文章编号: 1001-0920(2003)03-0295-05

非自治非线性DEDS的周时研究

程轶平, 郑大钟
(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘　要: 对于一般的非自治系统, 根据对偶定理给出一个通用的周时计算公式, 并将其应用到几类非线性DEDS, 得到了一些结果, 其中包括关于分离系统特征值的Olsder定理的一个简洁证明, 一类具有特定结构的min-max系统在输入均匀序列情况下的周时公式, 以及广义二分系统的周时限幅器等。这些结果对非线性DEDS的分析、综合及周时配置具有重要意义。

关键词: DEDS; min-max 系统; 周时
中图分类号: TP271　　文献标识码: A

On the cycle time of non-autonomous min-max systems

CHENG Yi-ping, ZHENG Da-zhong
(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The cycle time is the most important parameter associated with a min-max system. Based on the duality theorem, a general cycle time formula is derived. Application of this formula to some special classes of min-max systems gives some results, including a short proof of Olsder's theorem on the eigenvalue of separated min-max systems, a cycle time formula for min-max systems with certain structure driven by uniform input, and a cycle time clipper for wide-sense bipartite systems. These results are useful for the analysis, synthesis and cycle time assignment of min-max systems.

Key words: DEDS; Min-max systems; Cycle time

1　引　　言

非线性DEDS是近年来发展起来的离散事件动态系统理论的一个重要分支, 它能在时间层次上较好地描述在数字电路、通信网络、制造系统中出现的一类动态系统的行为, 因而具有重要的应用价值。本文研究非自治的非线性DEDS, 它的动态方程为 $x(k+1) = F(x(k), u(k))$。研究非自治非线性DEDS的性质, 有助于更好地分析复杂非线性DEDS的行为, 并为其系统综合奠定基础。

周时(cycle time)是非线性DEDS最重要的性能指标, 它的基本含义是系统中两次相邻事件发生时间的渐近间隔, 即 $\lim_{k\to\infty} x(k)/k$。对自治的非线性DEDS而言, 系统的周时完全由转移函数 F 决定, 因此现有文献中把周时定义为函数 F 的特征参量, 记为 $\chi(F) = \lim_{k\to\infty} F^k(x)/k$。研究非自治非线性DEDS的周时(按其基本含义), 与输入序列 $u(\cdot)$ 的性质有关, 因此势必要将周时的定义从系统扩展到序列。本文从基本含义出发定义序列的周时, 并导出主要的研究结果。

2　基本定义及对偶定理

极大代数线性DEDS和非线性DEDS的基本概念参见文献[1～3]。

收稿日期: 2002-02-01; 修回日期: 2002-04-15。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60074012); 国家973基础研究资助项目(G1998020305)。
作者简介: 程轶平(1970—), 男, 浙江永康人, 博士生, 从事非线性DEDS的研究; 郑大钟(1935—), 男, 浙江绍兴人, 教授, 博士生导师, 从事自动控制理论及DEDS的研究。

定义 1　设有序列

$$u(k)\in R^q,\quad k\geq 0$$

则其周时为

$$\eta(u)=\lim_{k\to\infty}u(k)/k$$

定义 1 中的序列是实向量序列, 周时是实向量。实际上, 定义 1 也可扩展到极大代数范围内, 此时只需将 R 换成 $R_{\max}=R\cup\{-\infty\}$, 并规定 $-\infty/k=-\infty$ 即可。对于线性 DEDS, 已证明其状态序列一定有周时。对于非线性 DEDS, 现已证明其状态序列具有最终周期性[4,5]。显然, 最终周期的序列一定具有周时。

对偶定理是 min-max 函数理论的一个重要结果。它为周时的计算提供了一个公式, 其实质是将一个 min-max 函数 F 视为所有 F 的纯 max 投影的 min; 或者视为所有的纯 min 投影的 max。分别对每个纯 max 投影求其周时, 然后取其最小值; 或者分别对每个纯 min 投影求其周时, 然后取其最大值。对偶定理断定这两种计算方法得到的结果是相同的, 而且都等于 F 的周时。

