

文章编号: 1001-0920(2003)02-0225-04

## 数值鲁棒的非线性滤波新方法

范文兵, 张素贞

(华东理工大学 自动化研究所, 上海 200237)

**摘要:** 应用多维情形的二阶插值公式构造新型非线性滤波器。该滤波器不需非线性函数的偏导计算, 便能代替常规的扩展卡尔曼滤波器, 并有滤波精度高、数值计算稳定和适用范围宽等优点。仿真实例表明新滤波器具有较高的性能。

**关键词:** 非线性滤波; Cholesky 因式分解; 扩展卡尔曼滤波; 二阶内插法  
**中图分类号:** O 211.64 **文献标识码:** A

## New nonlinear filtering algorithm of numerical robustness

FAN Wen-bing, ZHANG Su-zhen

(Research Institute of Automation, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

**Abstract:** A new nonlinear filter to use second-order interpolation formula is constructed. The filter contains no partial derivatives of nonlinear functions and can substitute for the common extended Kalman filter (EKF). It has high filtering accuracy, numerical stability and wider range of applications. A simulation example demonstrates the high performance of the new filter.

**Key words:** Nonlinear filtering; Cholesky factorization; Extended Kalman filtering; Second-order interpolation

### 1 引言

推广卡尔曼滤波器(EKF)是一种应用极为广泛的非线性系统滤波方法。EKF与线性卡尔曼滤波器形式类似,但在递推公式中需要非线性函数的偏导计算,不能象线性滤波那样事先离线计算增益和协方差阵,并与常规卡尔曼滤波一样,数值稳定性较差,初值不易确定。为了改善上述常规滤波算法的数值稳定性,并提高计算效率,自20世纪70年代以来,人们提出了平方根滤波、 $U-D$ 分解滤波、奇异值分解滤波等数值鲁棒的滤波算法<sup>[1]</sup>。

应用 Stirling 内插公式<sup>[2]</sup>来计算均值、方差和协方差,构造新型滤波器,不需计算函数的偏导数,仅需要函数估计值,甚至非线性函数不连续且存在奇异点(无导数存在)也能进行状态估计,其滤波精

度类似于二阶的EKF。本文分别介绍多维情形的内插公式,均值、方差和协方差的二阶估计,新型滤波器的实现及其仿真。

### 2 多维情形的内插公式

在讨论多维情形的内插法之前,首先介绍一维函数的内插公式及其逼近精度。将任意连续函数用二阶 Taylor 级数展开,有

$$f(x) = f(\bar{x}) + f_{DD}(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f_{DDD}(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 \quad (1)$$

用中心差商代替一阶和二阶导数,即

$$f_{DD}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h}$$
$$f_{DDD}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) + f(\bar{x} - h) - 2f(\bar{x})}{h^2}$$

收稿日期: 2001-10-17; 修回日期: 2001-12-06。

作者简介: 范文兵(1969—),男,河南郑州人,博士生,从事系统滤波、预测控制等研究;张素贞(1938—),女,上海人,教授,博士生导师,从事过程建模仿真、智能控制应用等研究。

再用 Taylor 级数展开, 则式(1) 可写成

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}(x - \bar{x})^2 + \left(\frac{f^{(3)}(\bar{x})}{3!}h^2 + \frac{f^{(5)}(\bar{x})}{5!}h^4 + \dots\right)(x - \bar{x}) + \left(\frac{f^{(4)}(\bar{x})}{4!}h^2 + \frac{f^{(6)}(\bar{x})}{6!}h^4 + \dots\right)(x - \bar{x})^2$$

从以上展开式可以看出, 前3项与二阶 Taylor 展开式相同, 后两项对应高阶项, 其精度由  $h$  来控制. 显然, 用中心差商代替一阶和二阶导数得到的展开式, 其精度高于一般二阶 Taylor 级数的精度.

下面引入两个重要定义, 并将一维情形推广到多维情形.

**定义1(多维情形)** 设  $x \in R^n, y = f(x)$  为函数向量, 则在  $x = \bar{x}$ 附近用内插公式展开, 有

$$y = f(\bar{x} + \Delta x) = f(\bar{x}) + \tilde{D}_{\Delta x}f + \frac{1}{2}\tilde{D}_{\Delta x}^2f \quad (2)$$

其中

$$\tilde{D}_{\Delta x}f = \frac{1}{h} \left( \sum_{p=1}^n \Delta x_p \mu_p \delta_p \right) f(\bar{x})$$

$$\tilde{D}_{\Delta x}^2f = \frac{1}{h^2} \left( \sum_{p=1}^n (\Delta x_p)^2 \delta_p^2 + \sum_{p=1}^n \sum_{q=1, q \neq p}^n \Delta x_p \Delta x_q (\mu_p \delta_p)(\mu_q \delta_q) \right) f(\bar{x})$$

这里:  $\delta_p$  为第  $p$  差分算子,  $\mu_p$  为均值算子.

