

文章编号: 1001-0920(2003)03-0285-05

一类多变量广义预测控制算法及仿真研究

罗开元¹, 高峰², 胡俐蕊³

(1. 贵州大学 数学系, 贵州 贵阳 550025; 2. 浙江林学院 现代教育技术中心,
浙江 临安 311300; 3. 南通师范学院 信息工程与技术系, 江苏 南通 226007)

摘要: 基于灰色系统 GM(1, h) 模型, 构造了新的多变量广义预测控制算法。该算法所需估计的参数较少, 参数估计中需用数据也少, 且在多步情况下无需求解 Diophantine 方程, 从而使总的计算量明显减少。仿真实验表明, 该算法对相当广泛的被控对象均能获得良好的控制效果, 不仅提高了实时性, 而且鲁棒性也很强。

关键词: 灰色系统; 多变量广义预测控制; 算法; 系统辨识; 仿真

中图分类号: TP391.9 **文献标识码:** A

Study of generalized predictive control algorithm and simulation with the MIMO

LUO Kai-yuan¹, GAO Feng², HU Li-rui³

(1. Department of Mathematics, Guizhou University, Guiyang 550025, China; 2. Center of Modern Educational Technology, Zhejiang Forestry University, Lin an 311300, China; 3. Department of Information Engineering and Technology, Nantong Teachers University, Nantong 226007, China)

Abstract: Based on the grey system GM(1, h) model, a novel multi-parameter prediction control algorithm is proposed. The algorithm requires fewer parameters needed to be evaluated and small data in parameters evaluation. Diophantine equation doesn't need to be solved on multi-step prediction. The overall computation work is reduced apparently. The simulation test demonstrates that the good control can be reached for many control plants and the algorithm improves both the real-time and robust performance.

Key words: Gray system; Multi-parameter prediction control; Algorithm; System identification; Simulation

1 引言

广义预测控制应用于实际工程时, 所遇到的主要问题之一是计算量太大, 实时性受到影响。因此, 减少广义预测控制算法的计算量便成为一个重要的研究课题^[1,2]。文献[1]给出了一种无需求解 Diophantine 方程的算法, 由于该算法是基于 CARIMA 模型, 所需估计的参数较多, 因而其求逆运算量也较

大, 计算量仍然偏高。基于灰色系统 GM(1, h) 模型, 作者在文献[3]中构造了一种新的单变量广义预测控制算法。本文则给出一种多变量算法。由于该算法是基于灰色系统模型, 所需估计的参数少, 加上在估计计算中应用有限记忆最小二乘法, 每次估计所用数据也很少(这是灰色系统模型的主要优点之一)^[4,5]。该模型还具有输出解耦的简单形式, 在多步

收稿日期: 2002-04-27; 修回日期: 2002-07-31。

基金项目: 贵州省自然科学基金资助项目(983074); 浙江省教育厅科学研究基金资助项目(20010259)。

作者简介: 罗开元(1942—), 男, 贵州贵阳人, 副教授, 从事预测控制、自适应控制等研究; 高峰(1969—), 男, 江西万载人,

情况下,无需求解 Diophantine 方程,这就使得在线计算量大大减少,从而提高了实时性和经济性。大量仿真实验表明,对相当广泛的被控对象,无论其是否输出解耦,用单步和多步算法均能获得良好的控制效果。不失一般性,本文仅限于研究输入输出维数相同的情况。

2 预测模型

2.1 单步多变量预测模型

由于存在随机干扰等不确定性因素,任一实际的系统都可以看作灰色系统^[4,5]。考虑 m 个输入 m 个输出的灰色系统,设测得 m 个输入 m 个输出数据列如下

$$u_i^{(0)}(1), u_i^{(0)}(2), \dots, u_i^{(0)}(n), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(n), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

其中: $u_i^{(0)}(k)$ 为第 i 个输入时间序列的第 k 个原始数据, $x_i^{(0)}(k)$ 为第 i 个输出时间序列的第 k 个原始数据,上标(0)表示原始数据。

对该 m 个输入 m 个输出共 $2m$ 个灰时间序列进行生成累加,得到一次生成累加数据列

$$u_i^{(1)}(k) = \sum_{h=1}^k u_i^{(0)}(h)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$x_i^{(1)}(k) = \sum_{h=1}^k x_i^{(0)}(h)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

式中符号意义同前,上标(1)表示一次生成累加数据。

利用 $u_i^{(1)}(k), x_i^{(1)}(k) (i = 1, 2, \dots, m)$ 可建立 m 个 GM(1, $m + 1$) 灰微分方程^[3]如下

$$x_j^{(0)}(k) + a_j z_j^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^m b_{ji} u_i^{(1)}(k)$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

