文章编号: 1001-0920(2003)04-0464-04

线性离散时滞系统滞后相关型 H∞状态反馈控制

姜偕富, 徐文立
(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘 要: 基于 Lyapunov 泛函方法, 对存在状态时滞的线性离散时间系统, 给出了滞后相关型无记忆 H_∞状态反馈控制器设计方案, 通过求解相应的线性矩阵不等式即可求得满足设计要求的控制器。

关键词: 离散时滞线性系统; 滞后相关; 渐近稳定; H_∞控制; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Delay-dependent H∞ feedback control for linear discrete time-delay system

JIANG Xie-fu, XU Wen-li
(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Based on Lyapunov functional, the problem about the delay-dependent H_∞ memoryless feedback control for linear discrete time-delay system with delayed state is discussed. The controller, which satisfied the requirement of design, can be obtained by solving linear matrix inequality (LMI).

Key words: Linear discrete time-delay system; Delay-dependent; Asymptotic stability; H_∞ control; LMI

1 引 言

近年来, 有关时滞系统的研究已受到国内外众多学者的广泛重视, 尤其是对时滞系统的滞后相关型控制器设计等方面的研究更受到人们的极大关注, 并取得了一系列研究成果[1~3]。Lyapunov 泛函方法已被证明是对时滞系统稳定性分析与综合的一种有效方法。与连续时滞系统相比, 有关离散时滞系统稳定化控制方面的文章并不多见[4~6], 尤其是滞后相关型控制器设计方案更是如此。

由于连续时间系统和离散时间系统的控制与设计具有很大差别, 随着计算机控制技术的迅速发展, 从工业过程控制的实际问题出发, 对离散时间系统控制方法的研究尤为重要。因此, 本文以具有状态时滞的线性离散时滞系统为研究对象, 基于适当的 Lyapunov 泛函, 给出滞后相关型 H_∞状态反馈控制器设计方案, 通过求解一个线性矩阵不等式即可求得满足设计要求的控制器。

2 问题的提出

考虑如下具有状态时滞的线性离散时滞系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_1x(k-d) + \\ \qquad B_1w(k) + B_2u(k) \\ z(k) = \begin{bmatrix} Cx(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \\ x(k) = \varphi(k), \quad -d \leq k \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

式中: $x(k) \in R^n$ 为系统状态向量, $u(k) \in R^m$ 为系统控制输入向量, $w(k) \in R^l$ 为系统干扰输入向量, $z(k) \in R^p$ 为系统控制输出向量, $d > 0$ 为系统的滞后常数, $\varphi(k) \in R^n$为系统的初始向量函数, A, A_1,

收稿日期: 2002-03-21; 修回日期: 2002-04-27。
基金项目: 国家自然科学基金重点研究项目(69934010); 国家"十五"计划重点研究项目(2001BA609A)。
作者简介: 姜偕富(1963—), 男, 江苏兴化人, 博士, 从事时滞系统的鲁棒控制、H_∞控制及自适应控制等研究; 徐文立(1947—), 男, 江苏扬州人, 教授, 博士生导师, 博士, 从事自动控制、计算机视觉及机器人等研究。

B_1, B_2, C 分别为具有适当维数的已知常数矩阵。

本文的目的是: 对于系统(1), 设计无记忆状态反馈控制

$$u(k) = Kx(k) \tag{2}$$

使得如下形式的闭环系统是渐近稳定的, 且 H_∞ 范数小于给定的界 γ。

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + B_2K)x(k) + \\ \qquad A_1x(k-d) + B_1w(k) \\ z(k) = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} x(k) \\ x(k) = \varphi(k), \quad -d \le k \le 0 \end{cases} \tag{3}$$

其中 K 为待求的控制器增益矩阵。

在给出主要结果之前, 首先给出如下引理:

引理 1[7]　对于任意适当维数的矩阵 X 和 Y, 有

$$X^{\mathrm T}Y + Y^{\mathrm T}X \le X^{\mathrm T}PX + Y^{\mathrm T}P^{-1}Y, \quad \forall P > 0$$

引理 2[8] (Schur 补引理)　对于定义在 R^n 上的矩阵 $Q^{\mathrm T}(x) = Q(x), R^{\mathrm T}(x) = R(x)$ 以及 $S(x)$, 线性矩阵不等式(LMI)