**定义2(线性变换)** 设  $z = S^{-1}x, \tilde{f}(z)$

$f(Sz) = f(x)$ , 则

$$2\mu_p \delta_p \tilde{f}(z) = \tilde{f}(z + h\epsilon_p) - \tilde{f}(z - h\epsilon_p) = f(\bar{x} + h s_p) - f(\bar{x} - h s_p) \quad (3)$$

称  $S$  为线性变换矩阵,  $s_p$  是矩阵  $S$  的第  $p$  列. 这里  $S$  对下面状态变量和输出变量的均值、方差和协方差的求取非常有用.

### 3 均值、方差和协方差的二阶估计<sup>[3]</sup>

假设  $x$  是随机向量, 其均值和方差为  $\bar{x} = E[x], P_x = E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T]$ , 并定义随机向量函数的均值和方差为

$$\begin{aligned} \bar{y}_T &= E[f(x)] \\ (P_x)_T &= E[(f(x) - \bar{y}_T)(f(x) - \bar{y}_T)^T] \\ (P_{xy})_T &= E[(x - \bar{x})(f(x) - \bar{y}_T)^T] \end{aligned}$$

取  $P_x$  的 Cholesky 因式分解的因子作为线性变换矩阵  $S_x$ , 则  $z = S_x^{-1}x, P_x = S_x S_x^T$ . 函数  $\tilde{f}(z)$  的二阶内插展开式为

$$y = \tilde{f}(\bar{z}) + \tilde{D}_{\Delta z}f + \frac{1}{2}\tilde{D}_{\Delta z}^2f$$

这里设  $\Delta z$  为零均值高斯分布, 各元素互不相关.

### 1) 函数均值二阶估计

$$\bar{y} = \frac{h^2 - n}{h^2} f(\bar{x}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^n [f(\bar{x} + h s_{x,p}) + f(\bar{x} - h s_{x,p})] \quad (4)$$

其中:  $s_{x,p}$  为  $s_x$  的第  $p$  列,  $n$  为  $x$  的维数.

### 2) 函数方差二阶估计

$$\begin{aligned} P_y &= \frac{1}{4h^2} \sum_{p=1}^n [f(\bar{x} + h s_{x,p}) - f(\bar{x} - h s_{x,p})][f(\bar{x} + h s_{x,p}) - f(\bar{x} - h s_{x,p})]^T + \frac{h^2 - 1}{4h^2} \sum_{p=1}^n [f(\bar{x} + h s_{x,p}) + f(\bar{x} - h s_{x,p}) - 2f(\bar{x})][f(\bar{x} + h s_{x,p}) + f(\bar{x} - h s_{x,p}) - 2f(\bar{x})]^T \end{aligned} \quad (5)$$

### 3) 自变量 $x$ 与因变量 $y$ 的协方差

$$P_{xy} = \frac{1}{2h} \sum_{p=1}^n s_{x,p} [f(\bar{x} + h s_{x,p}) - f(\bar{x} - h s_{x,p})]^T \quad (6)$$

## 4 非线性系统状态估计

### 4.1 一般非线性系统卡尔曼滤波问题

考虑一般非线性系统, 状态方程和观测方程可表示为

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, v_k)$$

$$y_k = g(x_k, w_k)$$

假设过程噪声  $v_k$  和观测噪声  $w_k$  均为与状态变量  $x_k$  互不相关的高斯白噪声, 并且  $v_k \sim (\bar{v}_k, Q(k)), w_k \sim (\bar{w}_k, R(k))$ . 对于上述问题, 标准的卡尔曼滤波方法可概括如下:

#### 1) 验前状态和方差估计

$$\bar{x}_k = E[x_k | Y^{k-1}] \quad (7)$$

$$\bar{P}(k) = E[(x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)^T | Y^{k-1}] \quad (8)$$

其中  $Y^{k-1} = [y_0, y_1, \dots, y_{k-1}]^T$ .