其中

$$z_j^{(1)}(k) = 0.5x_j^{(1)}(k) + 0.5x_j^{(1)}(k - 1)$$

称为 $x_j^{(1)}(k)$ 的紧邻均值生成序列。

式(3)的参数 $(a_j, b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jm})^T$ 可用下式进行估计^[3]

$$\hat{a}_j = (B_j^T B_j)^{-1} B_j^T Y_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

其中

$$B_j = \begin{bmatrix} -z_j^{(1)}(2) & u_1^{(1)}(2) & \dots & u_m^{(1)}(2) \\ -z_j^{(1)}(3) & u_1^{(1)}(3) & \dots & u_m^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -z_j^{(1)}(n) & u_1^{(1)}(n) & \dots & u_m^{(1)}(n) \end{bmatrix}$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

$$y_j = (x_j^{(0)}(2), x_j^{(0)}(3), \dots, x_j^{(0)}(n))^T$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

方程(3)的白化方程或称影子方程为^[4,5]

$$\frac{dx_j^{(1)}(t)}{dt} + a_j x_j^{(1)}(t) = \sum_{l=1}^m b_{jl} u_l^{(1)}(t)$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

式(7)的参数 $(a_j, b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jm})^T$ 即为式(4)估算所得的结果。

将式(7)离散化得

$$x_j^{(1)}(k + 1) = (1 - T a_j) x_j^{(1)}(k) + \sum_{i=1}^m T b_{ji} u_i^{(1)}(k)$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

其中 T 为采样周期。

式(8)乘以差分算子的平方 $\Delta^2 = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$ (z^{-1} 为滞后算子),经整理得

$$x_j^{(0)}(k + 1) = (2 - T a_j) x_j^{(0)}(k) - (1 - T a_j) x_j^{(0)}(k - 1) + \sum_{i=1}^m T b_{ji} \Delta u_i^{(0)}(k)$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

写成向量形式

$$X^{(0)}(k + 1) = G_1 X^{(0)}(k) - G_2 X^{(0)}(k - 1) + H \Delta U^{(0)}(k) \quad (10)$$

其中

$$X^{(0)}(h) = (x_1^{(0)}(h), x_2^{(0)}(h), \dots, x_m^{(0)}(h))^T$$

$$h = k - 1, k, k + 1$$

$$G_1 = \text{diag}((2 - T a_1), (2 - T a_2), \dots, (2 - T a_m))$$

$$G_2 = \text{diag}((1 - T a_1), (1 - T a_2), \dots, (1 - T a_m))$$

$$H = T \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\Delta U^{(0)}(k) = (\Delta u_1^{(0)}(k), \Delta u_2^{(0)}(k), \dots, \Delta u_m^{(0)}(k))^T$$

上面得到的模型(10),因为 G_1 和 G_2 均为对角型,所以该模型具有输出解耦的简单型式。而仿真实验表明,无论被控对象是否输出解耦,使用模型(10)都能获得很好的控制效果,从而体现了较强的鲁棒性。多步情形亦同。

2.2 多步多变量预测模型

式(10)两边同乘以算子 z^{i-1} ,得

$$X^{(0)}(k + j) = G_1 X^{(0)}(k + i - 1) - G_2 X^{(0)}(k + i - 2) +$$

$$H \Delta U^{(0)}(k + i - 1) \quad (11)$$

其中 $1 \leq i \leq P, P$ 为最大预测时域长度。将式(11)

写成向量形式

$$\begin{bmatrix} X^{(0)}(k+1) \\ X^{(0)}(k+2) \\ \vdots \\ X^{(0)}(k+P) \end{bmatrix}_{mP \times 1} = \begin{bmatrix} -G_2 & G_1 \\ 0 & -G_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{mP \times 2m} \begin{bmatrix} X^{(0)}(k-1) \\ X^{(0)}(k) \end{bmatrix}_{2m} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_1 & 0 \\ -G_2 & G_1 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -G_2 & G_1 & 0 \end{bmatrix}_{mP \times mP} \times \begin{bmatrix} H & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{mP \times mP}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta U^{(0)}(k) \\ \Delta U^{(0)}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta U^{(0)}(k+M-1) \end{bmatrix}_{mM \times 1}$$

