第 18 卷 第 2 期 控 制 与 决 策 2003 年 3 月
Vol. 18 No. 2 Control and Decision Mar. 2003

文章编号: 1001-0920(2003)02-0254-03

离散系统鲁棒稳定的简化条件及其反馈控制方法

史 忠 科
(西北工业大学 自动控制系, 陕西 西安 710072)

摘 要: 给出了一种离散系统鲁棒稳定性的分析方法。通过对离散系统不确定部分不同表达式的研究,提出一种系统鲁棒稳定判别不等式。为解决系统鲁棒稳定性的实际计算问题, 给出了离散系统鲁棒稳定性的另一种描述, 并由此描述和不等式恒等变形, 得到新的鲁棒稳定性判据。该判据结构简单, 很容易判定系统的鲁棒性。在此基础上, 给出了系统鲁棒反馈控制的设计方法。

关键词: 鲁棒控制; 系统稳定性; 离散时间系统; 反馈设计
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Simplified condition and feedback control method for robust stability of discrete-time linear systems

SHI Zhong-ke
(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A new approach to analyze discrete-time system robust stability is presented. Through studying different descriptions for the uncertain part of systems, inequality for system robust stability is developed. To get the solution of positive matrix, which involves complex computation of nonlinear polynomial matrix inequity, a new description of robust stability of discrete-time system is given and an equivalent transformation of the inequality is made. Thus a simple and numerical efficient method for the determination of robust stability of discrete-time system is obtained. Based on the new criterion, the design method of robust feedback controller is carried out.

Key words: Robust control; System stability; Discrete-time system; Feedback controller design

1 引 言

通常系统的模型总是存在这样或那样的不确定性。特别是离散时间系统, 模型中不仅含有不确定因素和线性化等误差, 而且还存在着离散化的误差。这样, 用精确数学模型对系统分析的结果或设计出的控制器常常不满足工程要求。近年来, 人们对不确定离散时间系统鲁棒控制问题展开了研究, 并取得了一系列研究成果[1~12]。然而, 现有的离散系统鲁棒稳定性结果过于复杂, 很难实际计算。为此, 本文提出一种简明、实用的离散系统鲁棒稳定性分析和控制器设计方法。

2 鲁棒稳定问题描述

设线性离散系统的状态方程为

$$x(k+1) = [G(k) + \Delta G(k)]x(k) \tag{1}$$

式中: $x \in R^n$ 为状态向量; G 为已知的系数矩阵, 且 G 的特征值模值全部小于 1; $\Delta G(k)$ 为未知矩阵, 以下将 $\Delta G(k)$ 简写成 ΔG。

根据李亚普诺夫稳定性定理可得

$$x^{T}(k)[G(k) + \Delta G]^{T}P[G(k) + \Delta G]x(k) - x^{T}(k)Px(k) < 0 \tag{2}$$

或

收稿日期: 2001-12-24; **修回日期**: 2002-02-27。
基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(69925306)。
作者简介: 史忠科(1956—), 男, 陕西岐山人, 教授, 博士, 从事控制理论、系统工程等研究。

$$[G(k)+\Delta G]^{\mathrm{T}}P[G(k)+\Delta G]-P<0 \quad (3)$$

如果存在正定矩阵 P 使式(3) 成立, 则系统(1) 鲁棒稳定。另一方面, 由式(3) 可得

$$[G(k)+\Delta G]^{\mathrm{T}}[G(k)+\Delta G]-I<0 \quad (4)$$

因此, 式(4) 成立时也说明系统具有鲁棒稳定性。

在实际中, ΔG 无法准确给出, 但可估计出 ΔG 取值的上、下界范围。从式(3) 或式(4) 很难判定不同 ΔG 取值下的系统鲁棒稳定性能。为此, 本文给出以下判定方法。