#### 2) 验后状态增益阵和状态估计

$$K_k = P_{xy}(k) P_y^{-1}(k) \quad (9)$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - \bar{y}_k) \quad (10)$$

#### 3) 状态方差阵的修正

$$\begin{aligned} \hat{P}(k) &= E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T | Y^k] = \\ &= \bar{P}(k) - K_k P_y(k) K_k^T \end{aligned} \quad (11)$$

### 4.2 数值鲁棒的非线性滤波方法<sup>[3~5]</sup>

根据上节讨论的均值、方差和协方差二阶估计, 以及标准的卡尔曼滤波方法, 可导出数值鲁棒且滤波精度高的新型滤波器. 首先给出4个方阵的 Cholesky 因式分解和8个重要矩阵.

#### 1) Cholesky 因式分解

$$\begin{cases} Q = S_v S_v^T, & R = S_w S_w^T \\ \hat{P} = \hat{S}_x \hat{S}_x^T, & \hat{P} = \hat{S}_x \hat{S}_x^T \end{cases} \quad (12)$$

2) 重要矩阵

$$S_{xx}^{(1)}(k) = \{S_{xx}^{(1)}(i, j)\} = \{f_i(\hat{x}_k + h s_{x,j}, u_k, \bar{v}_k) - f_i(\hat{x}_k - h s_{x,j}, u_k, \bar{v}_k)\} / 2h \quad (13)$$

$$S_{xv}^{(1)}(k) = \{S_{xv}^{(1)}(i, j)\} = \{f_i(\hat{x}_k, u_k, \bar{v}_k + h s_{v,j}) - f_i(\hat{x}_k, u_k, \bar{v}_k - h s_{v,j})\} / 2h \quad (14)$$

$$S_{yx}^{(1)}(k) = \{S_{yx}^{(1)}(i, j)\} = \{g_i(\bar{x}_k + h \bar{s}_{x,j}, \bar{w}_k) - g_i(\bar{x}_k - h \bar{s}_{x,j}, \bar{w}_k)\} / 2h \quad (15)$$

$$S_{yw}^{(1)}(k) = \{S_{yw}^{(1)}(i, j)\} = \{g_i(\bar{x}_k, \bar{w}_k + h s_{w,j}) - g_i(\bar{x}_k, \bar{w}_k - h s_{w,j})\} / 2h \quad (16)$$

$$S_{xx}^{(2)}(k) = \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h^2} (f_i(\hat{x}_k + h s_{x,j}, u_k, \bar{v}_k) + f_i(\hat{x}_k - h s_{x,j}, u_k, \bar{v}_k) - 2f_i(\hat{x}_k, u_k, \bar{v}_k)) \right\} \quad (17)$$

$$S_{xv}^{(2)}(k) = \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h^2} (f_i(\hat{x}_k, u_k, \bar{v}_k + h s_{v,j}) + f_i(\hat{x}_k, u_k, \bar{v}_k - h s_{v,j}) - 2f_i(\hat{x}_k, u_k, \bar{v}_k)) \right\} \quad (18)$$

$$S_{yx}^{(2)}(k) = \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h^2} (g_i(\bar{x}_k + h \bar{s}_{x,j}, \bar{w}_k) + g_i(\bar{x}_k - h \bar{s}_{x,j}, \bar{w}_k) - 2g_i(\bar{x}_k, \bar{w}_k)) \right\} \quad (19)$$

$$S_{yw}^{(2)}(k) = \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h^2} (g_i(\bar{x}_k, \bar{w}_k + h s_{w,j}) + g_i(\bar{x}_k, \bar{w}_k - h s_{w,j}) - 2g_i(\bar{x}_k, \bar{w}_k)) \right\} \quad (20)$$

3) 验前状态均值和方差二阶估计

根据式(4) 函数均值推导过程, 可得验前状态均值二阶估计

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} = & \frac{h^2 - n_x - n_v}{h^2} f(\hat{x}_k, u_k, \bar{v}_k) + \\ & \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_x} (f(\hat{x}_k + h s_{x,p}, u_k, \bar{v}_k) + \\ & f(\hat{x}_k - h s_{x,p}, u_k, \bar{v}_k)) + \\ & \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_v} (f(\hat{x}_k, u_k, \bar{v}_k + h s_{v,p}) + \\ & f(\hat{x}_k, u_k, \bar{v}_k - h s_{v,p})) \end{aligned}$$

