第 18 卷 第 3 期 控 制 与 决 策 2003 年 5 月
Vol. 18 No. 3 Control and Decision May 2003

文章编号: 1001-0920(2003) 03-0320-04

基于 LMI 的广义系统混合 H_2/H_∞ 优化控制

杨冬梅[1], 张庆灵[1], 沙成满[2]
(1. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 东北大学 资源与土木工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 研究了广义线性系统的混合 H_2/H_∞ 状态反馈优化控制问题。设计一个混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器, 在满足闭环系统的容许性及 H_∞ 范数界的同时使得 H_2 范数极小。利用线性矩阵不等式(LMI)方法得到该控制器存在的一个充分条件, 并且给出闭环系统 H_2 范数的极小上界。

关键词: 广义系统; H_2/H_∞ 控制; LMI
中图分类号: TP13 文献标识码: A

LMI-based mixed H_2/H_∞ optimal control for descriptor systems

YANG Dong-mei[1], ZHANG Qing-ling[1], SHA Cheng-man[2]
(1. School of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Resources and Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: The problem of mixed H_2/H_∞ state feedback optimal control for linear descriptor systems is studied. A mixed H_2/H_∞ state feedback controller is designed to minimize the H_2 norm of the closed-loop system subject to admissibility of the closed-loop system and a H_∞ norm constraint. A sufficient condition for the existence of the controller is presented using linear matrix inequality (LMI) approach, and the minimal upper bound of the H_2 norm of the closed-loop system is given.

Key words: Descriptor systems; H_2/H_∞ control; LMI

1 引 言

在现代控制理论中, 混合 H_2/H_∞ 优化控制问题的主要任务是: 在保证一个传递函数的 H_∞ 范数受限的同时, 极小化另一传递函数的 H_2 范数。它将 H_2 性能设计与 H_∞ 性能设计相结合, 使闭环系统一方面获得优良的调节性能, 另一方面又具有较好的鲁棒性, 具有广泛的实际意义。自 1989 年 Bernstein 等人首次提出混合 H_2/H_∞ 控制问题, 该问题就以其良好的实际应用前景而成为优化控制领域的一个热点问题, 并取得了一些令人瞩目的研究成果[1~4]。但对于广义系统的混合 H_2/H_∞ 优化控制问题的研究至今仍是空白。

本文基于 LMI 方法进行了广义线性系统的混合 H_2/H_∞ 次优控制问题的研究。提出了一个混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器设计方法, 即在满足闭环系统的容许性及 H_∞ 范数界的同时, 极小化 H_2 范数的上界。给出该控制器存在的一个 LMIs 的充分条件及 H_2 范数的极小上界。特别在 H_2 范数的分析中, 克服了文献[5] 中 $\mathrm{Ker}(E) \subseteq \mathrm{Ker}(C)$ 的限制条件, 改进为广义系统的传递函数严格为真的这个必要条件。最后通过算例进一步说明本文的设计方法。

2 问题描述及预备结果

考虑如下的广义线性系统

收稿日期: 2002-03-05; 修回日期: 2002-07-01。
基金项目: 辽宁省教育科学基金资助项目(991121118)。
作者简介: 杨冬梅(1966—), 女, 辽宁沈阳人, 副教授, 博士, 从事广义系统的 H_2/H_∞ 优化控制理论及应用研究; 张庆灵(1956—), 男, 辽宁营口人, 教授, 博士生导师, 从事广义系统的鲁棒控制与分散控制等研究。

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z_\infty(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \\ z_2(t) = C_2x(t) + D_2u(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态; $w(t) \in R^m$, $u(t) \in R^q$ 分别为干扰和控制输入; $z_\infty \in R^p$, $z_2 \in R^l$ 为被调输出; $E \in R^{n\times n}$, $A \in R^{n\times n}$, B_i, C_i, D_i, $i = 1, 2$ 均为适维常数矩阵, 一般地, E 为奇异阵。为确保广义系统解的存在性和唯一性, 本文总假定其是正则的。