3　鲁棒稳定性判别式

设

$$\Delta G = EFH \quad (5)$$

式中 $\|F\|<1$ 为对角矩阵。此时, 式(1) 可写成

$$\mathrm{x}(k+1)=[G(k)+EFH]\mathrm{x}(k) \quad (6)$$

为简单起见, 将 $G(k)$ 用 G 表示。由式(3) 和(5) 可得

$$\begin{aligned}&[G^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}]P[G+EFH]-P=\\&G^{\mathrm{T}}PG+H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}PG+G^{\mathrm{T}}PEFH+\\&H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}PEFH-P<0\end{aligned} \quad (7)$$

当 $\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE>0$ 时, 有

$$\begin{aligned}&[G^{\mathrm{T}}PE(\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE)^{-1/2}-\\&H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE)^{1/2}]\times\\&[G^{\mathrm{T}}PE(\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE)^{-1/2}-\\&H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE)^{1/2}]^{\mathrm{T}}=\\&G^{\mathrm{T}}PE(\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE)^{-1}E^{\mathrm{T}}PG-\\&H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}PG-G^{\mathrm{T}}PEFH+\\&H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE)FH\geq 0\end{aligned} \quad (8)$$

因此有

$$\begin{aligned}&H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}PG+G^{\mathrm{T}}PEFH+H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}PEFH\leq\\&G^{\mathrm{T}}PE(\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE)^{-1}E^{\mathrm{T}}PG+\epsilon^{-1}H^{\mathrm{T}}H\end{aligned} \quad (9)$$

将式(9) 代入(7), 则式(1) 所示系统的鲁棒稳定性条件为

$$\begin{aligned}&[G^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}]P[G+EFH]-P\leq\\&G^{\mathrm{T}}PG-P+G^{\mathrm{T}}PE(\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE)^{-1}E^{\mathrm{T}}PG+\\&\epsilon^{-1}H^{\mathrm{T}}H<0\end{aligned} \quad (10)$$

根据矩阵反逆公式, 式(10) 右端前两项可写为

$$\begin{aligned}&G^{\mathrm{T}}PG+G^{\mathrm{T}}PE(\epsilon^{-1}I-E^{\mathrm{T}}PE)^{-1}E^{\mathrm{T}}PG=\\&G^{\mathrm{T}}\{P^{-1}[P^{-1}+E(\epsilon^{-1}I-\\&E^{\mathrm{T}}PE)^{-1}E^{\mathrm{T}}]^{-1}P^{-1}\}^{-1}G=\\&G^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\epsilon EE^{\mathrm{T}})^{-1}G\end{aligned} \quad (11)$$

将式(11) 代入(10), 可得

$$\begin{aligned}&[G^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}]P[G+EFH]-P\leq\\&G^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\epsilon EE^{\mathrm{T}})^{-1}G-P+\epsilon^{-1}H^{\mathrm{T}}H\end{aligned} \quad (12)$$

这样, 系统稳定性问题可用如下条件表示, 即

$$\begin{aligned}&G^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\epsilon EE^{\mathrm{T}})^{-1}G-\\&P+\epsilon^{-1}H^{\mathrm{T}}H<0\end{aligned} \quad (13)$$

分析式(1) 所示系统鲁棒稳定性条件式(10) 或(13) 可知, 正定矩阵 P 很难从式(10) 或(13) 中求解。为此, 给出下述的鲁棒稳定性新判据。

4　鲁棒稳定性的另一种表达

由式(3) 可得

$$\begin{aligned}&[G(k)+\Delta G]^{\mathrm{T}}P[G(k)+\Delta G]-P=\\&G^{\mathrm{T}}(k)PG(k)+\Delta G^{\mathrm{T}}P\Delta G+\\&G^{\mathrm{T}}(k)P\Delta G+\Delta G^{\mathrm{T}}PG(k)-P<0\end{aligned} \quad (14)$$

而对于任意非零常数 λ, 有

$$\begin{aligned}&[\lambda G(k)-\lambda^{-1}\Delta G]^{\mathrm{T}}P[\lambda G(k)-\lambda^{-1}\Delta G]=\\&\lambda^{2}G^{\mathrm{T}}(k)PG(k)+\lambda^{-2}\Delta G^{\mathrm{T}}P\Delta G+\\&G^{\mathrm{T}}(k)P\Delta G+\Delta G^{\mathrm{T}}PG(k)\geq 0\end{aligned} \quad (15)$$