根据式(5) 中函数方差的估计结果, 并应用式(13), (14), (17), (18), 可得验前状态方差的二阶估计

$$\hat{P}(k+1) = \bar{S}_x(k+1) \bar{S}_x(k+1)^T \quad (21)$$

其中

$$\bar{S}_x(k+1) = [S_{xx}^{(1)}(k) \quad S_{xv}^{(1)}(k) \quad S_{xx}^{(2)}(k) \quad S_{xv}^{(2)}(k)]$$

4) 验后状态增益阵和状态估计

根据式(4) 计算输出向量的均值

$$\begin{aligned} \bar{y}_k = & \frac{h^2 - n_x - n_w}{h^2} g(\bar{x}_k, \bar{w}_k) + \\ & \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_x} g(\bar{x}_k + h \bar{s}_{x,p}, \bar{w}_k) + \\ & g(\bar{x}_k - h \bar{s}_{x,p}, \bar{w}_k) + \\ & \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_w} g(\bar{x}_k, \bar{w}_k + h s_{w,p}) + \\ & g(\bar{x}_k, \bar{w}_k - h s_{w,p}) \end{aligned}$$

根据式(6) 和(15) 计算状态向量和输出向量的协方差阵

$$P_{xy}(k) = \bar{S}_x(k) S_{yx}^{(1)}(k)^T \quad (22)$$

根据式(5), (15), (16) (19), (20), 可得输出向量方差阵

$$P_y(k) = S_y(k) S_y(k)^T \quad (23)$$

其中

$$S_y(k) = [S_{yx}^{(1)}(k) \quad S_{yw}^{(1)}(k) \quad S_{yx}^{(2)}(k) \quad S_{yw}^{(2)}(k)]$$