对偶定理　设 $F:R^n\to R^n$ 是一个 min-max 函数, 记 $P(F)$ 为所有 F 的纯 max 投影组成的集合, $Q(F)$ 为所有 F 的纯 min 投影组成的集合; $\mu(A)$ 表示极大代数矩阵 A 对应的 min-max 函数的周时, μ' 为 μ 在极小代数的对偶。则

$$\bigwedge_{A\in P(F)}\mu(A)=\chi(F)=\bigvee_{B\in Q(F)}\mu'(B)$$

3　非自治非线性 DEDS 的周时计算公式

定理 1　设 $F:R^{n+q}\to R^n$ 是一个 min-max 函数, $u(\cdot)\in R^q$ 是一个最终周期序列, $\eta(u)=[d_1\ \cdots\ d_q]^{\mathrm T}$, 序列 $x(\cdot)$ 满足

$$x(k+1)=F(x(k),u(k))$$

则 $x(\cdot)$ 的周时 $\eta(x)$ 满足

$$\eta_i(x)=\bigwedge_{[A\ \ B]\in P(F)}\mu_i\left(\begin{bmatrix}A & B\\ -\infty & D\end{bmatrix}\right),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其中

$$A\in R_{\max}^{n\times n},\quad B\in R_{\max}^{n\times q}$$

$$D=\begin{bmatrix}d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_q\end{bmatrix}$$

证明　不失一般性, 假设 $u(\cdot)$ 是周期序列。

令 $p_1,\cdots,p_q$ 分别为 $u_1(\cdot),\cdots,u_q(\cdot)$ 的周期。并令 $t=p_1+\cdots+p_q$, $t_1=0$, $t_i=p_1+\cdots+p_{i-1}$, $i=2,3,\cdots,q$。构造一个新向量序列

$$v(k)=[v_1(k)\ \cdots\ v_t(k)]^{\mathrm T},\quad k\geq 0$$

其中

$$v_{t_i+l}(k)=u_i(k+l-1)$$

$$k\geq 0,\quad i=1,2,\cdots,q,\quad l=1,2,\cdots,p_i$$

根据 $u(\cdot)$ 的周期性, 有

$$v(0)=[u_1(0)\ \cdots\ u_1(p_1-1)\ \cdots\ u_q(0)\ \cdots\ u_q(p_q-1)]^{\mathrm T}$$

$$v_{t_i+l}(k+1)=v_{t_i+l+1}(k)$$

$$k\geq 0,\quad i=1,2,\cdots,q,\quad l=1,2,\cdots,p_i-1$$

$$v_{t_i+p_i}(k+1)=v_{t_i+1}(k)+p_id_i$$

$$k\geq 0,\quad i=1,2,\cdots,q$$

令

$$D_i=\begin{bmatrix}-\infty & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0\\ p_id_i & & & -\infty\end{bmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_q\end{bmatrix}$$

则

$$v(k+1)=\Sigma\otimes v(k)$$

其中 $\otimes$ 表示极大代数矩阵乘法。

记 $\pi:R^t\to R^q$ 为将 $v(k)$ 映射到 $u(k)$ 的投影映射。则可得到如下的自治 min-max 系统 G

$$\begin{bmatrix}x(k+1)\\ v(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F(x(k),\pi(v(k)))\\ \Sigma\otimes v(k)\end{bmatrix}$$

根据对偶定理, 状态序列 $x(\cdot)$ 的周时满足等式

$$\eta_i(x)=\bigwedge_{\Delta\in P(G)}\mu_i(\Delta),\quad i=1,2,\cdots,n$$

观察 G 的结构可知: $\Delta\in P(G)$ 当且仅当存在矩阵 $A\in R_{\max}^{n\times n}$, $B\in R_{\max}^{n\times q}$, 使得

$$[A\ \ B]\in P(F),\quad \Delta=[A\ \ \bar B_1\ \cdots\ \bar B_q]$$

其中

$$\bar B_j=[b_j\ -\infty\ \cdots\ -\infty]$$

b_j 为 B 的第 j 列。

所以, 对于 $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$\eta_i(x)=\bigwedge_{[A\ \ B]\in P(F)}\mu_i\left(\begin{bmatrix}A & \bar B_1 & \cdots & \bar B_q\\ & D_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_q\end{bmatrix}\right)$$

现只需证明

$$\mu_i\left(\begin{bmatrix} A & \bar{B}_1 & \cdots & \bar{B}_q \\ & D_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_q \end{bmatrix}\right) = \mu_i\left(\begin{bmatrix} A & b_1 & \cdots & b_q \\ & d_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_q \end{bmatrix}\right)$$