对上式作移项、合并、乘逆等运算,得

$$\bar{X}^{(0)}(k+1) = F \bar{X}^{(0)}(k-1) + S \Delta U^{(0)}(k) \quad (12)$$

其中

$$\bar{X}^{(0)}(k+1) = \begin{bmatrix} X^{(0)}(k+1) \\ X^{(0)}(k+2) \\ \vdots \\ X^{(0)}(k+P) \end{bmatrix}_{mP \times 1}$$

$$\bar{X}^{(0)}(k-1) = \begin{bmatrix} X^{(0)}(k-1) \\ X^{(0)}(k) \end{bmatrix}_{2m \times 1}$$

$$F = A^{-1} \begin{bmatrix} -G_2 & G_1 \\ 0 & -G_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{mP \times 2m}$$

$$S = A^{-1} \begin{bmatrix} H & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{mP \times mP}$$

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -G_1 & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ G_2 & -G_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_2 & -G_1 & I \end{bmatrix}_{mP \times mP}$$

显然 A^{-1} 存在, 于是式(12)即为多步多变量预测模型。

3 最优控制律

3.1 单步多变量最优控制律

对单步多变量灰色广义预测控制引入以下性能指标^[6]

$$J = \left\{ \sum_{j=1}^m q_j [x_j^{(0)}(k+1) - x_{rj}^{(0)}(k+1)]^2 + \sum_{l=1}^m \lambda_l [\Delta u^{(0)}(k)]^2 \right\} \quad (13)$$

其中

$$x_{rj}^{(0)}(k+1) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} w_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

为参考轨迹, q_j 和 $\lambda_l (j, l = 1, 2, \dots, m)$ 为输出误差与控制增量的权系数, w_j 为第 j 组的输入设定值, 滤波器参数 α 满足 $0 < \alpha < 1$ 。

将式(13)写成向量形式

$$J = \{ [X^{(0)}(k+1) - X_r^{(0)}(k+1)]^T \times Q [X^{(0)}(k+1) - X_r^{(0)}(k+1)] + [\Delta U^{(0)}(k)]^T \Lambda [\Delta U^{(0)}(k)] \} \quad (14)$$

其中: $X^{(0)}(k+1)$ 和 $\Delta U^{(0)}(k)$ 的意义同前, $X_r^{(0)}(k+1) = (x_{r1}^{(0)}(k+1), x_{r2}^{(0)}(k+1), \dots, x_{rm}^{(0)}(k+1))^T, Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_m), \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 。

将式(10)代入式(14), 可求得最优控制

$$\Delta U^{(0)}(k) = (H^T Q H + \Lambda)^{-1} H^T Q \times [X_r^{(0)}(k+1) - G_1 X^{(0)}(k) + G_2 X^{(0)}(k-1)] \quad (15)$$

或写成

$$U^{(0)}(k) = (H^T Q H + \Lambda)^{-1} H^T Q \times [X_r^{(0)}(k+1) - G_1 X^{(0)}(k) + G_2 X^{(0)}(k-1)] + U^{(0)}(k-1) \quad (16)$$

3.2 多步多变量最优控制律

对多步多变量灰色广义预测控制引入类似的二次性能指标^[6]

$$J = \sum_{i=1}^P \sum_{s=1}^m q_{is} [x_s^{(0)}(k+i) - x_s^{(0)}(k+i)]^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^m \lambda_{il} [\Delta u^{(0)}(k+i-1)]^2 \quad (17)$$

写为向量形式

$$J = \{ [X^{(0)}(k+1) - \bar{X}^{(0)}(k+1)]^T \times \bar{Q} [X^{(0)}(k+1) - \bar{X}^{(0)}(k+1)] + [\Delta U^{(0)}(k)]^T \Lambda [\Delta U^{(0)}(k)] \} \quad (18)$$

其中: $X^{(0)}(k+1)$ 和 $\Delta U^{(0)}(k)$ 的意义同前, $\bar{X}_r^{(0)}(k+1)$ 为多步多变量参考轨迹, 即

$$\begin{aligned} \bar{X}_r^{(0)}(k+1) &= (X_r^{(0)}(k+1), X_r^{(0)}(k+2), \dots, X_r^{(0)}(k+P))^T \\ X_r^{(0)}(k+i) &= (x_{r1}^{(0)}(k+i), x_{r2}^{(0)}(k+i), \dots, x_{rm}^{(0)}(k+i))^T, \quad i = 1, 2, \dots, P \end{aligned}$$

$$\bar{X}_r^{(0)}(k) = X^{(0)}(k)$$

$$\bar{X}_r^{(0)}(k+i) =$$

$$\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \bar{X}_r^{(0)}(k+i-1) +$$

$$\text{diag}(1 - \alpha_1, 1 - \alpha_2, \dots, 1 - \alpha_m) W$$

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T, \quad i = 1, 2, \dots, P$$

$$\bar{Q} = \text{diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_P)$$

$$Q_i = \text{diag}(q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{im}), \quad i = 1, 2, \dots, P$$