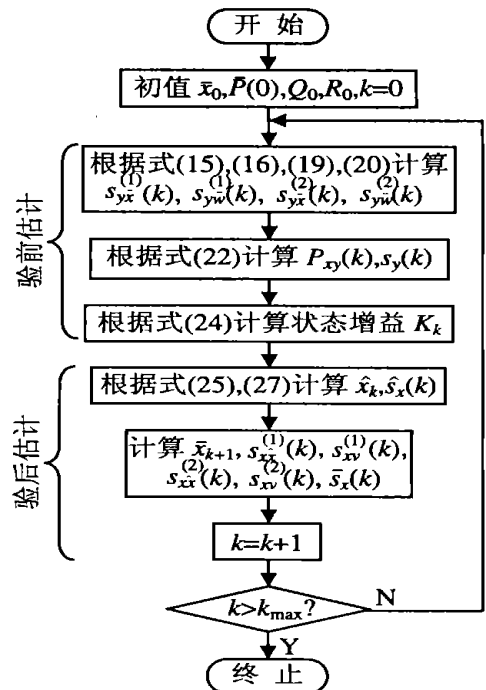


图 1 滤波器算法流程

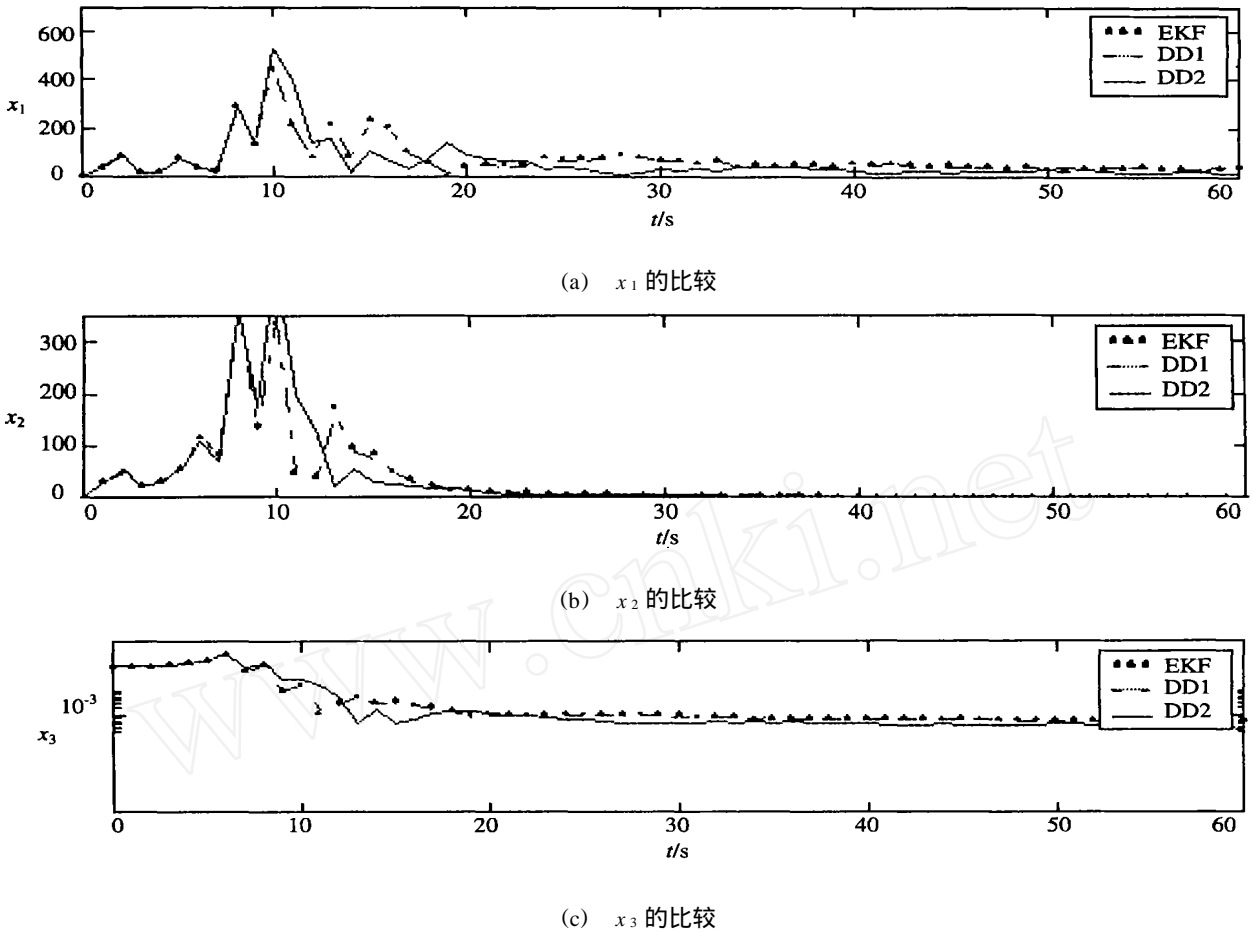


图2 3种滤波方法误差下降速率比较

验后状态增益

$$K_k = P_{xy}(k) [S_y(k)S_y(k)^T]^{-1} \quad (24)$$

验后状态估计

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k(y_k - \bar{y}_k) \quad (25)$$

5) 状态方差阵的修正

$$\hat{P}(k) = \bar{P}(k) - K_k P_y(k) K_k^T = \hat{S}_x(k) \hat{S}_x(k)^T \quad (26)$$

其中

$$\hat{S}_x(k) = [\bar{S}_x(k) - K_k S_{yx}^{(1)}(k), K_k S_{yw}^{(1)}(k), K_k S_{yx}^{(2)}(k), K_k S_{yw}^{(2)}(k)] \quad (27)$$

上述滤波器算法流程如图1所示。

### 5 仿真实例

为验证新型滤波器算法的有效性,考虑一个非线性随机系统,该系统的状态方程和观测方程如下

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + v_1 \\ \dot{x}_2 &= -\exp(-5 \times 10^5 x_1) x_2^2 x_3 + v_2 \\ \dot{x}_3 &= v_3 \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{2 \times 10^5 + (x_1 - 10^5)^2} + w$$

初始状态  $x(0) = [3 \times 10^5, 2 \times 10^4, 10^{-3}]$ , 状

态方差  $\bar{P}(0) = \text{diag}([10^6, 4 \times 10^6, 10^{-4}])$ 。假定过程噪声  $v$  和观测噪声  $w$  都是均值为0的白噪声序列,其方差  $Q = \text{diag}([0, 0, 0]), R = 10^4$ 。

对于上述实例,分别应用扩展卡尔曼滤波方法、一阶差分滤波器和二阶差分滤波器,其状态估计结果如图2所示。从图中可以看出,本文所介绍的二阶差分滤波器比前二者滤波精度高,数值鲁棒性好。

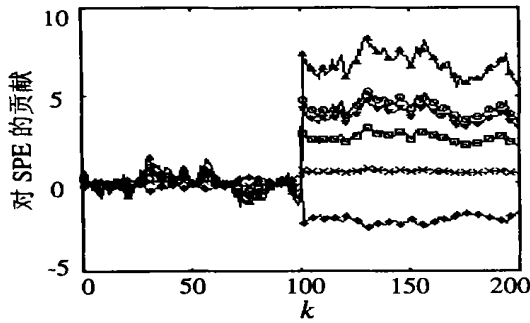
### 6 结论

本文采用二阶差分来计算状态均值、方差和协方差,并应用Cholesky因式分解增加了滤波器数值的鲁棒性。仿真结果表明,新滤波器优于常规滤波器,适用于高度非线性和高噪声的系统,该滤波器易于实现,对各种非线性模型均可使用,因此其应用范围远远大于常规的卡尔曼滤波器。

