第 18 卷 第 2 期　　控　制　与　决　策　　2003 年 3 月
Vol. 18 No. 2　　Control and Decision　　Mar. 2003

文章编号: 1001-0920(2003)02-0164-05

Delta 算子不确定系统的多目标鲁棒 H_∞ 控制

张端金[1], 王忠勇[1], 吴　捷[2]
(1. 郑州大学 信息工程学院, 河南 郑州 450052; 2. 华南理工大学 电力学院, 广东 广州 510640)

摘　要: 研究 Delta 算子描述的线性不确定离散系统在区域极点配置约束下的鲁棒 H_∞ 控制问题。目的是设计状态反馈控制器, 使得闭环极点位于预先指定的圆形区域, 且闭环系统传递函数的 H_∞ 范数小于给定的正常数。基于 Delta 算子系统具有 H_∞ 范数界二次 D 可镇定的概念, 导出状态矩阵和输入矩阵均存在不确定性时, Delta 算子系统具有 H_∞ 范数界的鲁棒区域极点配置的充要条件及其状态反馈设计。研究结果表明, 可将现有结果推广到更为一般的情形, 并可统一处理连续与离散系统的相关问题。

关键词: 不确定离散系统; Delta 算子; 鲁棒 H_∞ 控制; 区域极点配置
中图分类号: TP273　　文献标识码: A

Multi-objective robust H_∞ control for the delta operator formulated uncertain systems

ZHANG Duan-jin[1], *WANG Zhong-yong*[1], *WU Jie*[2]
(1. College of Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China;
2. Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: The problem of robust H_∞ control for the delta operator formulated linear uncertain systems with circular pole constrains is studied. The state feedback controllers are designed such that the closed poles are located within a prespecified circular region, and the H_∞ norm of the closed-loop transfer function is less than a given positive scalar for all admissible uncertainties. By introducing the definition of quadratic D stabilizability with H_∞ norm-bound for delta operator systems, sufficient and necessary conditions and the corresponding state feedback control law are developed. The proposed results can be regarded as extensions of existing results on robust H_∞ control and robust pole assignment of delta operator uncertain systems.

Key words: Uncertain discrete time system; Delta operator; Robust H_∞ control; Region pole assignment

1 引　　言

目前关于控制系统的多目标设计问题已引起人们的广泛重视。由于闭环极点对系统稳定性和动态性能具有重要影响, 且易于理解, 因此在考虑系统的多指标综合时, 往往将闭环极点配置作为重要的约束条件。例如区域极点配置与方差约束的综合控制、极点配置与保成本控制的综合等。

与连续情形相比, 有关离散系统的多目标鲁棒控制与 H_∞ 控制的研究较少。文献[1] 研究范数有界时变不确定性离散系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 将不确定系统的鲁棒 H_∞ 控制转化为辅助系统的标准 H_∞ 控制, 给出了状态反馈实现方法。文献[2] 研究

收稿日期: 2002-01-19; 修回日期: 2002-03-27。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60174025); 中国博士后科学基金资助项目([2000] 31)。
作者简介: 张端金(1966—), 男, 湖北荆州人, 副教授, 博士后, 从事高速信息处理、鲁棒控制等研究; 吴捷(1937—), 男, 河北乐亭人, 教授, 博士生导师, 从事自适应控制、电力系统优化与控制等研究。

了离散不确定系统的区域极点配置与 H_∞ 鲁棒镇定的综合方法。然而现有结果均为传统移位算子描述的控制算法，在采样周期很小时将引起病态条件问题。为克服上述问题，本文采用 Delta 算子来描述离散系统。

Delta 算子方法（定义[3] 为 $\delta = (q-1)/T$，其中：q 为前向移位算子，T 为采样周期）在控制和信号处理领域已获得许多成果[4]。最近，人们利用矩阵测度方法，提出了 Delta 算子系统具有性能鲁棒性的判别条件[5]；基于 Lyapunov 方法给出了 Delta 算子不确定系统区域极点配置的鲁棒分析与综合算法[6] 以及鲁棒 H_∞ 镇定设计[7]。