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_M)$$

$$\Lambda_j = (\Lambda_{j1}, \Lambda_{j2}, \dots, \Lambda_{jm}), \quad j = 1, 2, \dots, M$$

将式(12)代入式(18), 可求得最优控制

$$\Delta U^{(0)}(k) = [S^T Q S + \bar{\Lambda}]^{-1} S^T \bar{Q} \times [\bar{X}_r^{(0)}(k+1) - F \bar{X}^{(0)}(k-1)] \quad (19)$$

当前时刻的控制增量则为

$$\Delta U^{(0)}(k) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times mM} \times \Delta U^{(0)}(k) \quad (20)$$

4 自校正控制器

采用有限记忆最小二乘法估计模型参数, 将参数估计值(4)代入最优控制律(15), 即得自校正控制器。多步情况类似。本研究在仿真实验中采用 5 个采样数据对模型参数进行估计。

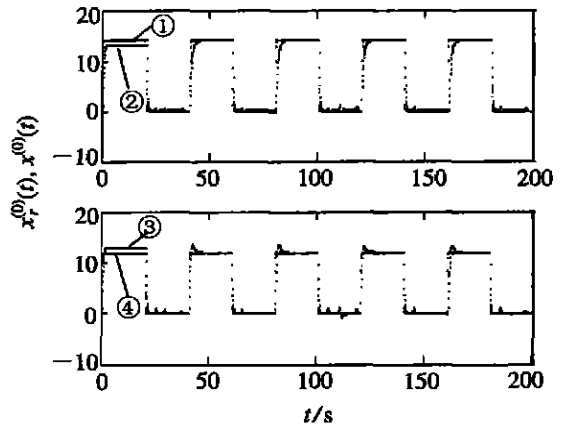
5 仿真研究

以 MATLAB 为工具进行大量仿真实验, 均表明了上述算法的有效性。这里仅给出其中两例。

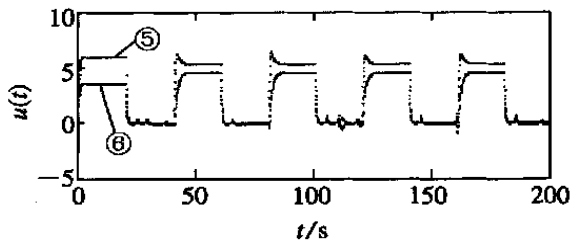
例 1 设有如下二输入二输出的被控系统

$$\begin{aligned} x_1^{(0)}(k) &= 0.4x_1^{(0)}(k-1) - 0.3x_2^{(0)}(k-1) + \\ &u_1^{(0)}(k-1) + 0.1u_1^{(0)}(k-2) + \\ &u_2^{(0)}(k-1) + 0.3u_2^{(0)}(k-2) + \\ &\xi_1(k) - 0.8\xi_1(k-1) + 0.15\xi_1(k-2) \\ x_2^{(0)}(k) &= 0.2x_2^{(0)}(k-1) - 0.3x_1^{(0)}(k-2) + \\ &u_1^{(0)}(k-1) - 0.2u_1^{(0)}(k-2) + \\ &0.9u_2^{(0)}(k-1) + u_2^{(0)}(k-2) + \\ &\xi_2(k) - 0.6\xi_2(k-1) + 0.08\xi_2(k-2) \end{aligned}$$

其中 ξ_1 和 ξ_2 都是均值为零、方差为 0.01 的白噪声。用单步算法对其进行仿真, 参数选择为: $T = 0.1, q_1 = q_2 = 0.3, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 。仿真结果见图 1, 其中曲线 ①、③ 为参考轨迹 $x_1^{(0)}(t), x_2^{(0)}(t)$; 曲线 ②、④ 为输出轨迹 $x_1^{(0)}(t), x_2^{(0)}(t)$; 曲线 ⑤、⑥ 为控制作用 $u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t)$ 。



