

文章编号: 1001-0920(2003)03-0281-04

## 挠性系统的鲁棒控制设计

王广雄, 张 静, 朱井泉

(哈尔滨工业大学 控制工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 提出一种新的鲁棒设计思想: 将挠性模态部分的 Nyquist 图线安排到右半平面。由于综合运用了频域分析、极点配置、正实性引理、线性矩阵不等式等概念和算法, 使得这种鲁棒控制设计得以实现, 且简单直观。通过两个算例说明了该设计方法的有效性。

**关键词:** 挠性系统; 鲁棒控制; 正实性; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

## Robust control design for flexible systems

WANG Guang-xiong, ZHANG Jing, ZHU Jing-quan

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** A new design strategy is presented to place the locus part of the flexible mode on the right-half Nyquist plane. This design goal is achieved by integrating various concepts and algorithms in control theory, including the frequency domain analysis, the pole placement, the Positive-Real Lemma and LMIs. The design method is simple and intuitive. Examples illustrate the validity of the design method.

**Key words:** Flexible system; Robust control; Positive realness; Linear matrix inequality

### 1 引言

挠性系统由于具有弱阻尼的谐振模态而不易控制, 尤其是当谐振频率  $\omega_0$  和阻尼比  $\xi$  等参数有摄动时, 控制系统的性能更不易保证, 这在经典控制的概念中, 需要在控制回路里加陷波滤波器。文献[1]用根轨迹对陷波滤波器的作用进行了分析, 这种陷波滤波器的参数一般是凭经验设计的。为能进行系统性设计, 文献[1]介绍了一种状态反馈加观测器的设计方法, 但最后的验证表明没有鲁棒性<sup>[1]</sup>。

本文介绍一种具有鲁棒性的设计方法, 这种方法综合运用了频域分析、极点配置、正实性引理、线性矩阵不等式(LMI)等概念和算法, 使得这种鲁棒设计简单且直观。

### 2 设计思想

设挠性系统的特性为<sup>[1]</sup>

$$G(s) = \frac{\omega_0^2(s/\omega_0 + 1)}{s^2(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)}, \quad \omega \gg \omega_0 \quad (1)$$

对于这种挠性系统, 如果能设法使由于弱阻尼形成的在跨越谐振频率  $\omega_0$  时的大幅值频率特性位于  $G(j\omega)$  的右半平面(图 1 实线), 就可保证系统的稳定性, 且具有很强的鲁棒性。这是因为  $\omega_0$  和  $\xi$  等参数变化时系统仍是稳定的, 且主导极点的相对于 -1 点的中频段频率特性是由控制器决定的, 不会随对象参数而变化。

从图 1 可看出, 如果  $\omega_0$  减小, 频率特性上的大幅值圆的起止频率点将沿着第三象限的频率特性向下移动, 如图 1 中虚线所示。所以如果能使与最小值

收稿日期: 2002-01-14; 修回日期: 2002-03-25。

基金项目: 教育部高校博士点基金资助项目(96021314)。

作者简介: 王广雄(1933—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事  $H_\infty$  控制理论及应用、高精度伺服系统设计等研究; 张静(1968—), 女, 黑龙江哈尔滨人, 副教授, 博士生, 从事鲁棒控制的研究。

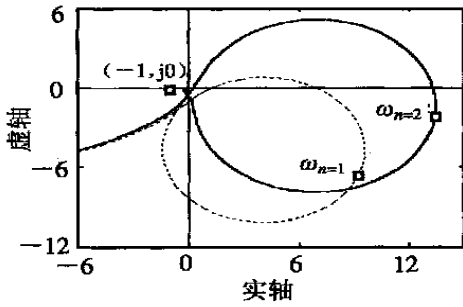


图 1 开环 Nyquist 曲线

$\omega$  对应的特性保证在图示虚线的位置上,那么扰动后( $\omega$  增大)系统的稳定性总是能保证的。

图 1 虚线所示的特性要求在  $\omega < \omega_n$  之前的中低频段的频率特性具有足够的相角裕度,即闭环系统的一对主导极点要有足够的阻尼。另外,由于有谐振特性,幅频特性在  $\omega$  处会有很大的峰值(超出单位圆),这虽然不影响稳定性,但闭环系统中会存在一对与  $\omega_n$  相当的极点。这对极点的阻尼比  $\xi$  是可以设计的,但如果要求其远离虚轴,控制输入  $u$  就会很大<sup>[2]</sup>,所以一般只要求能衰减,对阻尼比不作过高要求。