本文研究 Delta 算子不确定系统的多目标鲁棒 H_∞ 控制问题，提出 Delta 算子系统具有 H_∞ 范数界的鲁棒区域极点配置方法，得到了闭环系统满足 H_∞ 指标的鲁棒二次可 D 镇定的充要条件和状态反馈设计。

下文中 $X>0$ 和 $X<0$ 分别表示矩阵 X 为正定和负定矩阵。

2　问题描述

考虑 Delta 算子描述的不确定系统

$$\begin{cases} \delta x(t) = (A+\Delta A)x(t) + \\ \qquad\quad (B+\Delta B)u(t) + Gw(t) \\ z(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(t)\in R^n$ 为状态变量；$u(t)\in R^m$ 为控制输入；$w(t)\in R^l$ 为扰动输入；$z(t)\in R^p$ 为控制输出；A, B, G, C 和 D 均为适当维数的常值矩阵；ΔA 和 ΔB 为范数有界不确定性矩阵，具有如下形式

$$[\Delta A \quad \Delta B] = HF[E_a \quad E_b] \tag{2}$$

其中：H，E_a 和 E_b 为已知的实常数矩阵，不确定参数矩阵 F 满足

$$F^{\mathrm T}F \le I \tag{3}$$

若式(2) 和(3) 同时成立，则称该不确定性为容许的。

假设 1　　$D^{\mathrm T}[C \quad D] = [0 \quad I]$

现在引入状态反馈

$$u(t) = Kx(t) \tag{4}$$

则由式(1) 和(4)，可得闭环系统

$$\delta x(t) = A_c x(t) + Gw(t) \tag{5a}$$

$$z(t) = C_c x(t) \tag{5b}$$

其中

$$A_c = A + BK + \Delta A + \Delta BK$$
$$C_c = C + DK$$

本文的目的是设计状态反馈 $u(t) = Kx(t)$，使得对所有容许的不确定性 ΔA 和 ΔB，下列指标同时满足：

1) 闭环系统(5) 是稳定的，所有极点位于以$(a, 0)$ 为圆心、r 为半径的圆形区域 $D(a,r)$ 内，并满足 $r < 1/T$，$|a| + r < 2/T$，即

$$\lambda(A_c) \subset D(a,r) \tag{6}$$

2) 干扰输入 $w(t)$ 到控制输出 $z(t)$ 的传递函数 $T_{wz}(\gamma)$ 的 H_∞ 范数满足

$$\| T_{wz}(\gamma) \|_\infty = \| C_c(\gamma I - A_c)^{-1}G \|_\infty < \gamma_1 \tag{7}$$

其中：$\gamma_1 > 0$ 是一给定的常数，$\gamma = (z-1)/T$ 为 δ 算子的变换域变量。$T_{wz}(\gamma)$ 的 H_∞ 范数定义为

$$\| T_{wz}(\gamma) \|_\infty = \sup_{\gamma=(e^{j\theta}-1)/T} \sigma_{\max}(T_{wz}(\gamma)) = \sup_{w\in L_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \tag{8}$$

式中：$\sigma_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵最大奇异值，$v \in L_2$ 的定义如下

$$\| v(t) \|_2 = [S_{t=0}^{\infty} v(t)^{\mathrm T} v(t)dt]^{1/2} < \infty$$

这里 S_t^{∞} 表示连续情形的 Riemann 积分或离散情形的 Riemann 求和运算。

引理 1（Delta 算子界实引理）　考虑线性系统 $T_{wz}(\gamma)$ 的$[C_c \quad A_c]$ 能检测实现

$$\delta x(t) = A_c x(t) + Gw(t)$$
$$z(t) = C_c x(t),\quad x(0) = 0$$

如果存在实对称矩阵 $P \ge 0$ 和实数 $\gamma_1 > 0$ 使得

$$A_c^{\mathrm T}P + PA_c + TA_c^{\mathrm T}PA_c + (I+TA_c)^{\mathrm T}PG(\gamma_1^2 I - TG^{\mathrm T}PG)^{-1}G^{\mathrm T}P(I+TA_c) + C_c^{\mathrm T}C_c < 0$$
$$\gamma_1^2 I - TG^{\mathrm T}PG > 0$$

