min \end{cases} \tag{18}$$

$$f_2(\tilde A_i) = \frac{\tilde A_i \text{ 与 min 的差异} + \tilde A_i \text{ 与 min 的交}}{\text{max 与 min 的差异} + 2 \text{ 倍 max 与 min 的交}} = \frac{d(\hat A_{iL}, \min_L) + d(\hat A_{iR}, \min_R) + d(\hat A_i \cap \min, 0)}{d(\max_L, \min_L) + d(\max_R, \min_R) + 2d(\max \cap \min, 0)} \tag{19}$$

式中 $d(\tilde A, 0) = \int_{(\tilde A)} \mu_{\tilde A}(x) \mathrm{d}x$。可以证明, $f_1(\tilde A_i)$ 和 $f_2(\tilde A_i)$ 具有以下性质:

1) 如果 $\tilde A_i = \min$, 则

$$\begin{cases} 0 \leq f_1(\tilde A_i) = \min\limits_j \{f_1(\tilde A_j)\} \leq 1 \\ 0 \leq f_2(\tilde A_i) = \min\limits_j \{f_2(\tilde A_j)\} \leq 1 \end{cases} \tag{20}$$

2) 如果 $\tilde A_i = \max$, 则

$$\begin{cases} 0 \leq f_1(\tilde A_i) = \max\limits_j \{f_1(\tilde A_j)\} \leq 1 \\ 0 \leq f_2(\tilde A_i) = \max\limits_j \{f_2(\tilde A_j)\} \leq 1 \end{cases} \tag{21}$$

3) $\forall \tilde A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, $f_1(\tilde A_i), f_2(\tilde A_i) \in [0, 1]$。

4) 当 $n = 2$ 时, 模糊效用函数 $f_1(\tilde A_i)$ 和 $f_2(\tilde A_i)$ 分别退化为模糊优先关系 $R_1(\tilde A_i, \tilde A_j)$ 和 $R_2(\tilde A_i, \tilde A_j)$。其计算公式借助于面积参数写为

$$\begin{cases} R_1(\tilde A_i, \tilde A_j) = \dfrac{s_2 + s_3 + 2s_5}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + 2s_5} \\ R_2(\tilde A_i, \tilde A_j) = \dfrac{s_2 + s_3 + 2s_5 + s_6}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + 2s_5 + 2s_6} \end{cases} \tag{22}$$

5) 模糊优先关系 $R_1(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j)$, $R_2(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j)$ 是互补的和可传递的, 因而是模糊序关系[1,2]。

6) $f_2(\tilde{A}_i) > f_2(\tilde{A}_j) \Leftrightarrow f_1(\tilde{A}_i) > f_1(\tilde{A}_j)$

$R_2(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) \geq 0.5 \Leftrightarrow R_1(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) \geq 0.5$

7) 判别准则: $\forall\, i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$

$$\begin{cases} f_1(\tilde{A}_i) > f_1(\tilde{A}_j) \rightarrow \tilde{A}_i > \tilde{A}_j \\ f_2(\tilde{A}_i) > f_2(\tilde{A}_j) \rightarrow \tilde{A}_i > \tilde{A}_j \\ R_1(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) \geq 0.5 \rightarrow \tilde{A}_i > \tilde{A}_j \\ R_2(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) \geq 0.5 \rightarrow \tilde{A}_i > \tilde{A}_j \end{cases} \tag{23}$$

不难验证

$$\begin{cases} R_1(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) = R_N(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) \\ R_2(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) = R_Y(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) \end{cases} \tag{24}$$

故 $f_1(\tilde{A}_i)$ 和 $f_2(\tilde{A}_i)$ 可视为 Nakamura 指标和 Yuan 指标的自然推广, 不仅内涵更加丰富, 且计算效率也有所提高。譬如, 对 n 个模糊集的排序问题, 采用 Nakamura 或 Yuan 定义的模糊关系, 要计算 $n(n-1)/2$ 个指标值, 但采用式(18) 或式(19) 定义的模糊函数, 只要计算 n 个指标值即可。