基于状态反馈的混合 H_2/H_∞ 控制器描述如下

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in R^{q\times n} \tag{2}$$

系统(1) 在控制器(2) 作用下形成的闭环系统为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A_kx(t) + B_1w(t) \\ z_\infty(t) = C_{k1}x(t) \\ z_2(t) = C_{k2}x(t) \end{cases} \tag{3}$$

其中: $A_k = A + B_2K$, $C_{k1} = C_1 + D_1K$, $C_{k2} = C_2 + D_2K$。

混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制问题是寻找一个可容许的控制器(2), 使得: 1) 闭环系统是容许的, 即稳定且无脉冲; 2) 从 w 到 z_∞ 的闭环传递函数 $T_{z_\infty w}(s)$ 的 H_∞ 范数小于一个给定的正常数 γ, 即 $\|T_{z_\infty w}(s)\|_\infty < \gamma$; 3) 从 w 到 z_2 的闭环传递函数 $T_{z_2w}(s)$ 的 H_2 范数最小, 即 $\min\|T_{z_2w}(s)\|_2$。

当系统(3) 正则时, 存在非奇异矩阵 P 和 Q 使得

$$\begin{cases} PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PA_kQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \\ PB_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad C_{k2}Q = [C_{21} \quad C_{22}] \\ Q^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4}$$

其中: $A_1 \in R^{r\times r}$, $N \in R^{(n-r)\times(n-r)}$ 是指数为 h 的幂零阵且 $N^{h-1} \neq 0$, $N^h = 0$。

引理 1　闭环传递函数 $T_{z_2w}(s)$ 是严格真的, 即 $T_{z_2w}(\infty) = 0$ 的充要条件是

$$C_{22}N^iB_{12} = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, h-1$$

证明略。

注 1　假设系统(3) 是容许的, 则文献[5] 中, $\mathrm{Ker}(E) \subseteq \mathrm{Ker}(C_{k2}) \Leftrightarrow C_{22} = 0$; 而本文中 $T_{z_2w}(s)$ 是严格真的 $\Leftrightarrow C_{22}B_{12} = 0$; 因此, 条件"$\mathrm{Ker}(E) \subseteq \mathrm{Ker}(C_{k2})$"是条件"$T_{z_2w}(s)$ 是严格真的"一个特例。

引理 2[6]　(E, A_k) 是容许的充要条件是存在解 X 满足

$$\begin{cases} A_k^\mathrm{T}X + X^\mathrm{T}A_k < 0 \\ E^\mathrm{T}X = X^\mathrm{T}E \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

引理 3[6]　系统(3) 是容许的且 $\|T_{z_\infty w}(s)\|_\infty < \gamma$ 的充要条件是存在矩阵 $X \in R^{n\times n}$ 满足

$$\begin{cases} A_k^\mathrm{T}X + X^\mathrm{T}A_k + C_{k1}^\mathrm{T}C_{k1} + \frac{1}{\gamma^2}X^\mathrm{T}B_1B_1^\mathrm{T}X < 0 \\ E^\mathrm{T}X = X^\mathrm{T}E \geq 0 \end{cases}$$

引理 3 等价于下面的引理 4。

引理 4　系统(3) 是容许的且 $\|T_{z_\infty w}(s)\|_\infty < \gamma$ 的充要条件是存在矩阵 $X \in R^{n\times n}$ 满足

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_k^\mathrm{T}X + X^\mathrm{T}A_k & C_{k1}^\mathrm{T} & X^\mathrm{T}B_1 \\ C_{k1} & -I & 0 \\ B_1^\mathrm{T}X & 0 & -\gamma^2I \end{bmatrix} < 0 \\ E^\mathrm{T}X = X^\mathrm{T}E \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

引理 5[7]　设(E, A_k) 是容许的, 矩阵 $M \geq 0$。如果 X 满足方程

$$\begin{cases} A_k^\mathrm{T}X + X^\mathrm{T}A_k + M = 0 \\ E^\mathrm{T}X = X^\mathrm{T}E \end{cases} \tag{7}$$