(a) 控制效果



(b) 控制动作

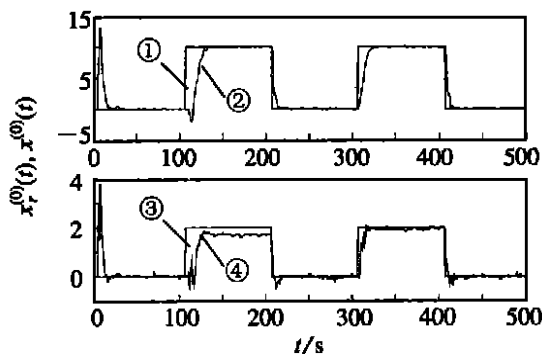
图 1 例 1 的仿真结果

例 2 设有如下被控对象

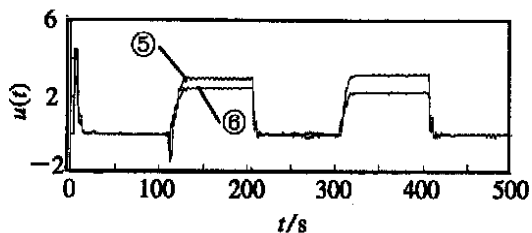
$$\begin{aligned} x_1^{(0)}(k) &= 0.4x_1^{(0)}(k-1) + x_2^{(0)}(k-1) = \\ &u_1^{(0)}(k-1) + 0.1u_1^{(0)}(k-2) + \\ &u_2^{(0)}(k-1) + 0.3u_2^{(0)}(k-2) + \\ &\xi_1(k) + 0.02\xi_1(k-1) + 0.012\xi_1(k-2) \\ 0.5x_1^{(0)}(k-1) + x_2^{(0)}(k) &- 0.2x_2^{(0)}(k-1) = \\ &u_1^{(0)}(k-1) - 0.2u_1^{(0)}(k-2) + \\ &0.5u_2^{(0)}(k-2) + u_2^{(0)}(k-3) + \end{aligned}$$

$$\xi_2(k) + 0.02\xi_2(k - 1) + 0.04\xi_2(k - 2)$$

其中 $\xi_1(k), \xi_2(k)$ 的意义同例 1。用多步算法进行仿真。参数选择为: $n = 2, T = 0.1, P = 3, M = 2, Q = 0.1I$ (I 为单位矩阵), $\Lambda = 0.3I, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 。仿真结果见图 2, 其中曲线 ① ~ ⑥ 的意义同例 1。



(a) 控制效果



(b) 控制动作

图 2 例 2 的仿真结果

6 结 语

基于灰色系统模型, 回避求解 Diophantine 方程, 采用有限记忆最小二乘法进行辨识等, 使得本文

所构造的算法计算量大大减少, 增强了实时性。该模型还具有输出解耦的简单形式。大量仿真表明, 该算法对无论输出是否解耦的对象都是有效的, 具有很强的鲁棒性。至于完全解耦的型式则是有待研究的课题。另外, 由于主要设计参数仍以蕴涵方式出现在闭环脉冲传递函数中, 且该函数很复杂, 所以进行各参数间的解析分析仍是一件较为困难的事情。

参考文献 (References):

[1] 袁著社, 崔保民. 新型随机广义预测自校正控制器[J]. 自动化学报, 1992, 18(2): 282-289.
(Yuan Zhuzhi, Cui Baomin. New random generalized predictive STC [J]. Acta Automatica Sinica, 1992, 18(2): 282-289.)

[2] 徐立鸿, 冯纯伯. 论广义预测控制[J]. 控制与决策, 1992, 7(4): 241-246.
(Xu Lihong, Feng Chunbo. Reviews of generalized predictive control[J]. Control and Decision, 1992, 7(4): 241-246.)

[3] 罗开元, 高峰, 胡俐蕊. 灰色广义预测控制算法及仿真研究[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(2): 207-210.
(Luo Kaiyuan, Gao Feng, Hu Lirui. Grey generalized predictive control algorithm and simulation[J]. Control Theory and Applications, 2002, 19(2): 207-210.)

[4] 邓聚龙. 灰色控制系统(第 2 版)[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1993.

[5] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国, 等. 灰色系统理论及其应用(第 2 版)[M]. 北京: 科学出版社, 2000.

[6] 王伟. 广义预测控制理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

下 期 要 目

系统控制和信号处理中的 Delta 方法	张瑞金, 等
时变系统的具有 MT-滤波器的反推自适应控制	解学军, 等
具有不匹配参数混沌系统的同步控制	陈茂银, 等
时变非线性系统的稳定性	董亚丽, 等
基于多尺度小波变换和短时分形理论的航迹关联方法	徐 毓, 金以慧
多故障的奇偶方法——参数估计诊断方法	宋 华, 张洪钺
一类复杂非建模控制方法的研究	韩志刚
非线性不确定系统的直接自适应输出反馈模糊控制	王 涛, 佟绍成
系统参数估计的混沌方法	童勤业, 等
多变量模型不确定系统的二阶滑模分解控制方法	郑雪梅, 等
双速率采样控制系统的仿真	赵 霞, 等