则 A_c 稳定且

$$\| T_{wz}(\gamma) \|_\infty = \| C_c(\gamma I - A_c)^{-1}G \|_\infty \le \gamma_1$$

证明　由文献[8] 的引理 2.1 和矩阵求逆公式易证。□

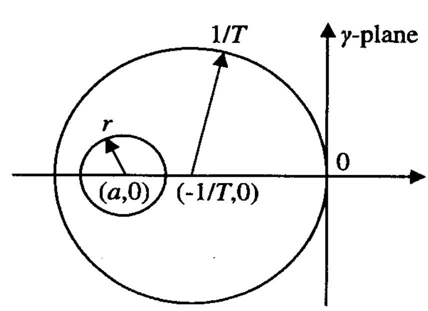

图 1　Delta 算子圆形区域 $D(a, r)$ 的极点配置

引理2[9] 矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 的特征根位于图1所示圆形区域 $D(a,r)$ 内，当且仅当存在正定矩阵 P 满足

$$(I+TA_a)^{\mathrm T}\frac{P}{T}(I+TA_a)-\frac{P}{T}<0 \qquad (9)$$

其中 $$A_a=\frac{A-aI-(1/T)I}{rT}$$

引理3[2] 设 A,N,H,F 和 M 均为适当维数的常值矩阵，$M>0$，F 满足式(3)。如果存在 $\epsilon>0$，使得 $M-\epsilon^{-1}MHH^{\mathrm T}M>0$，则有

$$(A+MHFN)^{\mathrm T}M^{-1}(A+MHFN)\le A^{\mathrm T}(M-\epsilon^{-1}MHH^{\mathrm T}M)^{-1}A+\epsilon N^{\mathrm T}N$$

3 主要结果

定义1 给定常数 $\gamma_1>0$，如果存在状态反馈 $u(t)=Kx(t)$ 和矩阵 $P>0$，使得对于所有容许的不确定性 ΔA 和 ΔB，闭环系统(5)满足

$$\begin{aligned}&(I+TA_{cr})^{\mathrm T}\frac{P}{T}(I+TA_{cr})-\frac{P}{T}+\\&\beta C_c^{\mathrm T}C_c+\beta(I+TA_c)^{\mathrm T}PG(\gamma_1^2I-\\&TG^{\mathrm T}PG)^{-1}G^{\mathrm T}P(I+TA_c)<0\end{aligned} \qquad (10)$$

和 $\gamma_1^2I-TG^{\mathrm T}PG>0$，则称Delta算子系统(1)为具有 H_∞ 范数界 γ_1 的二次 D 可镇定。其中

$$A_{cr}=\frac{A_c-aI-(1/T)I}{rT}$$

$$\beta=\frac{rT+|1+aT|}{r^2T^2}>0$$

A_c 和 C_c 由式(5)给出。

注1 式(10)还可表示为

$$\begin{aligned}&A_{cr}^{\mathrm T}P+PA_{cr}+TA_{cr}^{\mathrm T}PA_{cr}+\beta C_c^{\mathrm T}C_c+\\&\beta\gamma_1^{-2}(I+TA_c)^{\mathrm T}PG(I-\\&\gamma_1^{-2}TG^{\mathrm T}PG)^{-1}G^{\mathrm T}P(I+TA_c)<0\end{aligned}$$

注2 定义1给出Delta算子不确定系统的多指标性能约束，将鲁棒稳定性、H_∞ 性能和鲁棒区域极点配置进行融合，可导出Delta算子系统的多目标鲁棒 H_∞ 控制律。