则有 $E^\mathrm{T}X \geq 0$。

3　混合 H_2/H_∞ 性能分析

记 $\bar{B} = QPB_1$, P, Q 如式(4) 所描述。

引理 6　设(E, A_k) 是容许的且传递函数 $T_{z_2w}(s)$ 是严格真的。则 $T_{z_2w}(s)$ 的 H_2 范数为

$$\|T_{z_2w}(s)\|_2^2 = \mathrm{trace}(\bar{B}^\mathrm{T}E^\mathrm{T}X\bar{B})$$

其中 X 满足如下广义 Lyapunov 方程

$$\begin{cases} A_k^\mathrm{T}X + X^\mathrm{T}A_k + C_{k2}^\mathrm{T}C_{k2} = 0 \\ E^\mathrm{T}X = X^\mathrm{T}E \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

证明　由式(4) 得

$$g(t) = L^{-1}\{T_{z_2w}(s)\} =$$

$$C_{k2}Q\begin{bmatrix} L^{-1}\{(sI_r - A_1)^{-1}\} & 0 \\ 0 & L^{-1}\{(sN - I_{n-r})^{-1}\} \end{bmatrix}PB_1 =$$

$$[C_{21} \quad C_{22}]\begin{bmatrix} e^{A_1t} & 0 \\ 0 & -\sum_{i=0}^{h-1}\delta^{(i)}(t)N^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} =$$

$$C_{21}e^{A_1t}B_{11} - \sum_{i=0}^{h-1}\delta^{(i)}(t)N^iB_{12}$$

又 $T_{z_2w}(s)$ 是严格真的, 由引理 1 得

$$g(t) = C_{21}e^{A_1t}B_{11}$$

进而由(E, A_k) 稳定得 A_1 稳定, 于是

$$\|T_{z_2w}(s)\|_2^2 = \mathrm{trace}\{\int g^\mathrm{T}(t)g(t)\mathrm{d}t\} =$$

$$\mathrm{trace}\{B_{11}^\mathrm{T}(\int e^{A_1^\mathrm{T}t}C_{21}^\mathrm{T}C_{21}e^{A_1t}\mathrm{d}t)B_{11}\} =$$

$$\mathrm{trace}(B_{11}^\mathrm{T}RB_{11})$$

其中 $R = \int^{\infty} e^{A_1^{\mathrm{T}} t} C_{21}^{\mathrm{T}} C_{21} e^{A_1 t} \mathrm{d}t \geq 0$。

设 $X = P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} Q^{-1}$ 为方程(8) 的任意一个解,代入方程(8) 且由式(4) 得

$$\begin{cases} A_1^{\mathrm{T}} X_1 + X_1^{\mathrm{T}} A_1 + C_{21}^{\mathrm{T}} C_{21} = 0 \\ X_1 \geq 0, X_2 = 0, X_3 = -C_{22}^{\mathrm{T}} C_{21} \\ X_4 + X_4^{\mathrm{T}} = -C_{22}^{\mathrm{T}} C_{22} \end{cases}$$

由 A_1 稳定得 $X_1 = R$。于是方程的解

$$X = P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} R & 0 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

必存在。进而有

$$\begin{aligned} &\| T_{z_2 w}(s) \|_2^2 = \\ &\mathrm{trace}\left([B_{11}^{\mathrm{T}} \quad B_{12}^{\mathrm{T}}] \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} R & 0 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} \right) = \\ &\mathrm{trace}(B_1^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} P^{-\mathrm{T}} X Q P B_1) = \\ &\mathrm{trace}(\bar{B}^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} X \bar{B}) \end{aligned}$$

注 2 由引理 6 的证明易知: $T_{z_2 w}(s)$ 为严格真是 $\| T_{z_2 w}(s) \|_2$ 存在且有限的必要条件。

定理 1 设 $T_{z_2 w}(s)$ 是严格真的。如果存在矩阵 $X \in R^{n \times n}$ 及 $Y \in R^{m \times m}$ 满足

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_k^{\mathrm{T}} X + X^{\mathrm{T}} A_k & C_{k2}^{\mathrm{T}} \\ C_{k2} & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} E^{\mathrm{T}} X & X^{\mathrm{T}} E \bar{B} \\ \bar{B}^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} X & Y \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