本文的设计思想是对这两对极点提出要求,而对其他高频模态不作严格限制。这两对极点如果能按上述思路配置,那么  $\omega_n = 1$  时的系统就会具有图 1 所示的频率特性,不仅稳定,而且对参数扰动具有鲁棒性。

### 3 设计方法

上面所说的设计思想可通过正实引理和正实函数的性质来实现。

**定义 1** 有理函数  $P(s)$  严格正实(SPR)是指

$$\operatorname{Re} P(s) > 0, \quad \text{当 } \operatorname{Re} s > 0 \quad (2)$$

设  $P(s)$  的状态空间实现是  $[A, B, C, D]$ , 则有如下正实引理:

**引理 1** 如果存在  $P = P^T > 0$ , 使下列不等式

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -(D + D^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

成立,则函数  $P(s)$  是严格正实的。

**引理 2** 如果  $P(s)$  的极点都在开左半平面,且是严格正实的,则  $P(s)$  的零点也都在开左半平面。

引理 1 是正实引理的线性矩阵不等式条件<sup>[3]</sup>,引理 2 则引自文献[4]。

设对象的传递函数为  $G(s)$ , 并设  $G(s)$  分母的阶次高于分子的阶次,将  $G(s)$  用互质因子表示为

$$G(s) = N_g(s) / D_g(s) \quad (4)$$

式中

$$N_g(s) = n_{gn}(s) / d_f(s)$$

$$D_g(s) = d_{gn}(s) / d_f(s)$$

都是稳定的有理函数,且  $d_f(s)$  中首项  $s^n$  的系数为 1。这里用大写字母表示有理函数,小写字母表示多项式。

同样,控制器  $K(s)$  也用互质分解表示为

$$K(s) = N_k(s) / D_k(s) \quad (5)$$

式中

$$N_k(s) = n_{kn}(s) / d_c(s)$$

$$D_k(s) = d_{kn}(s) / d_c(s)$$

$d_c(s)$  的根都在开左半平面,且  $d_c(s)$  首项的系数为 1。

根据  $G(s)$  和  $K(s)$  得闭环传递函数  $T(s)$  为

$$T(s) = \frac{N_g(s) N_k(s)}{D_g(s) D_k(s) + N_g(s) N_k(s)} \quad (6)$$

用  $P(s)$  表示  $T(s)$  的分母部分,即

$$P(s) = D_g(s) D_k(s) + N_g(s) N_k(s) = \frac{d_{gn}(s) d_{kn}(s) + n_{gn}(s) n_{kn}(s)}{d_f(s) d_c(s)} \quad (7)$$

设  $P(s)$  对应的状态空间实现是  $[A, B, C, D]$ , 这里  $D = 1$ , 是根据前面对各多项式首项系数为 1 的假设得出的。

注意到  $P(s)$  的分子多项式就是该系统的闭环特征方程,而分母多项式  $d_f(s) d_c(s)$  则是在互质分解中引入的。如果能在设计中保证  $P(s) = 1$ , 就可使闭环特征方程等于给定的  $d_f(s) d_c(s)$ , 这可通过要求  $P(s)$  为 SPR, 并根据引理 1 和引理 2 实现。

因为式(3) LMI 的求解过程本身就是一种优化过程,是使不等式左项的对称阵成为最负定的。这个结果反映在频域上,就是在所有的  $\omega$  下  $\operatorname{Re} P(j\omega)$  达到最大值。由于  $P(s)$  状态实现中的  $D = 1$ , 频率特性高频段受 1 的制约,所以 LMI 寻优求解结果为  $\operatorname{Re} P(j\omega) \approx 1$ , 是一条近似的全通特性。

当然,这样做并不能保证闭环系统的特征方程就等于给定的  $d_f(s) d_c(s)$ , 但可使其近似相等,这正好符合本文提出的设计思想。因为这种设计只要求系统具有图 1 所示的图形特征,而对极点的具体数值并不严格要求。

具体设计时,由于控制器的  $n_{kn}(s)$  和  $d_{kn}(s)$  只进入  $P(s)$  的分子多项式,故控制器的系数只出现在  $C$  阵中且以线性存在。将此  $C$  阵代入式(3)后,控制器的系数在不等式中也是线性的,构成了线性不等式,所以可用 LMI 的通用方法<sup>[5]</sup>来求解。

### 4 算 例

算例 1 设一卫星姿态控制系统<sup>[1]</sup>, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{10Ds + 10K}{s^2(s^2 + 11Ds + 11K)}$$