注3 定义1同时给出不确定连续系统和离散系统的鲁棒镇定、区域极点配置和 H_∞ 控制结果。在式(10)中，若不考虑区域极点约束，令 $T=0$ 即为连续系统 H_∞ 鲁棒控制[10] 的定义；令 $T=1$，$A=TA+I$ 即得离散系统的具有 H_∞ 性能的鲁棒二次镇定[11] 的定义。

定理1 如果Delta算子不确定系统(1)是具有 H_∞ 范数界 γ_1 的二次 D 可镇定的，则存在状态反馈 $u(t)=Kx(t)$，使得对于所有容许的不确定性 ΔA 和 ΔB，闭环系统(5)的极点位于圆形区域 $D(a,r)$ 内且干扰输入 $w(t)$ 到控制输出 $z(t)$ 的传递函数的 H_∞ 范数满足 $\|T_{wz}(\gamma)\|_\infty<\gamma_1$。

证明 假定Delta算子系统(1)是具有 H_∞ 范数界 γ_1 的二次 D 可镇定的，则由定义1知，存在状态反馈 $u(t)=Kx(t)$ 和矩阵 $P>0$，使得式(10)成立。进一步得

$$(I+TA_{cr})^{\mathrm T}\frac{P}{T}(I+TA_{cr})-\frac{P}{T}<0 \qquad (11)$$

根据引理2，得 $\lambda(A_c)\subset D(a,r)$。

下面证Delta算子系统(1)满足 H_∞ 范数界。首先考虑如图1所示的情形，即 $1+aT<0$。注意

$$[(I+TA_c)^{\mathrm T}P-P]P^{-1}[(I+TA_c)^{\mathrm T}P-P]^{\mathrm T}\ge 0$$

对于 $a_1=(2+aT-rT)>0$，有

$$\begin{aligned}&-a_1P(I+TA_c)-a_1(I+TA_c)^{\mathrm T}P\ge\\&-a_1(I+TA_c)^{\mathrm T}P(I+TA_c)-a_1P\end{aligned} \qquad (12)$$

由式(10)和(12)，得

$$\begin{aligned}&(1-a_1)(I+TA_c)^{\mathrm T}\frac{P}{T}(I+TA_c)+\\&(a_1^2-a_1-r^2T^2)\frac{P}{T}+\\&r^2T^2\beta[C_c^{\mathrm T}C_c+(I+TA_c)^{\mathrm T}PG(\gamma_1^2I-\\&TG^{\mathrm T}PG)^{-1}G^{\mathrm T}P(I+TA_c)]<0\end{aligned} \qquad (13)$$

式(13)等价于

$$\begin{aligned}&(1-a_1)\Big[(I+TA_c)^{\mathrm T}\frac{P}{T}(I+TA_c)-\\&\frac{P}{T}\Big]+[(1-a_1)^2-r^2T^2]\frac{P}{T}+\\&r^2T^2\beta[C_c^{\mathrm T}C_c+(I+TA_c)^{\mathrm T}PG(\gamma_1^2I-\\&TG^{\mathrm T}PG)^{-1}G^{\mathrm T}P(I+TA_c)]<0\end{aligned} \qquad (14)$$

由 $1+aT<0$，可得

$$(1-a_1)^2=(-1-aT+rT)^2>r^2T^2$$

令

$$\begin{aligned}&r^2T^2\beta=1-a_1=\\&rT-1-aT=rT+|1+aT|\end{aligned}$$

则由式(14)得

$$\begin{aligned}&\Big[(I+TA_c)^{\mathrm T}\frac{P}{T}(I+TA_c)-\frac{P}{T}\Big]+\\&C_c^{\mathrm T}C_c+(I+TA_c)^{\mathrm T}PG(\gamma_1^2I-\\&TG^{\mathrm T}PG)^{-1}G^{\mathrm T}P(I+TA_c)<0\end{aligned} \qquad (15)$$

或等价于

$$\begin{aligned}&A_c^{\mathrm T}P+PA_c+TA_c^{\mathrm T}PA_c+C_c^{\mathrm T}C_c+\\&(I+TA_c)^{\mathrm T}PG(\gamma_1^2I-\\&TG^{\mathrm T}PG)^{-1}G^{\mathrm T}P(I+TA_c)<0\end{aligned} \qquad (16)$$