则系统(3) 是容许的且 $\| T_{z_2 w}(s) \|_2^2 \leq \mathrm{trace}(Y)$。

证明 由式(9) 得

$$\begin{cases} A_k^{\mathrm{T}} X + X^{\mathrm{T}} A_k < 0 \\ E^{\mathrm{T}} X = X^{\mathrm{T}} E \geq 0 \end{cases}$$

则由引理 2 知系统(3) 是容许的。

设矩阵 S 满足方程(8) 且记 $\Delta = X - S$,于是

$$\| T_{z_2 w}(s) \|_2^2 = \mathrm{trace}(\bar{B}^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} S \bar{B}) \tag{10}$$

由式(9) 得

$$\begin{cases} A_k^{\mathrm{T}} X + X^{\mathrm{T}} A_k + C_{k2}^{\mathrm{T}} C_{k2} < 0 \\ E^{\mathrm{T}} X = X^{\mathrm{T}} E \geq 0 \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} A_k^{\mathrm{T}} \Delta + \Delta^{\mathrm{T}} A_k < 0 \\ E^{\mathrm{T}} \Delta = \Delta^{\mathrm{T}} E \end{cases}$$

由引理 5 得 $E^{\mathrm{T}} \Delta \geq 0$,即 $E^{\mathrm{T}} S \leq E^{\mathrm{T}} X$。结合式(9) 和式(10) 得

$$\| T_{z_2 w}(s) \|_2^2 \leq \mathrm{trace}(\bar{B}^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} X \bar{B}) \leq \mathrm{trace}(Y)$$

结论得证。□

4 H_2/H_∞ 状态反馈控制器设计

由上述讨论可知,混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制问题等价于寻找一个状态反馈增益 K,使矩阵 X, Y 及 K 满足式(6) 和式(9),且能极小化 $\| T_{z_2 w}(s) \|_2^2$ 的上界 $\mathrm{trace}(Y)$。

定理 2 考虑系统(1)。如果存在矩阵 $X \in R^{n \times n}$(X 非奇异),$L \in R^{q \times n}$ 及 $Y \in R^{m \times m}$ 满足如下 LMIs

$$\begin{cases} \Phi(\gamma; X, L) = \\ \begin{bmatrix} AX + B_2 L + (AX + B_2 L)^{\mathrm{T}} & (C_1 X + D_1 L)^{\mathrm{T}} & B_1 \\ C_1 X + D_1 L & -I & 0 \\ B_1^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \\ \Psi(X, L) = \\ \begin{bmatrix} AX + B_2 L + (AX + B_2 L)^{\mathrm{T}} & (C_2 X + D_2 L)^{\mathrm{T}} \\ C_2 X + D_2 L & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} EX & E\bar{B} \\ \bar{B}^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} & Y \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \tag{11}$$

使得 $(E, A + B_2 L X^{-1}, B_1, C_2 + D_2 L X^{-1})$ 是严格真的且 $\mathrm{trace}(Y)$ 最小,即 $\min\{\mathrm{trace}(Y)\}$,其中 $\bar{B} = QPB_1$,非奇异矩阵 P, Q 使 $(E, A + B_2 L X^{-1})$ 有如式(4) 的分解,则系统(1) 存在混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器(2);若式(11) 的最优解为 (X^*, Y^*, L^*),则相应的混合 H_2/H_∞ 控制器

$$K^* = L^* (X^*)^{-1} \tag{12}$$

从而使

$$\| T_{z_\infty w}(s) \|_\infty < \gamma, \quad \| T_{z_2 w}(s) \|_2 \leq \sqrt{\mathrm{trace}(Y^*)}$$

证明 假设式(11) 成立,且设控制器 $K = LX^{-1}$ 及 $V = X^{-1}$,则 $A_k = A + B_2 L X^{-1}$,于是有

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Phi(\gamma; X, L) \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} A_k^{\mathrm{T}} V + V^{\mathrm{T}} A_k & C_{k1}^{\mathrm{T}} & V^{\mathrm{T}} B_1 \\ C_{k1} & -I & 0 \\ B_1^{\mathrm{T}} V & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \\ &\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi(X, L) \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} A_k^{\mathrm{T}} V + V^{\mathrm{T}} A_k & C_{k2}^{\mathrm{T}} \\ C_{k2} & -I \end{bmatrix} < 0 \\ &\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} EX & E\bar{B} \\ \bar{B}^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} & E\bar{B} \\ \bar{B}^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} E^{\mathrm{T}} V & V^{\mathrm{T}} E \bar{B} \\ \bar{B}^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} V & Y \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

