第 18 卷 第 4 期 控 制 与 决 策 2003 年 7 月
Vol 18 No. 4 Control and Decision July 2003

文章编号: 1001-0920(2003)04-0453-03

非线性时变系统的稳定性

董亚丽, 程代展, 秦化淑
(中国科学院 系统科学研究所, 北京 100080)

摘　要: 研究非线性时变系统的稳定性问题。通过引入具有齐次导数的时不变 Lyapunov 函数和近似系统的概念, 给出一般非线性时变系统的零解渐近稳定的两个充分条件。应用实例显示出所给出方法在应用中是有效和方便的。

关键词: 非线性时变系统; 稳定性; 近似系统; 时不变 Lyapunov 函数
中图分类号: O231　　**文献标识码**: A

Stability of nonlinear time-varying systems

DONG Ya-li, CHENG Dai-zhan, QIN Hua-shu
(Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: The stability of nonlinear time-varying systems is dealt with. By introducing the concepts of time-invariant Lyapunov function with homogeneous derivative and the approximate system, two sufficient conditions for asymptotic stability of general nonlinear time-varying systems at the origin are obtained. An example is presented to show that the new method is efficient and convenient in use.

Key words: Nonlinear time-varying systems; Stability; Approximate system; Time-invariant Lyapunov function

1 引　　言

在控制系统的理论研究中, 稳定性和镇定是密切相关的两个重要概念。在控制设计中, 常用的手段是基于判别稳定性的镇定方法。非线性系统的渐近稳定与镇定问题一直受到人们的关注和重视[1~5]。文献[2,3]对几类特定的非线性系统设计出特殊的非线性控制器, 使相应闭环系统成为渐近稳定系统。文献[5]通过 Lyapunov 函数方法研究了非线性时变级联系统的稳定性问题。文献[6]通过中心流形研究了非线性系统的镇定问题。

本文通过引入非线性时变系统的近似系统(由泰勒展开式中最低阶非零项组成的系统)及具有齐次导数的时不变 Lyapunov 函数等概念, 研究非线性时变系统的稳定性问题, 得到非线性时变系统在零点渐近稳定的两个充分条件, 并举例说明这种渐近稳定的判据在实际应用中是简便而有效的。

2 记号与定义

考虑如下非线性系统

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in R^n \tag{1}$$

其中: $f(x, t)$ 是光滑向量场, $f(0, t) = 0, \forall t \geq 0$。

本文使用 Z_+ 表示非负整数集。对于多指标集 $S = (s_1, \cdots, s_n) \in Z_+^n$ 及 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$, 记

$$|S| = \sum_{i=1}^{n} s_i, \quad x^S = \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{s_i}$$

$$S! = \prod_{i=1}^{n} (s_i)!$$

收稿日期: 2002-04-30; **修回日期**: 2002-08-25。
基金项目: 国家 973 基金资助项目(1998020308)。
作者简介: 董亚丽(1963—), 女, 陕西延长人, 博士生, 从事非线性控制的研究; 程代展(1946—), 男, 福建福州人, 研究员, 博士生导师, 从事非线性控制、数值方法等研究。

对于光滑函数 $F(x,t)$ 的偏导数, 记

$$\frac{\partial^{|s|}F(x,t)}{\partial x^{S}} = \frac{\partial^{|s|}F(x,t)}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_n^{s_n}}$$

引入如下定义:

定义1 1) 令 k_i 为 $f_i(x,t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 关于 x 的泰勒展开式最低阶非零项的次数。仅由式(1) 的最低阶(k_i) 非零项组成的系统称为系统(1) 的近似系统。式(1) 的近似系统可表示为

$$\dot{x}_i = g_i(x,t) = \sum_{|s|=k_i}\frac{1}{S!}\frac{\partial^{|s|}f_i(0,t)}{\partial x^{S}}x^{S}$$

$$i=1,\cdots,n \tag{2}$$

2) 如果 $k_i(i=1,\cdots,n)$ 都是奇数, 则系统(1) 称为具有奇近似系统。

定义2 设 $g_i(x,t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是关于 x 的齐次多项式, $g=(g_1,\cdots,g_n)^{\mathrm{T}}$, $V(x)$ 是正定多项式。如果李导数 L_gV 是关于 x 的齐次多项式, 则称 V 是沿 g 的具有齐次导数的时不变 Lyapunov 函数, 简记为 TLFHD。