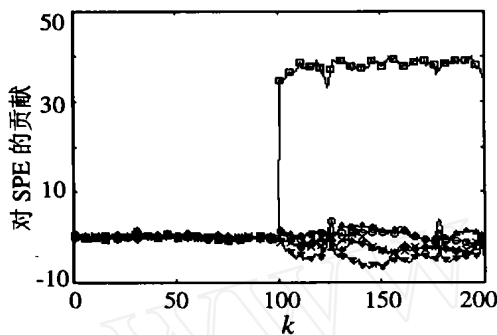
### 参考文献(References):

[1] Zhang YM, Li Q G, Dai G Z, et al A recursive identification algorithm based on singular value decomposition [J] *Control Theory Appl*, 1995, 12(2): 224-229.

(下转第232页)



(a) 基于线性 PCA 方法



(b) 基于非线性 PCA 方法

图4 基于 SPE 贡献图的故障分离结果

图4(a)中各变量对SPE贡献都较大,因此无法对故障进行分离,甚至出现误报。而在图4(b)中,反应浓度 $C_A$ 对出现的异常贡献最大,因此可以认为反应浓度 $C_A$ 值出现了异常,从而找出了故障源。可见,由于非线性PCA更全面地描述了系统特征,因此更适合过程监视和故障诊断。

#### 4 结 论

本文改进了输入训练神经网络学习算法,并提出了基于输入训练神经网络的非线性PCA故障诊断方法。对CSTR的仿真研究结果表明,该方法可以克服线性PCA方法在提取过程变量非线性特征

方面的不足,并能够准确地进行故障检测和分离。由于采用双网络(输入神经网络和BP网络)机制实现非线性主元的识别,因此该方法可用于在线过程监测和故障诊断。非线性PCA方法同时提取了历史数据集中的线性信息和非线性信息,同线性PCA相比,它能更全面准确地描述系统,因此非线性PCA故障诊断方法必将成为故障诊断领域的研究热点。

#### 参考文献(References):

- [1] Seongkyu Yoon, MacGregor John F. Statistical and causal model-based approaches to fault detection and isolation[J]. *A IChE J*, 2000, 46(9): 1813-1824
- [2] 李尔国,俞金寿. PCA在过程故障检测与诊断中的应用[J]. *华东理工大学学报*, 2001, 27(5): 572-576
- [3] Dong D, Thomas J. Batch tracking via nonlinear principal component analysis[J]. *A IChE J*, 1996, 42(8): 2199-2208
- [4] Roten Y, Wachs A, Lewin D R. Ethylene compressor monitoring using model-based PCA[J]. *A IChE J*, 2000, 46(9): 1825-1836
- [5] Patton R J, Chen J, Benkhedda H. A study on neuro-fuzzy systems for fault diagnosis[J]. *Int J of System Science*, 2000, 31(11): 1441-1448
- [6] Jia F, Martin E B, Morris A J. Non-linear principal components analysis with application to process fault detection[J]. *Int J of System Science*, 2000, 31(11): 1473-1487
- [7] Kramer M A. Non-linear principal component analysis using autoassociative neural networks[J]. *A IChE J*, 1991, 37(2): 233-243
- [8] Malhotra E C. Limitations of non-linear PCA as performed with generic neural networks[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1998, 9(1): 165-173
- [9] Tan S, Mavrouniotis M L. Reducing data dimensionality through optimizing neural network inputs[J]. *A IChE J*, 1995, 41(6): 1471-1480

(上接第228页)

- [2] Schei T S. A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithms[J]. *Automatica*, 1997, 33(11): 2051-2058
- [3] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. Easy and accurate state estimation for nonlinear systems[A]. *14th IFA C World Conf [C]*. Beijing, 1999. 343-348
- [4] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant W F. A new

approach for filtering nonlinear systems[A]. *Proc 1995 American Control Conf [C]*. Seattle, 1995. 1628-1632

- [5] Zhang Y M, Dai G Z, Zhang H C, et al. A SVD-based extended Kalman filter and application to flight state and parameter estimation of aircraft[J]. *Control Theory Appl*, 1996, 13(1): 106-114