即存在矩阵 V, Y 满足式(6) 和式(9), 于是结论成立。□

5　仿真算例

设系统(1) 的系数矩阵为

$$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}10&2\\0&1\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix},\quad C_1=[10\quad 1],\quad C_2=[-1\quad 0]$$

$$D_1=0.4,\quad D_2=0.5$$

如果取 $\gamma=0.5$, 求得式(11) 的最优解为

$$X^*=\begin{bmatrix}0.6046&0\\18.0080&0.3852\end{bmatrix},\quad Y^*=1.6545$$

$$L^*=[-43.4031\quad -2.0475]$$

且

$$P=\begin{bmatrix}1&-11.8539\\0&-0.2317\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1&0\\20.0523&1\end{bmatrix}$$

状态反馈增益为

$$K^*=[86.5324\quad -5.3153]$$

使得闭环系统 (E, A_k) 是容许的, $T_{z_2w}(s)$ 是严格真的 $\left(\text{其中 } A_k=\begin{bmatrix}875.3244&-51.1534\\86.5324&-4.3153\end{bmatrix}\right)$ 且

$$\|T_{z_\infty w}(s)\|_\infty<0.5,\quad \|T_{z_2w}(s)\|_2\le 1.2863$$

如果取 $\gamma=1$, 则有

$$X^*=\begin{bmatrix}0.6165&0\\-2.8938&-0.9717\end{bmatrix}$$

$$L^*=[-5.9978\quad 0.3976]$$

$$Y^*=1.6228,\quad K^*=[86.5324\quad -5.3153]$$

且

$$\|T_{z_\infty w}(s)\|_\infty<1,\quad \|T_{z_2w}(s)\|_2\le 1.2739$$

6　结　　语

本文主要研究广义线性系统的混合 H_2/H_∞ 次优控制问题, 给出 H_2/H_∞ 状态反馈控制器的一个 LMI 设计方法, 使得闭环系统在满足 H_∞ 次优性能的前提下极小化 H_2 范数的上界。并通过算例对本文的设计方法作了进一步说明。

参考文献(References):

[1] Bernstein D S, Haddad W M. LQG control with an H_∞ performance bound: A Riccati equation approach[J]. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1989, 34(4): 293-305.

[2] Khargonekar P P, Rotea M A. Mixed H_2/H_∞ control: A convex optimization approach[J]. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1991, 36(8): 824-837.

[3] Chilali M, Gahinet P. H_∞ design with pole placement constrains: An LMI approach[J]. *IEEE Trans on Autom Contr*, 1996, 41(3): 358-367.

[4] Halder B, Kailath T. LMI based design of mixed H_2/H_∞ controllers: The state feedback case[A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. American, 1999. 1866-1870.

[5] Takaba K. Robust H_2 control of descriptor system with time-varying uncertainty[J]. *Int J Control*, 1998, 71(4): 559-579.

[6] Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, et al. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach[J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669-673.

[7] Xin X, Mita T. On the strong solutions of generalized algebraic Riccati equations[A]. 1998 *SICE*[C]. Chiba, 1998. 791-797.

(上接第 319 页)

参考文献(References):

[1] 约翰 H 霍兰德. 隐秩序[M]. 上海: 上海科技教育出版社(中译本), 2000. 11-12.

[2] Eric Bonabeau, Guy Theraulaz. Swarm smarts[J]. *Scientific American*, 2000, 282(3): 72-79.

[3] Marco Dorigo, Vittorio Maniezzo, Alberto Colorni. The ant system: Optimization by a colony of cooperation agents[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics—Part B*, 1996, 26(1): 1-13.

[4] 史忠植. 智能主体及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2000.

[5] H 哈肯. 协同学引论[M]. 北京: 原子能出版社(中译本), 1984.