$f_1(\tilde{A}_i)$ 和 $f_2(\tilde{A}_i)$ 的排序原则均基于模糊集与模糊极小集的差异越大越好的想法。如果改为模糊集与模糊极大集的差异越小越好, 则可构造与 $f_1(\tilde{A}_i)$ 和 $f_2(\tilde{A}_i)$ 对应的互补指标。在 $f_2(\tilde{A}_i)$ 中引进模糊集与模糊极小集的交, 是为了改进排序指标在临界状态下的稳定性; 至于将指标写成比值的形式, 主要是出于归一化的考虑, 与模糊集的排序原则没有关系。

对于两个模糊集的比较问题, 也可采用另一种思考方式。仍以模糊极大集和模糊极小集为参照基准, 则模糊集与模糊极大集的交越大越好, 而与模糊极小集的交越小越好。将这一排序原则体现在指标中, 可定义下面的模糊优先关系。

定义 6 对于实数域上的正规模糊集 $\tilde{A}_i, \tilde{A}_j$, 定义模糊优先关系

$$\begin{aligned} R_3(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) = {} & [\tilde{A}_i \text{ 与 } \max \text{ 的交} + \tilde{A}_j \text{ 与 } \min \text{ 的交}] / \\ & [\tilde{A}_i \text{ 与 } \max \text{ 交} + \tilde{A}_i \text{ 与 } \min \text{ 交} + \\ & \tilde{A}_j \text{ 与 } \max \text{ 交} + \tilde{A}_j \text{ 与 } \min \text{ 交}] = \\ & [d(\tilde{A}_i \cap \max, 0) + d(\tilde{A}_j \cap \min, 0)] / \\ & [d(\tilde{A}_i \cap \max, 0) + d(\tilde{A}_i \cap \min, 0) + \\ & d(\tilde{A}_j \cap \max, 0) + d(\hat{A}_j \cap \min, 0)] \end{aligned} \tag{25}$$

或采用面积参数写为

$$R_3(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) = \frac{s_2 + s_3 + 2s_6}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + 4s_6} \tag{26}$$

式(25) 给出了一种新的模糊集排序指标, 它具有与 $R_1(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j)$, $R_2(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j)$ 同样的性质, 但表现略为保守, 即

$$\begin{cases} R_3(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) \geq 0.5 \Rightarrow R_1(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) \geq 0.5 \\ R_3(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) \geq 0.5 \Rightarrow R_2(\tilde{A}_i,\tilde{A}_j) \geq 0.5 \end{cases} \tag{27}$$

例 1 考虑图 3 中的模糊集排序问题

$\tilde{A}_1 = (2, 3, 9)$, $\tilde{A}_2 = (0, 3; 6, 10)$

$\tilde{A}_3 = (2, 6, 7)$

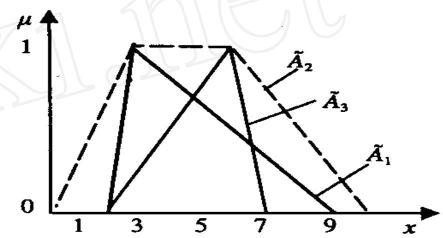

图 3 例题分析

采用不同排序方法的计算结果见表 1。

表 1 计算结果比较

指标	模糊集 A_1	模糊集 A_2	模糊集 A_3	序列
f_1	0.29	0.49	0.69	$A_3 > A_2 > A_1$
f_2	0.40	0.50	0.60	$A_3 > A_2 > A_1$

指标	模糊集 A_1,A_2	模糊集 A_2,A_3	模糊集 A_1,A_3	序列
R	0.47	0.46	0.41	$A_3 > A_2 > A_1$
R_N	0.33	0.38	0.14	$A_3 > A_2 > A_1$
R_Y	0.45	0.44	0.35	$A_3 > A_2 > A_1$

显然, 5 种不同指标所给出的排序结果是相互一致的。但比较而言, 模糊效用函数的分辨力要强于模糊优先关系, 且所需的计算工作量较少。

参考文献(References):

[1] Li R J, Lee E S. Ranking fuzzy numbers—A comparison [A]. *Proc NAFIPS Workshop* [C]. West Lafayette, 1987. 169-204.

[2] Nakamura K. Preference relations on a set of fuzzy utilities as a basis for decision making[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20: 147-162.

[3] Yuan Y. Criteria for evaluating fuzzy ranking methods [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 44: 139-157.

[4] Lee K M, Cho C H, Hyung L K. Ranking fuzzy values with satisfaction function[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 64: 295-309.