将式(15) 代入(14), 可得

$$\begin{aligned}&[G(k)+\Delta G]^{\mathrm{T}}P[G(k)+\Delta G]-P\leq\\&(1+\lambda^{2})G^{\mathrm{T}}(k)PG(k)+(1+\\&\lambda^{-2})\Delta G^{\mathrm{T}}P\Delta G-P<0\end{aligned} \quad (16)$$

如果存在正定矩阵 P 使式(16) 成立, 则系统(1) 鲁棒稳定。

式(16) 可写成

$$\begin{aligned}&(1+\lambda^{2})G^{\mathrm{T}}(k)PG(k)+\\&(1+\lambda^{-2})\Delta G^{\mathrm{T}}P\Delta G-P=\\&\left[\sqrt{(1+\lambda^{2})}G^{\mathrm{T}}(k)\ \ \sqrt{(1+\lambda^{-2})}\Delta G^{\mathrm{T}}\right]\times\\&\begin{bmatrix}P&0\\0&P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{(1+\lambda^{2})}G(k)\\\sqrt{(1+\lambda^{-2})}\Delta G\end{bmatrix}-\\&[I\ \ 0]\begin{bmatrix}P&0\\0&P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}<0\end{aligned} \quad (17)$$

由式(17) 可得

$$\begin{aligned}&(1+\lambda^{2})G^{\mathrm{T}}(k)G(k)+\\&(1+\lambda^{-2})\Delta G^{\mathrm{T}}\Delta G-I<0\end{aligned} \quad (18)$$

式(18) 给出了系统鲁棒稳定性的另一种描述。

将式(5) 代入式(18) 中, 可得

$$\begin{aligned}&(1+\lambda^{2})G^{\mathrm{T}}(k)G(k)+\\&(1+\lambda^{-2})H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}EFH-I<0\end{aligned} \quad (19)$$

当 $F^{\mathrm{T}}F<I$ 时, $F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}EF-E^{\mathrm{T}}E<0$。这样, 由式(19) 可得

$$\begin{aligned}&(1+\lambda^{2})G^{\mathrm{T}}(k)G(k)+\\&(1+\lambda^{-2})H^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}EH-I<0\end{aligned} \quad (20)$$

式(16) 或(20) 即给出了系统鲁棒稳定的新判据。

5　鲁棒镇定控制

设线性离散系统的状态方程为

$$\mathrm{x}(k+1)=[G(k)+\Delta G]\mathrm{x}(k)+$$

$$[B(k) + \Delta B(k)]u(k) \tag{21}$$

式中: $x \in R^n$ 为状态向量; $u \in R^m$ 为输入向量; G, B 为已知的系数矩阵; $\Delta G, \Delta B$ 为未知矩阵。

当系统不具有鲁棒稳定性时, 取状态反馈

$$u(k) = v(k) - Kx(k) \tag{22}$$

代入式(21) 中, 可得

$$x(k+1) = $$
$$[G(k) + \Delta G - B(k)K - \Delta B(k)K]x(k) + $$
$$[B(k) + \Delta B(k)]v(k) \tag{23}$$

选取闭环极点的模值均小于 1, 且满足

$$(1+\lambda^2)[G(k) - B(k)K - \Delta B(k)K]^T \times$$
$$[G(k) - B(k)K - \Delta B(k)K] +$$
$$(1+\lambda^{-2})\Delta G^T \Delta G - I < 0 \tag{24}$$

根据式(20) 可知, 当式(24) 成立时, 系统鲁棒稳定。

反馈矩阵的具体设计步骤为:

1) 估计出 $\Delta G^T \Delta G$ 的最大特征值 $\sigma_{\max}[\Delta G^T \Delta G]$;