为简便起见, 记上式左端的矩阵为 L, 右端的矩阵为 R。根据定义有

$\mu_i(L) = \max\{m(c) \mid c$ 为 $G(L)$ 中的圈且到 i 有路$\} =$
$\mu_i(A) \oplus \max\{d_j \mid$ 在 $G(L)$ 中从 $n+t_j+1$ 到 i 有路$\}$
$\mu_i(R) = \max\{m(c) \mid c$ 为 $G(R)$ 中的圈且到 i 有路$\} =$
$\mu_i(A) \oplus \max\{d_j \mid$ 在 $G(R)$ 中从 $n+j$ 到 i 有路$\}$

观察 L 和 R 的结构可知 $\mu_i(L) = \mu_i(R)$。□

定理 1 给出了非自治非线性 DEDS 的通用周时计算公式, 它可看作是对偶定理的一个推广。从定理 1 可知: 状态序列的周时除了与转移函数有关外, 只与输入序列的周时有关, 而与输入序列的其他信息 (如周期、过渡过程长度等) 无关。因此, 非自治非线性 DEDS 起到了一个周时变换器的作用。另外, 如果已知某个状态变量 x_i 的周时为 d, 则可将转移函数的第 i 个分量改成 $F_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i + d$, 而不会改变任何变量的周时。

显然, 定理 1 也适用于 F 为线性 DEDS 的情况, 此时证明无须用到对偶定理。

4　周时计算公式的应用

定理 1 的意义不仅在于提供了一个计算公式, 而且提示了一种新的思路: 将非线性 DEDS 的状态变量看作是在系统中流动的携带周时信息的"信号"。由这种思路出发可得到一些新的结果。

4.1　Olsder 定理的一个简洁证明

引理 1　设 $x(\cdot) \in R^n, y(\cdot) \in R^m, F: R^{n+m} \to R^n, G: R^{n+m} \to R^m$ 是 min-max 函数, M 为如下定义的 min-max 系统。

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} F(x(k), y(k)) \\ G(x(k), y(k)) \end{bmatrix}$$

而且存在一个不可约的极大代数矩阵 A, 使得对任意 $x \in R^n, y \in R^m, F(x, y) \geq A \otimes x$。则系统 M 的周时满足 $\chi_i(M) = \chi_j(M), 1 \leq i, j \leq n$。

证明略。

分离非线性 DEDS 是 Olsder 在文献[6] 中提出的, 它的转移函数是分离 min-max 函数, 其每个分量要么只包含 max 和/ 或 +, 要么只包含 min 和/ 或 +。因此, 分离 min-max 函数可以写成如下形式

$$z(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad z(k+1) = M(z(k))$$

其中

$$x(k) \in R^n, \quad y(k) \in R^m, \quad k \geq 0$$

且有

$$\begin{cases} x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes y(k) \\ y(k+1) = C \otimes' x(k) \oplus' D \otimes' y(k) \end{cases} \tag{2}$$

其中: $\oplus'$ 和 $\otimes'$ 分别是 $\oplus$ 和 $\otimes$ 的极小代数对偶。A 和 B 是极大代数矩阵, C 和 D 是极小代数矩阵。为确保 M 为 min-max 函数, 要求 $[A \quad B]$ 和 $[C \quad D]$ 中每行至少有一个有限元素。

关于分离 min-max 系统的 Olsder 定理是 min-max 系统理论中最早的一个重要结果, 是由 Olsder 在[6] 中提出并证明的, 但该定理的原始证明篇幅很长。下面给出一个较简单的新证明。

Olsder 定理　在系统(2) 中, A 和 D 不可约, 其特征值分别是 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$; $B \neq -\infty, C \neq \infty$。记 $\mathbf{1}_n$ 为分量全为 1 的 n 维向量。于是

1) 如果 $\lambda_{\max} > \lambda_{\min}$, 则

$$\chi(M) = [\lambda_{\max} \cdot \mathbf{1}_n \quad \lambda_{\min} \cdot \mathbf{1}_m]^{\mathrm{T}}$$

2) 如果 $\lambda_{\max} \leq \lambda_{\min}$, 则 M 具有特征值 λ, 且 $\lambda_{\max} \leq \lambda \leq \lambda_{\min}$。