在下面的讨论中, 假设 $k_1,\cdots,k_n$ 皆为奇数, 且

$$k_1=\cdots=k_{n_1}=k^1$$

$$k_{n_1+1}=\cdots=k_{n_1+n_2}=k^2$$

$$\vdots$$

$$k_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}=\cdots=k_{n_1+\cdots+n_r}=k^r$$

$$\sum_{i=1}^{r}n_i=n$$

易知 $f(x,t)$ 可分组为

$$f(x,t)=\mathrm{col}(f^1(x,t),\cdots,f^r(x,t))$$

这里

$$\dim(f^i(x,t))=n_i,\quad i=1,\cdots,r$$

相应地记

$$x=(x^1,\cdots,x^r)$$

$$g(x,t)=\mathrm{col}(g^1(x,t),\cdots,g^r(x,t))$$

下面给出一个典型的 TLFHD

$$g(x,t)=\mathrm{col}(g^1(x,t),\cdots,g^r(x,t))$$

任取定正整数 m, 满足

$$2m\geq\max\{k_1,\cdots,k_n\}+1$$

取 $2m^i=2m-k^i+1$, $P_i(i=1,\cdots,r)$ 为 $n_i\times n_i$ 正定矩阵, 则

$$V=\sum_{i=1}^{r}((x_1^i)^{m^i},\cdots,(x_{n_i}^i)^{m^i})\times P_i((x_1^i)^{m^i},\cdots,(x_{n_i}^i)^{m^i})^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

是沿向量场 $g(x,t)$ 的一个 TLFHD。

3 主要结果

本节讨论非线性时变系统的稳定性问题, 得到以下两个定理:

定理1 如果系统 (1) 满足下列条件:

1) 存在具有齐次导数的时不变 Lyapunov 函数 (3), 且存在函数 $b(t)>0$, 使得沿式(1) 的近似系统 (2) 的全导数 $\dot{V}(x(t))$ 满足

$$\dot{V}(x(t))\leq -b(t)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2m}$$

2) 对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta_1(\epsilon)>0$, $T(\epsilon)>0$, 使得当 $t>T$ 及 $\|x\|_2<\delta_1$ 时, 近似误差

$$\delta(x,t)=f(x,t)-g(x,t)=\mathrm{col}(\delta^1(x,t),\cdots,\delta^r(x,t))$$

满足

$$\|\delta^i(x,t)\|_2<\epsilon b(t)(\|x\|_2)^{2m-2m^i+1}$$

$$i=1,\cdots,r$$

3) 存在常数 β, 使得 $\varliminf_{t\to\infty}b(t)\geq\beta>0$。则系统 (1) 的零解是一致渐近稳定的。

证明 有限维向量空间中任意两个范数是拓扑等价的, 即存在 $c>0$ 和 $C>0$, 满足不等式

$$c\|x\|_2\leq\|x\|_{2m}\leq C\|x\|_2$$

考虑到 $DV^i(x)$ 的次数, 能找到 $M_i>0$, $\rho_i>0$, $i=1,\cdots,r$, 使得下列不等式成立[7]。

$$\|DV^i\|_2\leq M_i\|x\|_2^{2m^i-1},\quad \|x\|_2\leq\rho_i \tag{4}$$

令

$$M=\max\{M_i,i=1,\cdots,r\},\quad \epsilon=c^{2m}/2Mr$$

$$\delta_1=\delta_1(\epsilon),\quad d=\min\{\delta_1,\rho_i,i=1,\cdots,r\}$$

根据假设条件 2), 有

$$|DV(x)\delta(x,t)|\leq\sum_{i=1}^{r}\|DV^i\|_2\|\delta^i(x,t)\|_2\leq\frac{b(t)}{2}\|x\|_{2m}^{2m}$$

$$0\neq\|x\|_2<d,\quad t>T(\epsilon) \tag{5}$$

当 $t\in[0,T(\epsilon)]$ 时, 总存在 $\rho_t>0$, 使得

$$|DV(x)\delta(x,t)|<\frac{b(t)}{2}\|x\|_{2m}^{2m}$$

$$\|x\|_2<\rho_t \tag{6}$$

由连续性, 存在开区间 I_t, 使得当 $\tau\in I_t$ 时式(6) 成立。$\{I_t\}$ 是紧集 $[0,T]$ 的一个开覆盖, 因此存在一个有限子覆盖

$$\{I_{t_j}|j=1,\cdots,s\},\quad [0,T]\subset\bigcup_j I_{t_j}$$

令 $\rho=\min\{d,\rho_{t_j},j=1,\cdots,s\}$, 则式 (5) 和 (6) 均

成立。假设条件 3) 意味着存在 $T_1>0$, 当 $t>T_1$ 时, 有 $b(t)\ge\beta/2>0$。因此有

$$\dot V\big|_{(1)}=D_xV(g(x,t)+\delta(x,t))\le -b(t)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2m}+\big|DV(x)\delta(x,t)\big|\le -\frac{b(t)}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2m}<-\frac{b}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2m}$$