式中系数  $D$  和  $K$  在实际工作中随温度变化, 对应的谐振频率  $\omega$  在  $1 \sim 2$  rad/s 之间变化, 阻尼比  $\xi$  的变化范围是  $0.02 \sim 0.1$ 。根据上述设计思想, 按最小的  $\omega$  来设计, 即取  $\omega = 1$ 。至于阻尼比  $\xi$ , 则按最坏情况考虑 ( $\xi = 0.02$ )。设计中取给定的特征方程为

$$d_f(s) d_c(s) = (s + 0.15 + i0.9)(s + 0.15 - i0.9)(s + 0.7)^2(s + 50)^3 \quad (8)$$

式中:  $-0.15 + i0.9$  和  $-0.15 - i0.9$  是考虑由于谐振模式对应的闭环极点要有适当的阻尼;  $-0.7$  的重根是考虑到主导极点要有一定的阻尼, 使系统中低频特性具有足够的相角裕度;  $s + 50$  项是系统的高频模式, 阶次与设定的控制器阶次相当 (三阶), 而在参数选择上允许有一定的自由度。根据本文的设计方法, 采用 LMI 工具箱中的 feasp 函数求解式 (3) 得控制器为

$$k(s) = \frac{230\ 089(s + 0.324\ 2)(s^2 + 0.115\ 3s + 0.751\ 8)}{(s + 36.14)(s^2 + 115.5s + 357\ 5)} \quad (9)$$

此控制器作用下系统的闭环极点分别是  $-0.15 \pm i0.9$ ,  $-0.7$ ,  $-0.7$ ,  $-48.6 \pm i2.2$ ,  $-52.8$ , 闭环极点与期望极点基本一致。

图 1 中的虚线就是本例  $\omega = 1, \xi = 0.02$  时的 Nyquist 曲线, 在跨越谐振频率  $\omega = 1$  时以大幅值顺时针绕过  $180^\circ$  角, 从而保证了系统的稳定。图 1 中的实线就是参数摄动后  $\omega = 2$  时系统的 Nyquist 曲线, 由于  $\omega = 2$  和  $\xi = 0.02$  时频率特性的大圆半径过大, 不便于在同一张图上画出, 所以图 1 中实线对应的  $\xi$  是  $0.1$ , 图形特征与  $\xi = 0.02$  时一样。

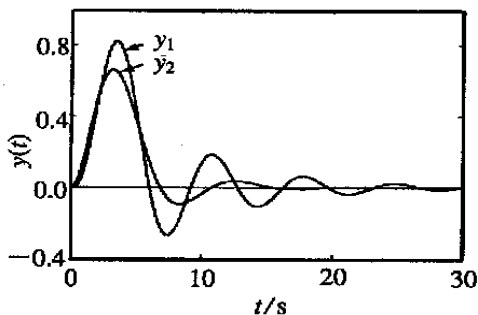


图 2 系统的脉冲扰动响应

图 2 中  $y_1(t)$  是  $\omega = 1$  时对象输入端加脉冲扰动时的闭环响应,  $y_2(t)$  是摄动后 ( $\omega = 2$ ) 的脉冲扰动响应。各个  $\omega$  值下  $\xi = 0.02$  和  $\xi = 0.1$  的响应曲线基本上是重合的。由于与谐振模式对应的闭环极点 ( $-0.15 + i0.9$  和  $-0.15 - i0.9$ ) 的阻尼较小, 所以响应特性呈波动特性, 这是为了减小控制输入  $u$  而在设计时给定的。

算例 2 设挠性系统  $G(s) = \omega^2 / (s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)$ <sup>[6]</sup>, 其中  $\omega = 100$  rad/s,  $\xi = 0.000\ 1$ 。当用本文方法设计时, 可选  $d_f(s) d_c(s) = (s + 2 + i100)(s + 2 - i100)(s + 30)^2$ , 用同样的方法可得控制器为

$$k(s) = \frac{0.114\ 7(s^2 - 32.54s + 7\ 847)}{s(s + 64.12)}$$

此时系统的闭环极点分别是  $-2 + i100$ ,  $-2 - i100$ ,  $-30.4$ ,  $-29.6$ 。

所得的控制器为非最小相位系统。注意到  $k(s)$  中  $(s^2 - 32.54s + 7\ 847) / (s + 64.12)$  在  $\omega = 100$  rad/s 处提供约  $-180^\circ$  的相角, 即这个非最小相位系统的  $k(s)$  在  $\omega = \omega_n$  处总共提供  $-270^\circ$  的相角。由于谐振模式造成的频率特性从  $-270^\circ$  开始顺时针绕过  $180^\circ$ , 使频率特性的这个大圆位于右半平面, 所以图 3 所示即为对应的 Nyquist 曲线, 该设计也相当于无源性 (passive) 设计。