证明　根据引理 1, 对任意 $1 \leq i, j \leq n$, $\chi_i(M) = \chi_j(M)$。根据引理 1 的对偶, 对任意 $1 \leq i, j \leq m$, 有 $\chi_{n+i}(M) = \chi_{n+j}(M)$。

令 $\eta(x) = \lambda_1 \cdot \mathbf{1}_n, \eta(y) = \lambda_2 \cdot \mathbf{1}_m$。由于 min-max 系统状态序列是最终周期的, 且 $B \neq -\infty, C \neq \infty$, 根据定理 1 有

$$\lambda_1 = \lambda_{\max} \vee \lambda_2 \tag{3}$$

$$\lambda_2 = \lambda_{\min} \wedge \lambda_1 \tag{4}$$

1) 如果 $\lambda_{\max} > \lambda_{\min}$, 则显然 $\lambda_1 > \lambda_2$, 易知 $\lambda_1 = \lambda_{\max}, \lambda_2 = \lambda_{\min}$。

2) 如果 $\lambda_{\max} \leq \lambda_{\min}$, 根据式(3) 有 $\lambda_1 \geq \lambda_{\max}$。用反证法可证明 $\lambda_1 \leq \lambda_{\min}$。否则如果 $\lambda_1 > \lambda_{\min}$, 根据式(4) 有 $\lambda_2 = \lambda_{\min}$, 而由式(3) 有 $\lambda_1 = \lambda_{\min}$, 矛盾。

综上可得 $\lambda_{\max} \leq \lambda_1 \leq \lambda_{\min}$。再次使用式(4), 得到 $\lambda_1 = \lambda_2$, 记 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$。□

这里的证明没有涉及特征向量, 而文献[6] 则同时证明了特征向量的存在性。不过, 对于 min-max 函数, 已经证明特征值的存在性和特征向量的存在性是等价的, 这是 min-max 函数理论的重要结果 —— 广义特征向量存在性定理[7,8] 的一个推论。另外, 本文的 Olsder 定理证明并不依赖于对偶定理。

4.2　输入均匀序列情况下的周时

考虑如下的一类 min-max 系统

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k), y(k)) \vee u(k) \\ y(k+1) = G(x(k)) \end{cases} \tag{5}$$

其中: $x(\cdot), u(\cdot) \in R^n; y(\cdot) \in R^m$。

这种系统所对应的自治系统为

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k), y(k)) \\ y(k+1) = G(x(k)) \end{cases} \tag{6}$$

这种系统的结构类似于左上三角矩阵。下面研究这类系统在均匀输入, 即输入向量中周时的所有分量相同情况下的行为。

定理 2 在系统(5) 中, 设 $u(\cdot)$ 为最终周期序列, 其周时为 $\eta(u) = d \cdot \mathbf{1}_n$。令

$$z(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

则

$$\eta(z) = \chi(M) \vee \eta(u)$$

其中 M 表示系统(5) 的自治子系统(6)。

证明 记 $\bar{F}$ 为系统(5) 的转移函数, 即在系统(5) 中

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \bar{F}\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

根据定理 1, 对 $i = 1, 2, \cdots, n+m$, 有

$$\eta(z) = \bigwedge_{[A\ \ B] \in P(\bar{F})} \mu_i\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\infty & D \end{bmatrix}\right)$$

其中

$$A \in R_{\max}^{(n+m)\times(n+m)}, \quad B \in R_{\max}^{(n+m)\times n}, \quad D = d \cdot I_n$$

根据 $\bar{F}$ 的结构, 有 $[A\ \ B] \in P(\bar{F})$, 当且仅当

$$B = \begin{bmatrix} I_n \\ -\infty \end{bmatrix} \quad 且 \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -\infty \end{bmatrix}$$

其中

$$[A_{11}\ \ A_{12}] \in P(\bar{F}), \quad A_{21} \in P(G)$$

因此

$$\eta_i(z) = \bigwedge_{\substack{[A_{11} A_{12}] \in P(F) \\ A_{21} \in P(G)}} \mu_i\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & I_n \\ A_{21} & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & D \end{bmatrix}\right)$$