根据引理1，有

$$\|T_{wz}(\gamma)\|_\infty = \|C_c(\gamma I - A_c)^{-1}G\|_\infty \le \gamma_1$$

关于 $1+aT \ge 0$ 的情形, 其证明过程与 $1+aT<0$ 类似, 此略。□

定理 2　对于 Delta 算子系统(1), 通过状态反馈 $u(t)=Kx(t)$ 使得闭环不确定系统(5) 二次 D 镇定, 且满足 $\|T_{wz}(\gamma)\|_\infty \le \gamma_1$ 的充分必要条件是存在常数 $\epsilon>0$ 和矩阵 $P>0$, 使得

$$\begin{aligned}&(a_1^2 - r^2T^2)\frac{P}{T} + \theta^2 C^{\mathrm T}C + \epsilon E_a^{\mathrm T}E_a - \\ &a_1^2\frac{P}{T}M^{-1}\frac{P}{T} + \left[(I+TA)^{\mathrm T}M - \right. \\ &\left. a_1\frac{P}{T}\right]S^{-1}\left[M(I+TA) - a_1\frac{P}{T}\right] - \\ &U^{\mathrm T}V^{-1}U < 0\end{aligned} \tag{17}$$

$$S = M - \epsilon^{-1}T^2MHH^{\mathrm T}M > 0 \tag{18}$$

并满足 $\gamma_1^2 I - TG^{\mathrm T}PG > 0$。其中

$$U = \epsilon E_b^{\mathrm T}E_a + TB^{\mathrm T}MS^{-1}\left[M(I+TA) - a_1\frac{P}{T}\right]$$

$$\theta = rT\sqrt{\beta},\quad a_1 = (2+aT-rT)$$

$$V = \theta^2 I + \epsilon E_b^{\mathrm T}E_b + T^2B^{\mathrm T}MS^{-1}MB$$

M 定义为

$$M = \frac{P}{T} + \theta^2 PG(\gamma_1^2 I - TG^{\mathrm T}PG)^{-1}G^{\mathrm T}P \tag{19}$$

此时状态反馈控制律为

$$u(t) = -V^{-1}Ux(t) \tag{20}$$

证明　1) 必要性。假定不确定系统(1) 是二次 D 可镇定的且满足 H_∞ 范数界约束, 则由定义 1 可知, 存在状态反馈 $u(t)=Kx(t)$ 和矩阵 $P>0$, 使得式(10) 成立, 即有

$$\begin{aligned}&(I+TA_{cr})^{\mathrm T}\frac{P}{T}(I+TA_{cr}) - \frac{P}{T} + \\ &\beta C_c^{\mathrm T}C_c + \beta(I+TA_c)^{\mathrm T}PG(\gamma_1^2 I - \\ &TG^{\mathrm T}PG)^{-1}G^{\mathrm T}P(I+TA_c) < 0\end{aligned} \tag{21}$$

和 $\gamma_1^2 I - TG^{\mathrm T}PG > 0$。令

$$P_1 = P/T,\quad B_1 = TB,\quad A_1 = A + BK$$

$$H_1 = TH,\quad N = E_a + E_bK$$

可将式(21) 改写为

$$\begin{aligned}&[(I+TA_c)^{\mathrm T}M - a_1P_1]M^{-1}[M(I+ \\ &TA_c) - a_1P_1] + W < 0\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}W = &(a_1^2 - r^2T^2)P_1 + \theta^2 C_c^{\mathrm T}C_c - \\ &a_1^2P_1M^{-1}P_1 < 0\end{aligned}$$

M 由式(19) 定义。

以下与文献[7] 中定理 1 的证明过程类似, 详见文献[9]。

2) 充分性。假定存在常数 $\epsilon>0$ 和矩阵 $P>0$, 使得式(17) 和(18) 成立。对不确定系统(1), 引入式(20) 的状态反馈控制, 则闭环方程为

$$\begin{cases}\delta x(t) = A_sx(t) + Gw(t)\\ z(t) = C_sx(t)\end{cases} \tag{22}$$