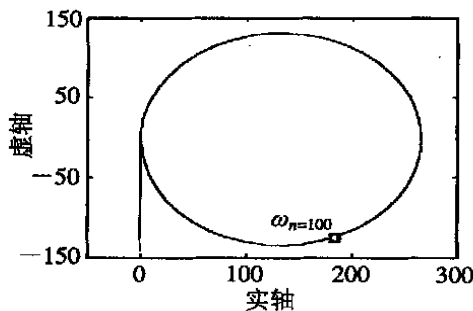


图 3 算例 2 的 Nyquist 曲线

### 5 结 论

1) 本文给出的设计方法主要是对带宽以内的极点进行配置, 因此方便了设计, 而且由于综合运用了正实性函数的性质和条件, 使得控制器的设计系统化。

2) 对挠性系统的控制来说, 本文采用的是一种类似于无源性设计的概念, 所以具有鲁棒性。这种设计思想以及本文的设计方法使得设计过程变得简单且直观。

参考文献 (References):

[1] Franklin G F, Powell J D, Emami-Naeimi A. *Feedback*

*Control of Dynamic Systems* [M]. Mass: Addison-Wesley, 1986.

[2] 王广雄, 王新生. 鲁棒镇定问题的  $H_\infty$  优化设计[J]. 自动化学报, 2002, 28(4): 601-605.

(Wang Guangxiong, Wang Xinsheng.  $H_\infty$  Optimal design for robust stabilization [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(4): 601-605.)

[3] Boyd S, Ghaoui L El, Feron E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[4] Wang Shaopeng, Chow J H. Low-order controller design for SISO systems using coprime factors and LMI[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 2000, 45(6): 1166-1169.

[5] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J, et al. *LMI Control Toolbox* [M]. Mass: The Math Works Inc, 1995.

[6] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control[J]. *Int J Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(1): 421-448.

(上接第 276 页)

### 参考文献(References):

[1] Vapnik V. *The Nature of Statistical Learning Theory* [M]. New York: Springer, 1998.

[2] Vapnic. 统计学习理论的本质[M]. 张学工, 译. 北京: 清华大学出版社, 2000.

[3] Platt J C. Fast training of SVMs using sequential minimal optimization[A]. *Advances in Kernel Methods Support Vector Learning*[C]. MIT Press, 1998. 185-208.

[4] 马笑潇. 智能故障诊断中的机器学习新理论及其应用[D]. 重庆: 重庆大学, 2002.

[5] CHIH-WEI HSU, CHIH-JEN LIN. A comparison of methods for multi-classification support vector

machines[EB/OL]. <http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/bsvm/>.

[6] Weston J, Watkins C. Multi-class support vector machines[A]. *Proc of ESANN 99*[C]. Brussels D Facto Press, 1999.

[7] 耿尊敏, 宋孔杰, 李兆前, 等. 关于柴油机振声特点及动态诊断方法的研究与讨论[J]. 内燃机学报, 1995, 13(2): 140-147.

(Geng Z M, Song K J, Li Z Q, et al. The research and discussion on the characteristic of vibration of diesel engine and dynamic diagnosis methods [J]. *Trans CSICE*, 1995, 13(2): 140-147.)

(上接第 280 页)

### 参考文献(References):

[1] Agrawal R, Imielinski T, Swami A. Mining association rules between sets of items in large databases[A]. *Proc of ACM SIGMOD Conf on Management of Data*[C]. Washington, 1993. 207-216.

[2] Agrawal R, Srikant R. Fast algorithms for mining association rules[A]. *Proc of the 20th Int Conf on Very Large Databases*[C]. Santiago, 1994. 487-499.

[3] Agrawal R, Mannila H, Srikant R, et al. Fast discovery of association rules[A]. *Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*[C]. AAAI/MIT Press, 1996. 307-328.

[4] Brin S, Motwani R, Silverstein C. Beyond market bas-

ket: Generalizing association rules to correlations[A]. *Proc 1997 ACM-SIGMOD Int Conf Management of Data*[C]. Tucson, 1997. 265-276.

[5] Srikant R, Agrawal R. Mining generalized association rules[A]. *Proc of the 21st Int Conf on Very Large Data Bases*[C]. Zurich, 1995. 407-419.

[6] Srikant R, Agrawal R. Mining quantitative association rules[A]. *Proc of the ACM SIGMOD*[C]. Montreal, 1996. 1-12.

[7] Savasere A, Omiecinski E, Navathe S. Mining for strong negative association in a large database of customer transactions[A]. *Proc of the Int Conf on Data Engineering*[C]. Orlando, 1998. 494-502.