注意到在上面矩阵的优先图中, 对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$, 有一条从顶点 $n+m+i$ 到 i 的路; 在顶点 $n+m+i$ 处, 有一个权为 d 的圈。而对每个 $j = n+1, n+2, \cdots, n+m$, 由于 A_{21} 中每行至少有一个有限元素, 故必定有从某个 $1 \leq i \leq n$ 的顶点 i 到 j 的路。总之, 对每个 $i = 1, 2, \cdots, n+m$, 有

$$\eta(z) = \bigwedge_{\substack{[A_{11}\ \ A_{12}] \in P(F) \\ A_{21} \in P(G)}} d \vee \mu_i\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -\infty \end{bmatrix}\right)$$

由于运算 $\wedge$ 对 $\vee$ 成立分配律, 故应有

$$\eta_i(z) = d \vee \bigwedge_{\substack{[A_{11}\ \ A_{12}] \in P(F) \\ A_{21} \in P(G)}} \mu_i\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -\infty \end{bmatrix}\right) =$$

$$d \vee \chi_i(M)$$

所以

$$\eta(z) = \chi(M) \vee \eta(u) \qquad \square$$

从定理 2 出发, 可得一个类似于 Olsder 定理的特征值存在性定理。

定理 3 设 $x(\cdot) \in R^{n_1}, y(\cdot) \in R^{m_1}, v(\cdot) \in R^{n_2}, w(\cdot) \in R^{m_2}$。现有两个 min-max 系统

$$M_1: \begin{cases} x(k+1) = F_1(x(k), y(k)) \\ y(k+1) = G_1(x(k)) \end{cases}$$

$$M_2: \begin{cases} v(k+1) = F_2(v(k), w(k)) \\ w(k+1) = G_2(v(k)) \end{cases}$$

M_1 和 M_2 分别有特征值 λ_1 和 λ_2, 且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$。设 M 为将 M_1 和 M_2 如下连接起来的新系统

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ v(k+1) \\ w(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x(k), y(k)) \vee B \otimes v(k) \\ G_1(x(k)) \\ F_2(v(k), w(k)) \wedge C \otimes' x(k) \\ G_2(v(k)) \end{bmatrix}$$

其中: B 是极大代数矩阵且其元素全为有限, C 是极小代数矩阵且其每行至少有一有限元素。则 M 具有特征值 λ, 且 $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$。

证明 由于 B 的元素全为有限, 易知 $B \otimes v(\cdot)$ 为均匀序列(即周时各个分量相同)。又由于 M_1 有特征值, 根据定理 2, 存在实数 $\mu_1 = \chi_i(M), i = 1, 2, \cdots, n_1 + m_1$。

现已证明 $x(\cdot)$ 为均匀序列, 由于 C 中每行至少有一有限元素, 所以 M_2 的输入也是均匀序列。又因为 M_2 有特征值, 根据定理 2 的对偶, 存在实数 $\mu_2 = \chi_i(M), i = n_1 + m_1 + 1, \cdots, n_1 + m_1 + n_2 + m_2$。

再次运用定理 2 及其对偶, 有 $\mu_1 = \lambda_1 \vee \mu_2, \mu_2 = \lambda_2 \wedge \mu_1$。采用与 Olsder 定理的证明中相同的论证方法, 可证明 M 具有特征值 λ, 且 $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$。$\square$

4.3 针对广义二分系统的周时限幅器

一个分离 min-max 系统, 如果 $A = -\infty$ 且 $D = \infty$, 则它称为二分系统。现引入广义二分系统的概念, 这类系统包含了二分系统。

定义 4 一个 min-max 系统称为广义二分系统, 如果它具有下面的形式

$$\begin{cases} x(k+1) = F(y(k)) \\ y(k+1) = G(x(k)) \end{cases} \tag{7}$$

定理 4 设 $z(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$, $k \geq 0$ 为一个如式

(7) 所示的广义二分系统在有外部输入情况下的状态序列, 即

$$\begin{cases} x(k+1) = F(y(k)) \vee u(k) \\ y(k+1) = G(x(k)) \wedge v(k) \end{cases}$$

其中: $u(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 为最终周期的均匀序列, $\eta(u) = a \cdot \mathbf{1}_n$, $\eta(v) = b \cdot \mathbf{1}_n$, 且 $a \leq b$。则 $z(\cdot)$ 的周时满足

$$\eta(z) = (a \cdot \mathbf{1}_{n+m} \vee \chi(M)) \wedge b \cdot \mathbf{1}_{n+m} \qquad (9)$$