$$0\ne\|x\|_2<\rho \tag{7}$$

式(3) 和(7) 表明, 系统(1) 的零解是一致渐近稳定的[8]。□

利用 $\mathring{x}_i=f_i(x,t)$ 关于 x 的泰勒展式

$$\mathring{x}_i=\sum_{|s|=k_i}\frac{1}{S!}\frac{\partial^{|s|}f_i(0,t)}{\partial x^S}x^S+\sum_{|s|=k_i+1}\frac{1}{S!}\frac{\partial^{|s|}f_i(\xi_i,t)}{\partial x^S}x^S$$

$$i=1,\cdots,n$$

则有下述定理:

定理 2　如果系统(1) 满足如下条件:

1) 存在具有齐次导数的时不变 Lyapunov 函数(3), 满足

$$\dot V\big|_{(2)}\le -b(t)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2m},\quad b(t)>0$$

2) 存在正数 ρ 和函数 $e(t)$, $T_0>0$, 使当 $\|x\|<\rho$, $t>T_0$ 时, 不等式

$$\left|\frac{\partial^{|s|}f_i(x,t)}{\partial x^S}\right|\le e(t),\quad i=1,\cdots,n$$

对所有 $|S|=k_i+1$ 都成立, 且 $0<\overline{\lim_{t\to\infty}}\,e(t)\le e$;

3) $$\underline{\lim_{t\to\infty}}\,b(t)\ge b>0$$

则系统 (1) 的零解是一致渐近稳定的。

证明　首先有

$$\dot V\big|_{(1)}=D_xV(g(x,t)+\delta(x,t))=\sum_{i=1}^{r}DV^i(g^i(x,t)+\delta(x,t))\le$$

$$-b(t)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2m}+\sum_{i=1}^{r}\|DV^i\|_2\|\delta(x,t)\|_2\le$$

$$-b(t)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2m}+\sqrt{n}\,e(t)\sum_{i=1}^{r}\|DV^i\|_2\times$$

$$\sum_{|s|=k^i+1}\frac{1}{S!}\left|x^S\right|,\quad t>T_0 \tag{8}$$

记

$$\delta_i(x)=\sum_{|s|=k^i+1}\frac{1}{S!}\left|x^S\right|$$

考虑到 $DV^i(x)$ 和 $\delta_i(x)$ 的次数, 存在正常数 $M_1^i>0$, $M_2^i>0$, 以及连续函数 $P_i(\rho)$, $Q_i(\rho)$, $\rho=\|x\|_2$, $i=1,\cdots,r$, 使得[7]

$$\|DV^i(x)\|_2\le P_i(\rho)\|x\|_2^{2m^i-1},\quad \rho<M_1^i$$

$$\|\delta_i(x)\|_2\le Q_i(\rho)\|x\|_2^{2m-2m^i+1},\quad \rho<M_2^i$$

其中

$$\lim_{\rho\to0}P_i(\rho)=\text{const},\quad \lim_{\rho\to0}Q_i(\rho)=0$$

于是存在 $M_3>0$, 使得

$$P_i(\rho)Q_i(\rho)<c^{2m}b/\sqrt{n}\,8er$$

$$\rho\le M_3,\quad i=1,\cdots,r \tag{9}$$

取 $q=\min\{M_1^i,M_2^i,M_3,\ i=1,\cdots,r\}$, 则有

$$\dot V\big|_{(1)}=-b(t)\sum_{i=1}^{r}(x_i)^{2m}+\frac{b}{8e}e(t)c^{2m}\|x\|_2^{2m}\le$$

$$-b(t)\sum_{i=1}^{r}(x_i)^{2m}+\frac{b}{8e}e(t)\|x\|_{2m}^{2m},\quad \rho<q \tag{10}$$

由条件 2) 和 3) 知, 存在 $T_1>0$, $T_2>0$, 使当 $t>T_1$, $t>T_2$ 时, 分别有 $b(t)\ge b/2>0$, $e(t)<2e$。取 $T=\max\{T_0,T_1,T_2\}$, 当 $t>T$ 时, 有

$$\dot V\big|_{(1)}\le-\frac{b}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2m}+\frac{b}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2m}=$$

$$-\frac{b}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2m} \tag{11}$$

因此系统 (1) 的零解是一致渐近稳定的。□

4　应用举例

考虑如下系统

$$\begin{cases}\mathring{x}_1=-\dfrac{t^2}{4}x_1^3+\sin(t)x_2^4+\cos(t)x_3^5\\ \mathring{x}_2=-\dfrac{t^2}{4}(x_2^5-3x_2x_3^4)+\dfrac{\sin(t)}{1+t^2}x_1^6\\ \mathring{x}_3=-\dfrac{t^2}{4}(3x_2^2x_3^3+x_3^5)+\\ \qquad\dfrac{t^2\sin(t)}{1+t^2}x_2^6+\dfrac{t^3}{4+t^2}x_3^7\end{cases} \tag{12}$$

