文章编号: 1001-0920(2003) 03-0328-04

广义系统 Wiener 状态滤波新算法

许 燕[1], 邓自立[2]
(1. 北京印刷学院 基础部, 北京 102600; 2. 黑龙江大学 自动化系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 应用时域上的现代时间序列分析方法, 基于 ARMA 新息模型和白噪声估计理论, 由一种新的非递推最优状态估值器的递推变形, 提出了广义系统 Wiener 状态滤波的一种新算法, 它可统一处理滤波、平滑和预报问题, 且具有渐近稳定性。同某些算法相比, 它避免了求解 Riccati 方程和 Diophantine 方程, 且避免了计算伪逆, 因而减小了计算负担。仿真例子说明了其有效性。

关键词: 广义系统; Wiener 状态估值器; 滤波; 平滑; 预报; 现代时间序列分析方法
中图分类号: O211.64 文献标识码: A

New algorithm to Wiener state filtering for descriptor systems

XU Yan[1], DENG Zi-li[2]
(1. Basic Department, Beijing Institute of Graphic Communtication, Beijing 102600, China;
2. Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

Abstract: A new algorithm to Wiener state filtering for descriptor systems is presented by using the modern time-series analysis method in the time domain. The algorithm is based on the autoregressive moving average (ARMA) innovation model and white noise estimation theory, and exploits a recursive version of a new non-recursive optimal state estimators. It can handle the filtering, smoothing and prediction problems in a unified framework, and has the asymptotic stability. Compared with some existing algorithms, it avoids solving the Riccati equations and Diophantine equations, and avoids the calculation of the pseudo-inverse, which reduces the computational burden. A simulation example shows its effectiveness.

Key words: Descriptor systems; Wiener state estimator; Filtering; Smoothing; Prediction; Modern time-series analysis method

1 引 言

广义系统在电网络、经济、机器人等领域经常遇到, 因而受到人们普遍的关注。用经典 Kalman 滤波方法处理广义系统状态估计问题的缺点是: 要求解广义 Riccati 方程, 计算负担较大, 且不能统一处理滤波、平滑和预报问题[1]。为此, 文献[2～4]用现代时间序列分析方法提出了广义 Kalman 估值器, 可统一处理滤波、平滑和预报问题, 且避免了求解 Riccati 方程。但其缺点是: 对不稳定系统, 广义 Kalman 估值器是非渐近稳定的。要保证其渐近稳定性, 要求计算最优初始状态估值[2,3]或将不稳定系统变换为稳定系统[4], 增加了计算负担。用频域上的 Wiener 滤波方法处理常规系统状态估计问题要求解 Diophantine 方程[5], 且目前尚不能解决广义系统状态估计问题。文献[2,6,7]用时域 Wiener 滤波方法提出的 Wiener 状态滤波器要求计算矩阵的伪逆, 计算

收稿日期: 2002-01-21; 修回日期: 2002-04-16。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69774019); 黑龙江省自然科学基金资助项目(F01-15)。
作者简介: 许燕(1965—), 女, 黑龙江虎林人, 副教授, 从事状态估计研究; 邓自立(1938—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 教授, 从事最优滤波、状态估计等研究。

负担较大。

本文用现代时间序列分析方法[8],基于ARMA新息模型和白噪声估值器,提出了广义Wiener状态估值器的一种新算法,克服了上述缺点。它可统一处理滤波、平滑和预报问题,且避免了求解Riccati方程和Diophantine方程。它具有以观测信号作为输入的ARMA递推表达式,且具有渐近稳定性。避免了计算伪逆或最优初始状态估值,减小了计算负担。