其中

$$A_s = A + HFE_a - (B + HFE_b)V^{-1}U$$

$$C_s = C - DV^{-1}U$$

引入记号 $A_{s1} = A - BV^{-1}U, N_1 = E_a - E_bV^{-1}U$, 则 $A_s = A_{s1} + HFN_1$。

考虑下式并利用引理 3, 有

$$\begin{aligned}&(I+TA_s)^{\mathrm T}M(I+TA_s) - \\ &a_1(I+TA_s)^{\mathrm T}P_1 - a_1P_1(I+TA_s) = \\ &-a_1^2P_1M^{-1}P_1 + [(I+TA_{s1})^{\mathrm T}M - \\ &a_1P_1 + (MH_1FN_1)^{\mathrm T}]M^{-1}[M(I+ \\ &TA_{s1}) - a_1P_1 + MH_1FN_1] \le \\ &[(I+TA_{s1})^{\mathrm T}M - a_1P_1]S^{-1}[M(I+ \\ &TA_{s1}) - a_1P_1] - a_1^2P_1M^{-1}P_1 + \epsilon N_1^{\mathrm T}N_1\end{aligned}$$

进一步得

$$\begin{aligned}&(I+TA_s)^{\mathrm T}M(I+TA_s) - a_1(I+ \\ &TA_s)^{\mathrm T}P_1 - a_1P_1(I+TA_s) + \\ &(a_1^2 - r^2T^2)P_1 + \theta^2C_s^{\mathrm T}C_s \le \\ &(a_1^2 - r^2T^2)P_1 + \theta^2C_s^{\mathrm T}C_s + \epsilon E_a^{\mathrm T}E_a - \\ &a_1^2P_1M^{-1}P_1 + [(I+TA)^{\mathrm T}M - \\ &a_1P_1]S^{-1}[M(I+TA) - \\ &a_1P_1] - U^{\mathrm T}V^{-1}U\end{aligned}$$

由式(17) 可知

$$\begin{aligned}&(I+TA_s)^{\mathrm T}M(I+TA_s) - \\ &a_1(I+TA_s)^{\mathrm T}P_1 - a_1P_1(I+TA_s) + \\ &(a_1^2 - r^2T^2)P_1 + \theta^2C_s^{\mathrm T}C_s < 0\end{aligned}$$

上式等价于

$$\begin{aligned}&(I+TA_{sr})^{\mathrm T}\frac{P}{T}(I+TA_{sr}) - \frac{P}{T} + \\ &\beta C_s^{\mathrm T}C_s + \beta(I+TA_s)^{\mathrm T}PG(\gamma_1^2 I - \\ &TG^{\mathrm T}PG)^{-1}G^{\mathrm T}P(I+TA_s) < 0\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $A_{sr} = \dfrac{A_s - aI - (1/T)I}{rT}$。由定义 1 可知不确定系统(1) 是二次可 D 镇定的且满足 H_∞ 范数界约束。□

由定理 1 和定理 2, 可以得到 Delta 算子系统的多目标鲁棒 H_∞ 控制的设计步骤和算法如下:

1) 选择 T 和 ϵ 的初值, 一般取 $\epsilon = 10, 0 < T < 1$;

2) 判定是否存在正定解,使矩阵不等式(17)和(18)成立,若有解则由式(20)定义的状态反馈控制,可使Delta算子系统(5)鲁棒二次D镇定且满足H_∞性能约束,算法结束;若无解则进行下一步;

3) 令$\epsilon = \epsilon/2$,转2),若ϵ小于给定的计算精度时,式(17)仍无解,表明该算法失效,Delta算子系统(5)将不能实现多指标综合控制。