式(12) 的近似系统为

$$\begin{cases}\mathring{x}_1=\dfrac{-t^2}{4}x_1^3\\ \mathring{x}_2=-\dfrac{t^2}{4}(x_2^5-3x_2x_3^4)\\ \mathring{x}_3=-\dfrac{t^2}{4}(3x_2^2x_3^3+x_3^5)\end{cases} \tag{13}$$

选取正定多项式函数

$$V=\frac{1}{4}(x_1^4+2x_2^2+2x_3^2)$$

则有

(下转第 459 页)

5　结　　语

本文提出一种基于熵权系数与 TOPSIS 集成评价决策方法。该方法曾应用于多家招标公司的招标项目, 取得了满意的结果。信息系统建设方案的评价是非常复杂的问题, 评价过程包括对投标者的各种资质进行认证等环节, 并辅以其他方法来实现最终的中标方案。在实际的评价过程中, 会根据不同的项目内容选择一些重点指标进行评价。本文方法对于更为复杂的多级组合评价还没有应用, 因此对多级评价还需要进一步研究。

参考文献(References):

[1] 张世英, 张文泉. 技术经济预测与决策[M]. 天津: 天津大学出版社, 1994. 196-200.

[2] 杜纲, 岳松涛. 房地产开发投资决策的熵权系数优化模型[J]. 数理统计与管理, 1999, 18(1): 45-49.
(Du Gang, Yue Songtao. An optimazation model with entropy coefficients of investment decision in real estate [J]. *Application of Statistics and Management*, 1999, 18 (1): 45-49.)

[3] Evangelos Triantaphyllou. *Multi-criteria Decision Making Methods: A Comparative Study* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 18-22.

[4] 戴文战. 一种动态多目标决策模型及其应用[J]. 控制与决策, 2000, 15(2): 197-200.
(Dai Wenzhan. A new kind of model of the dynamic multiple attribute decision making based on new effective function and its application [J]. *Control and Decision*, 2000, 15(2): 197-200.)

[5] Ma J, Fan Z P, Huang L H. A subjective and objective integrated approach to determine attribute weights[J]. *European J of Operational Reseach*, 1999, 112(2): 397-404.

[6] 徐维祥, 张全寿. 信息系统项目评价 DHGF 集成法[J]. 计算机工程与应用, 2000, 5(1): 60-62.
(Xu Weixiang, Zhang Quanshou. A meta-synthesis of DHGF for evaluating information system project [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2000, 5(1): 60-62.)

(上接第 455 页)

$$\dot{V}\Big|_{(13)} = -\frac{t^2}{4}x_1^6 - \frac{t^2}{4}x_2^6 - \frac{t^2}{4}x_3^6 = -\frac{t^2}{4}\|x\|_6^6$$

因而定理 2 中的条件 1) 满足, 不难验证定理 2 中其余条件也满足。故系统(12) 的零解是一致渐近稳定的。

5　结　　语

本文探讨了非线性时变系统的稳定性问题。通过利用具有齐次导数的时不变 Lyapunov 函数和近似系统的概念和方法, 得到一般非线性系统渐近稳定充分条件的新结果。文中给出的实例表明, 新判据具有易于验证的特点。

参考文献(References):

[1] Aeyels D. A new asymptotic stability criterion for nonlinear time-variant differential equations [J]. *IEEE Trans Autom Contr*, 1998, 43(7): 968-990.

[2] Aeyels D. Stabilization of a class of nonlinear system by a smooth feedback control[J]. *Syst Contr Lett*, 1985, 5 (4): 289-294.

[3] Behtash S, Sastry D. Stabilization of nonlinear systems with uncontrollable linearization [J]. *IEEE Trans Autom Contr*, 1988, 33(6): 585-590.

[4] Isidori A. *Nonlinear Control Systems* [M]. 2nd Ed. New York: Springer-Verlag, 1989.

[5] Panteley E, Loria A. On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade[J]. *Syst Contr Lett*, 1998, 33(2): 131-138.

[6] Cheng D, Martin C. Stabilization of non-linear systems via designed center manifold [J]. *IEEE Trans Autom Contr*, 2001, 46(9): 1372-1383.

[7] Conway J B. *A Course in Functional Analysis*[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

[8] Hahn W. *Stability of Motion*[M]. New York: Springer-Verlag, 1967.