考虑离散时间广义线性随机系统

$$Mx(t+1)=\Phi x(t)+\Gamma w(t) \tag{1}$$

$$y(t)=Hx(t)+v(t) \tag{2}$$

其中:状态 $x(t)\in R^n$,观测 $y(t)\in R^m$,$w(t)\in R^r$,$v(t)\in R^m$;M,Φ,Γ,H 为常阵。

假设1 M 是奇异方阵,即 $\det(M)=0$。

假设2 系统是正则的,即对任意复数 z,$\det(zM-\Phi)\neq 0$。

假设3 系统是完全可观的,即对任意复数 z,有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} zM-\Phi \\ H\end{bmatrix}=n,\quad \mathrm{rank}\begin{bmatrix} M \\ H\end{bmatrix}=n \tag{3}$$

假设4 $w(t)$ 和 $v(t)$ 是零均值相关白噪声

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^{\mathrm T}(j) & v^{\mathrm T}(j)\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^{\mathrm T} & Q_v\end{bmatrix}\delta_{tj} \tag{4}$$

其中:E 为数学期望,T 为转置号,$\delta_{tt}=1$,$\delta_{tj}=0(t\neq j)$。

Wiener 状态滤波问题是:基于观测$(y(t+N),y(t+N-1),\cdots)$求状态$x(t)$的稳态最优(即线性最小方差)估值器$\hat{x}(t|t+N)$,它具有以观测$y(t+N)$作为输入的传递矩阵形式,或具有以观测$y(t+N)$作为输入的ARMA递推滤波器形式。对于$N=0$,$N>0$或$N<0$,分别称其为Wiener状态滤波器,平滑器或预报器。

2 ARMA 新息模型

由式(1)和(2)可得

$$y(t)=H(M-q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1}w(t)+v(t) \tag{5}$$

其中q^{-1}为单位滞后算子。引入左素分解

$$H(M-q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1}=A^{-1}Bq^{\tau} \tag{6}$$

其中:A 和 B 为形如

$$X=X(q^{-1})=X_0+X_1q^{-1}+\cdots+X_{n_x}q^{-n_x}$$

的多项式矩阵,X_i 为系数矩阵,n_x 为 X 的阶次,即 $\deg(X)=n_x$,规定$X_i=0(i>n_x)$,且$A_0=I_m$,$B_0\neq 0$,τ为整数。

将式(6)代入式(5),有ARMA新息模型

$$Ay(t)=D\epsilon(t) \tag{7}$$

$$D\epsilon(t)=Bq^{\tau}w(t)+Av(t) \tag{8}$$

其中:D 是稳定的多项式矩阵,$D_0=I_m$,$\epsilon(t)\in R^m$ 是零均值、方差阵为 Q_ϵ 的白噪声。D 和 Q_ϵ 可由Gevers和Wouters算法[8]求得。新息$\epsilon(t)$可取初值$(\epsilon(0),\cdots,\epsilon(n_d-1))$由式(7)递推计算,即

$$\epsilon(t)=Ay(t)-D_1\epsilon(t-1)-\cdots-D_{n_d}\epsilon(t-n_d)$$

$$t=n_d,n_d+1,\cdots \tag{9}$$

3 引　　理

引理1[8] 系统(1)和(2)在假设1～4下,有Wiener滤波器形式的白噪声估值器

$$\begin{cases}\hat{w}(t|t+N)=L_N^w\tilde{A}\tilde{D}^{-1}y(t+N)\\ \hat{v}(t|t+N)=L_N^v\tilde{A}\tilde{D}^{-1}y(t+N)\end{cases} \tag{10}$$

其中:A 和 D 由式(7)定义,$\tilde{A}$ 和 $\tilde{D}$ 由如下右素分解

$$D^{-1}A=\tilde{A}\tilde{D}^{-1} \tag{11}$$

决定。带$\tilde{D}_0=I_m$,且对$N<-(\tau\vee 0)$,定义$L_N^w=0$,$L_N^v=0$;对$N\geq-(\tau\vee 0)$,定义

$$\begin{cases}L_N^w=\sum\limits_{i=-(\tau\vee 0)}^{N}\Pi_i^wQ_\epsilon^{-1}q^{i-N}\\ L_N^v=\sum\limits_{i=-(\tau\vee 0)}^{N}\Pi_i^vQ_\epsilon^{-1}q^{i-N}\end{cases} \tag{12}$$