上述综合算法可用MATLAB的鲁棒工具箱进行求解,设计举例从略。

推论1 对于Delta算子系统(1),若无极点配置约束,即取$D(a,r) = D(-1/T, 1/T)$时,有$A_{cr} = A_c$,$\beta = 1$,代入式(10),得

$$(I + TA_c)^{\mathrm{T}} \frac{P}{T}(I + TA_c) - \frac{P}{T} + C_c^{\mathrm{T}} C_c + (I + TA_c)^{\mathrm{T}} PG(\gamma_1^2 I - TG^{\mathrm{T}} PG)^{-1} G^{\mathrm{T}} P(I + TA_c) < 0$$

根据Delta算子界实引理1,此时闭环不确定系统(5)稳定且满足$\| T_{wz}(\gamma) \|_\infty \leq \gamma_1$。由此可得到Delta算子不确定系统的鲁棒$H_\infty$控制结果。

推论2 对于Delta算子系统(1),若无H_∞范数界约束,即取$\beta = 0$,代入式(10),得

$$(I + TA_{cr})^{\mathrm{T}} \frac{P}{T}(I + TA_{cr}) - \frac{P}{T} < 0$$

控制目标为闭环不确定系统(5)稳定且满足闭环极点约束$\lambda(A_c) \subset D(a,r)$。由此可导出Delta算子不确定系统的鲁棒区域极点配置方法。

4 结 论

本文通过引入Delta算子系统具有H_∞范数界鲁棒二次D镇定的概念,研究了Delta算子描述的离散不确定系统具有H_∞性能约束的鲁棒区域极点配置问题。基于矩阵不等式方法,提出了Delta算子不确定系统的多目标鲁棒二次镇定的充要条件和状态反馈鲁棒H_∞设计方法。在采样周期趋近于零时,可得到连续系统的鲁棒镇定与H_∞控制的相关结果。

参考文献(References):

[1] Yuan L, Achenie L E K, Jiang W. Robust H_∞ control for linear discrete-time systems with norm-bounded time-varying uncertainty[J]. *Systems & Control Letters*, 1996, 27(4): 199-208.

[2] Xu S, Yang C, Zhou S. Robust H_∞ control for uncertain discrete-time systems with circular pole constraints[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(1): 13-18.

[3] Middleton R H, Goodwin G C. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1986, 31(11): 1015-1021.

[4] 张端金,杨成梧.反馈控制系统Delta算子理论的研究与发展[J].控制理论与应用,1998,15(2):153-160.
(Zhang D J, Yang C W. Delte operator theory for feedback systems — A survey[J]. *Control Theory and Applications*, 1998, 15(2): 153-160.)

[5] 张端金,杨成梧,吴捷.Delta算子系统的鲁棒性能分析[J].自动化学报,2000,26(6):848-852.
(Zhang D J, Yang C W, Wu J. Robust performance analysis of delta operator system[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(6): 848-852.)

[6] 张端金,吴捷,杨成梧.Delta算子系统圆形区域极点配置的鲁棒性[J].控制与决策,2001,16(3):337-340.
(Zhang D J, Wu J, Yang C W. Robustness of pole assignment in a circular region for Delta operator systems[J]. *Control and Decision*, 2001, 16(3): 337-340.)

[7] 张端金,吴捷,杨成梧.Delta算子系统的状态反馈鲁棒镇定与鲁棒H_∞控制[J].控制理论与应用,2001,18(5):732-736.
(Zhang D J, Wu J, Yang C W. Robust stabilization and robust H_∞ control of delta operator system via state feedback[J]. *Control Theory and Applications*, 2001, 18(5): 732-736.)

[8] Shor M H, Perkins W R. Reliable control in the presence of sensor/actuator failures: A unified discrete/continuous approach[A]. *Proc of the 30th IEEE Conf on Decision and Control*[C]. Brighton, 1991. 1601-1606.

[9] 张端金.基于Delta算子的高速自适应信号处理与鲁棒控制研究[R].广州:华南理工大学,2001.

[10] Xie L, De Souza C E. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-vary uncertainty[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1188-1191.

[11] De Souza C E, Fu M, Xie L. H_∞ analysis and synthesis of discrete-time systems with time-varying uncertainty[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(3): 459-462.