2) 选取 λ 和所有的希望极点满足条件

$$(1+\lambda^2)\left|\sigma[G(k) - B(k)K - \Delta B(k)K]\right| <$$
$$1 - \sqrt{(1+\lambda^{-2})}\sqrt{\left|\sigma_{\max}[\Delta G^T \Delta G]\right|} \tag{25}$$

3) 求解状态反馈矩阵 K。

6 结 语

离散系统的鲁棒稳定性方法具有较为广泛的应用, 但由于在系统鲁棒稳定性条件表达式中, 正定矩阵 P 需要涉及复杂的非线性矩阵不等式求解, 因此使得人们在处理实际问题时面临很大的困难。为了解决实际应用问题, 本文给出了离散系统鲁棒稳定性的新判断式(16) 或(20)。通过式(16), 人们在求解正定矩阵 P 时, 仅需要涉及线性矩阵不等式。根据式(20), 可通过系统极点分布确定系统的鲁棒性。根据新的鲁棒稳定性判据, 本文给出了结构简单的系统鲁棒反馈控制的设计方法。该方法不仅可处理线性离散系统的鲁棒稳定性问题, 且可推广到非线性离散系统中。

参考文献(References):

[1] Boukas E K, Shi P. H_∞ control for discrete-time linear systems with Frobenius norm-bounded uncertainties [J]. *Automatica*, 1999, 35(9): 1625-1631.

[2] Corless M J, Leitmnn G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems [J]. *IEEE Trans Automat Control*, 1981, 26(8): 1139-1144.

[3] Goodall D P, Pyan E P. Feedback controlled differential inclusions and stabilization of uncertain dynamical systems [J]. *SIAM J Control Optim*, 1988, 26(5): 1431-1441.

[4] Hale J K, Verduyn Lunel S M. *Introduction to Functional Differential Equations* [M]. New York: Springer, 1993.

[5] Hennet J C, Tarbouriech S. Stability and stabilization of delay differential systems [J]. *Automatica*, 1997, 33 (2): 347-354.

[6] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems [J]. *Automatica*, 1986, 22(2): 397-411.

[7] Qu Z. Asymptotic stability of controlling uncertain dynamical systems [J]. *Int J Control*, 1994, 59 (6): 1345-1355.

[8] Shi P, Dragan V. Asymptotic H_∞ control for singularly perturbed systems with parame-tric uncertainties [J]. *IEEE Trans Automat Control*, 1999, 44(9): 1738-1742.

[9] Shi P. Filtering on sampled-data systems with parametric uncertainty [J]. *IEEE Trans Automat Control*, 1998, 43(7): 1022-1027.

[10] Shi P, Boukas E K. H_∞ control for Markovian jumping linear systems with parametric uncertainty [J]. *J Optim Theory Appl*, 1998, 95(1): 75-99.

[11] Shi P, Xie L, Wang Y. Robust filtering for interconnected uncertain systems under sampled measurements [J]. *J Dyn Syst Mesur Control, Trans ASME*, 1997, 119(2): 337-340.

[12] Xie L, Shi P, De Souza C E. On designing controllers for a class of uncertain sampled-data nonlinear systems [J]. *IEE Proc Control Theory Appl*, 1993, 140 (1): 119-126.

(上接第 239 页)

[4] 顾树生, 殷洪义, 王安娜, 等. 无损耗电阻理论及应用研究(Ⅰ) [J]. 控制与决策, 1995, 10(5): 474-479.

(Cu S S, Yin H Y, Wang A N, et al. Study of theory and application for loss-less resistor (Ⅰ) [J]. *Control and Decision*, 1995, 10(5): 474-479.)

[5] Singer S. Loss-free gyrator realization [J]. *IEEE Trans on CAS*, 1988, 35(1): 26-33.

[6] 吴建华, 迟德选, 殷洪义, 等. 应用无损耗电阻器的直流电机速度控制方法研究 [J]. 控制与决策, 2002, 17(3): 375-377.

(Wu J H, Chi D X, Yin H Y, et al. Realization the DC motor speed control by application of the loss-less resistor [J]. *Control and Decision*, 2002, 17 (3): 375-377.)