并定义$(\tau\vee 0)=\max(\tau,0)$,且

$$\begin{cases}\Pi_i^w=Q_wF_{i+(\tau\vee 0)}^{\mathrm T}+SG_{i+(\tau\vee 0)}^{\mathrm T}\\ \Pi_i^v=Q_vG_{i+(\tau\vee 0)}^{\mathrm T}+S^{\mathrm T}F_{i+(\tau\vee 0)}^{\mathrm T}\end{cases} \tag{13}$$

其中 F_i 和 G_i 可递推计算为

$$\begin{cases}F_i=-D_1F_{i-1}-\cdots-D_{n_d}F_{i-n_d}+\bar{B}_i\\ F_i=0,\quad i<0\\ \bar{B}_i=0,\quad i>n_{\bar b}\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}G_i=-D_1G_{i-1}-\cdots-D_{n_d}G_{i-n_d}+\bar{A}_i\\ G_i=0,\quad i<0\\ \bar{A}_i=0,\quad i>n_{\bar a}\end{cases} \tag{15}$$

并定义

$$\bar{B}=Bq^{(\tau\wedge 0)},\quad \bar{A}=Aq^{(-\tau\wedge 0)}$$

$$(\tau\wedge 0)=\min(\tau,0)$$

$$(-\tau\wedge 0)=\min(-\tau,0)$$

引理2[9] 在假设1～3下,存在 $n\times m$ 矩阵K使

$$\det[M-q^{-1}(\Phi+KH)]=\gamma q^{-n}$$

$$\gamma\neq 0 \text{ 为常数} \tag{16}$$

用K左乘式(2)并与式(1)相加得

$$Mx(t+1)=(\Phi+KH)x(t)+\Gamma w(t)-Ky(t)+Kv(t)$$

$$x(t) = [M - q^{-1}(\Phi + KH)]^{-1}[\Gamma w(t-1) - Ky(t-1) + Kv(t-1)] \quad (17)$$

由式(16)和式(17)可引出如下引理:

引理 3 系统(1)和(2)在假设 1～4 下,有状态 $x(t)$ 的非递推表达式

$$x(t) = Rw(t+n-1) - Py(t+n-1) + Pv(t+n-1) \quad (18)$$

其中多项式矩阵 R 和 P 定义为

$$\begin{cases} R = \mathrm{adj}[M - q^{-1}(\Phi + KH)]\Gamma/\mathcal{Y} \\ P = \mathrm{adj}[M - q^{-1}(\Phi + KH)]K/\mathcal{Y} \end{cases} \quad (19)$$

adj A 表示 A 的伴随阵。

引理 4[8] Åström 最优观测预报器为

$$\hat{y}(t+i \mid t) = J_i \tilde{D}^{-1} y(t) \quad (20)$$

其中:$\tilde{A}$ 和 $\tilde{D}$ 由式(11)决定,J_i 由

$$\begin{cases} \tilde{D} = E_i \tilde{A} + q^{-i} J_i, & i > 0 \\ J_i = \tilde{D} q^i, & i \le 0 \end{cases} \quad (21)$$

决定。$\deg(E_i) = i-1$, $\deg(J_i) = \max(n_{\tilde{a}} - 1, n_{\tilde{d}} - i)$。

4 广义 Wiener 状态估值器

定理 1 系统(1)和(2)在假设 1～4 下,有渐近稳定的广义 Wiener 状态估值器

$$\hat{x}(t \mid t+N) = K_N \tilde{D}^{-1} y(t+N) \quad (22)$$

或表为

$$\det \tilde{D} \hat{x}(t \mid t+N) = K_N \,\mathrm{adj} \tilde{D} y(t+N) \quad (23)$$