证明　根据定理 1, 不失一般性地假设 $u(k) = ka \cdot \mathbf{1}_n$, $v(k) = kb \cdot \mathbf{1}_m$。设 $z'(\cdot)$ 为系统 M 在输入序列只有 $u(\cdot)$ 的情况下的状态序列, 即

$$\begin{cases} x(k+1) = F(y(k)) \vee u(k) \\ y(k+1) = G(x(k)) \end{cases}$$

根据定理 2, 有

$$\eta(z') = a \cdot \mathbf{1}_{n+m} \vee \chi(M)$$

现将 $u(\cdot)$ 视为如下式

$$\begin{cases} x(k+1) = F(y(k)) \vee u(k) \\ y(k+1) = G(x(k)) \\ u(k+1) = u(k) + a \cdot \mathbf{1}_n \end{cases}$$

所示的自治系统 M' 的状态序列的一部分。显然

$$\chi(M') = \begin{bmatrix} a \cdot \mathbf{1}_{n+m} \vee \chi(M) \\ a \cdot \mathbf{1}_n \end{bmatrix}$$

引入一假想的输入序列 $w(\cdot) \in R^n$, $w(k) = kb \cdot \mathbf{1}_n$, 并将 $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ 作为 M' 的输入序列, 则有

$$\begin{cases} x(k+1) = F(y(k)) \vee u(k) \\ y(k+1) = G(x(k)) \wedge v(k) \\ u(k+1) = (u(k) + a \cdot \mathbf{1}_n) \wedge w(k) \end{cases}$$

由于 $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ 为均匀序列, 且 M' 的结构及输入结构满足定理 2 的对偶的条件, 所以

$$\eta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (a \cdot \mathbf{1}_{n+m} \vee \chi(M)) \wedge b \cdot \mathbf{1}_{n+m} \\ a \cdot \mathbf{1}_n \wedge b \cdot \mathbf{1}_n \end{bmatrix}$$

又由于 $a \leq b$, 所以在上面的系统中仍有 $u(k) = ka \cdot \mathbf{1}_n$。这个非自治系统的状态序列 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 就是定理 4 中所述的 z, 即有式(9) 成立。□

从定理 4 可看出, 对于广义二分系统而言, 输入 $u(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 起到了限幅的作用。定理 4 可用于研究由广义二分系统与其他系统连接而成的大系统的动态行为。

5　结　　语

本文通过对非自治非线性 DEDS 周时的研究, 推导出一个通用的计算公式, 并由此得到一系列结果: 关于分离系统特征值 Olsder 定理的一个简洁的证明, 一类具有特定结构的 min-max 系统在输入均匀序列情况下的周时公式, 以及广义二分系统的周时限幅器等。这些结果为分析由多个子系统耦合而成的大系统, 估计其周时, 检验系统是否具有特征值, 估计特征值的上下界等提供了理论工具, 因此对非线性 DEDS 的分析和综合具有重要意义。

参考文献(References):

[1] Baccelli F, Cohen G, Olsder G J, et al. *Synchronization and Linearity*[M]. New York: Wiley, 1992.

[2] Gunawardena J. Min-max functions[J]. *Discrete Event Dynamic Systems, Theory and Applications*, 1994, 4: 377-406.

[3] Gaubert S, Gunawardena J. The duality theorem for min-max functions[J]. *C R Acad Sci*, 1998, 326(1): 43-48.

[4] Olsder G J, Perennes S. Iteration of (min, max, +) functions [EB/OL]. http://citeseer.nj.nec.com/310205.html, 1997.

[5] Cheng Yiping, Zheng Dazhong. Ultimate periodicity of orbits for min-max systems[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 2002, 47(11): 1937-1940.

[6] Olsder G J. Eigenvalues of dynamic max-min systems [J]. *Discrete Event Dynamic Systems, Theory and Applications*, 1991, 1: 177-207.

[7] Kohlberg E. Invariant half-lines of nonexpansive piecewise-linear transformations[J]. *Math Oper Res*, 1980, 5(3): 366-372.

[8] Gaubert S, Gunawardena J. A non-linear hierarchy for discrete event dynamical systems[A]. *Proc 4th Workshop on Discrete Event Systems*[C]. Cagliari, 1998.