其中多项式矩阵 K_N 为

$$K_N = \sum_{i=0}^{n_r} R_i L^w_{N-n+1+i} \tilde{A} - \sum_{i=0}^{n_p} P_i J_{n-1-i-N} + \sum_{i=0}^{n_p} P_i L^v_{N-n+1+i} \tilde{A} \quad (24)$$

或表为 ARMA 递推形式

$$\bar{D}_N \hat{x}(t \mid t+N) = \bar{K}_N y(t+N) \quad (25)$$

带左素分解

$$\bar{D}_N^{-1} \bar{K}_N = K_N \tilde{D}^{-1}, \quad \bar{D}_{N0} = I_n \quad (26)$$

证明 由式(18)和射影性质有非递推最优状态估值器

$$\hat{x}(t \mid t+N) = \sum_{i=0}^{n_r} R_i \hat{w}(t+n-1-i \mid t+N) - \sum_{i=0}^{n_p} P_i \hat{y}(t+n-1-i \mid t+N) + \sum_{i=0}^{n_p} P_i \hat{v}(t+n-1-i \mid t+N) \quad (27)$$

将式(10)和(20)代入(27)即得(22)～(24),引入左素分解(26)即得(25)。由 D 的稳定性和(11)引出 $\tilde{D}$ 是稳定的,由 $\tilde{D}$ 的稳定性和(26)引出 $\bar{D}$ 是稳定的,从而 Wiener 状态估值器(23)或(25)是渐近稳定的。 □

推论 1 单输出系统(1)和(2)在假设 1～4 下,有渐近稳定的广义 Wiener 状态估值器

$$D\hat{x}(t \mid t+N) = K_N y(t+N) \quad (28)$$

其中 K_N 由式(24)置 $\tilde{A} = A$ 计算。

证明 由 $m = 1$ 知 $D = \tilde{D}$,由式(22)引出(28)。 □

5 仿真例子

考虑带相关噪声的广义随机系统

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1 \quad 0] x(t) + v(t)$$

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$v(t) = 0.5 w(t) + \xi(t)$$

$w(t)$ 和 $\xi(t)$ 是零均值独立高斯白噪声,方差各为 $\sigma_w^2 = 1$, $\sigma_\xi^2 = 1$。容易求得 ARMA 新息模型为

$$(1 - 0.9q^{-1}) y(t) = (1 - 0.540\,5 q^{-1}) \epsilon(t)$$

其中 $\sigma_\epsilon^2 = 7.447\,1$,且有关系

$$(1 - 0.540\,5q^{-1}) \epsilon(t) = (2 - 0.8q^{-1}) w(t) + (1 - 0.9q^{-1}) v(t)$$

由引理 2 用比较系数法可求得 $K = [1 \ -0.5 \ \ 0]^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{Y} = -0.125$,易算得

$$R(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} q^{-1} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0.8 \\ -2 \end{bmatrix} q^{-2}$$

$$P(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} q^{-1} + \begin{bmatrix} -1 \\ -0.1 \\ -1 \end{bmatrix} q^{-2}$$

取 $N = 0$,由式(28)可得 Wiener 状态滤波器

$$(1 - 0.540\,5q^{-1}) \hat{x}(t \mid t) = K_0 y(t)$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.026\,5 \\ 0.697\,9 \\ 0.026\,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.335\,7 \\ -0.268\,6 \\ 0.335\,7 \end{bmatrix} q^{-1}$$

仿真结果见图 1～图 3,其中实线为 $x_i(t)$,虚线为 $\hat{x}_i(t \mid t)$, $i = 1, 2, 3$。

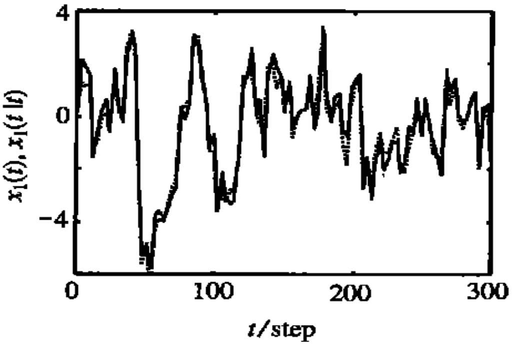

图 1　$x_1(t)$ 和广义 Wiener 滤波器 $\hat{x}_1(t|t)$

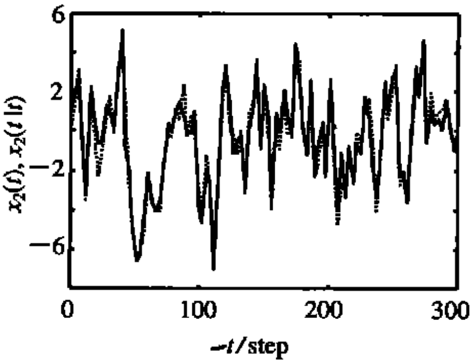

图 2　$x_2(t)$ 和广义 Wiener 滤波器 $\hat{x}_2(t|t)$

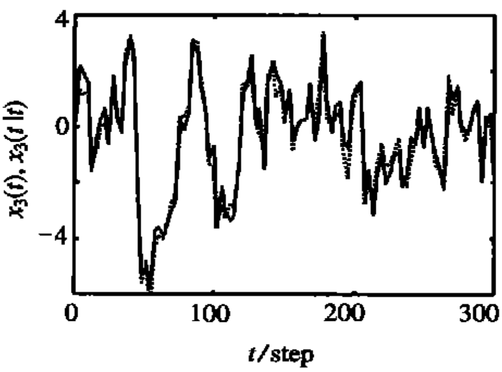

图 3　$x_3(t)$ 和广义 Wiener 滤波器 $\hat{x}_3(t|t)$

6　结　　论

本文运用现代时间序列分析方法, 首先将状态表示为白噪声和观测信号的线性组合, 进而由射影运算引出非递推最优状态估值器。基于 ARMA 新息模型和白噪声估值器, 由非递推最优状态估值器的递推变形, 提出了一种新的渐近稳定的广义 Wiener 状态估值器。它以观测信号作为输入, 可统一处理滤波、平滑和预报问题, 且避免了求解 Riccati 方程和 Diophantine 方程, 避免了计算伪逆或最优初始状态估值, 算法简单, 可减小计算负担, 便于应用。

参考文献(References):

[1] Nikoukhah R, Willsky A S, Bernard C L. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1992, 37(9): 1325-1341.

[2] 邓自立, 许燕. 广义系统 Wiener 滤波和 Kalman 滤波新方法[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(5): 634-638.
(Deng Z L, Xu Y. New approaches to Wiener filtering and Kalman filtering for descriptor systems[J]. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(5): 634-638.)

[3] Deng Z L, Liu Y M. Descriptor Kalman estimators[J]. *Int J Systems Science*, 1999, 30(11): 1205-1212.

[4] Zhang H S, Xie L H, Soh Y C. Optimal recursive filtering, prediction and smoothing for singular stochastic discrete-time systems[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1999, 44(11): 2154-2158.

[5] Grimble M J. H_2 inferential filtering, prediction and smoothing with application to rolling mill gauge estimation[J]. *IEEE Trans Sig Process*, 1994, 42(8): 2079-2093.

[6] Deng Z L, Xu Y. Descriptor Wiener state estimators [J]. *Automatica*, 2000, 36(11): 1761-1766.

[7] 邓自立, 许燕. 一种统一的 Wiener 状态估值器[J]. 信息与控制, 1998, 27(5): 336-341.
(Deng Z L, Xu Y. A unified Wierer state estimator [J]. *Information and Control*, 1998, 27(5): 336-341.)

[8] 邓自立. 最优滤波理论及其应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000.

[9] Dai L. Observers for discrete singular systems[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1988, 33(2): 187-191.