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^{\mathrm T}(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

等价于

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^{\mathrm T}(x) > 0$$

或

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S^{\mathrm T}(x)R^{-1}(x)S(x) > 0$$

引理 3　对于任意给定的常数 $\alpha \ge \beta > 0$, R^n 上的矩阵 $x(j)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ 及正定矩阵 $Q > 0$, 有

$$\Big(\sum_{j=\alpha}^{\beta} x(j)\Big)^{\mathrm T} Q \Big(\sum_{j=\alpha}^{\beta} x(j)\Big) \le (\beta - \alpha + 1)\sum_{j=\alpha}^{\beta} x^{\mathrm T}(j)Qx(j)$$

证明　根据引理 1, 有

$$\Big(\sum_{j=\alpha}^{\beta} x(j)\Big)^{\mathrm T} Q \Big(\sum_{j=\alpha}^{\beta} x(j)\Big) = \sum_{j=\alpha}^{\beta}\sum_{i=\alpha}^{\beta} x^{\mathrm T}(j)Qx(i) \le$$
$$\sum_{j=\alpha}^{\beta}\sum_{i=\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[x^{\mathrm T}(j)Qx(j) + x^{\mathrm T}(i)Qx(i)] =$$
$$\frac{(\beta - \alpha + 1)}{2}\Big(\sum_{i=\alpha}^{\beta} x^{\mathrm T}(i)Qx(i) + \sum_{j=\alpha}^{\beta} x^{\mathrm T}(j)Qx(j)\Big) =$$
$$(\beta - \alpha + 1)\sum_{j=\alpha}^{\beta} x^{\mathrm T}(j)Qx(j) \qquad \square$$

3　主要结果

显然, 闭环系统(3) 可转化为如下形式

$$\begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}x(k) + B_1w(k) - \\ \qquad A_1\sum_{j=1}^{d}[x(k+1-j) - x(k-j)] \\ z(k) = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} x(k) \\ x(k) = \varphi(k), \quad -d \le k \le 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\tilde{A} = A + B_2K + A_1$。

对于闭环系统(4), 取 Lyapunov 泛函为如下形式

$$V_k = x^{\mathrm T}(k)Px(k) + (d+1)\sum_{j=2}^{d}\sum_{s=k-j+1}^{k-1} f(s) + 2(d^2 + d)x^{\mathrm T}(k-1)A_1^{\mathrm T}PA_1x(k-1) \tag{5}$$

其中

$$f(s) = [x(s) - x(s-1)]^{\mathrm T} \times A_1^{\mathrm T}PA_1[x(s) - x(s-1)]$$

记 $\xi(j,k) = x(k+1-j) - x(k-j)$, 则当外部干扰输入 $w(k) = 0$ 时, 根据引理 1 和引理 3 可得

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k =$$
$$x^{\mathrm T}(k+1)Px(k+1) - x^{\mathrm T}(k)Px(k) +$$
$$(d+1)\Big\{\sum_{j=2}^{d}\sum_{s=k-j+2}^{k} f(s) - \sum_{j=2}^{d}\sum_{s=k-j+1}^{k-1} f(s)\Big\} +$$
$$2(d^2 + d)x^{\mathrm T}(k)A_1^{\mathrm T}PA_1x(k) -$$
$$2(d^2 + d)x^{\mathrm T}(k-1)A_1^{\mathrm T}PA_1x(k-1) =$$
$$x^{\mathrm T}(k)\tilde{A}^{\mathrm T}P\tilde{A}x(k) - x^{\mathrm T}(k)Px(k) -$$
$$2x^{\mathrm T}(k)\tilde{A}^{\mathrm T}PA_1\sum_{j=1}^{d}\xi(k,j) +$$
$$\Big(\sum_{j=1}^{d}\xi(k,j)\Big)^{\mathrm T}A_1^{\mathrm T}PA_1\sum_{j=1}^{d}\xi(k,j) +$$
$$(d+1)\sum_{j=2}^{d}\{[x(k) - x(k-1)]^{\mathrm T}A_1^{\mathrm T}PA_1[x(k) - x(k-1)] - \xi(k,j)^{\mathrm T}A_1^{\mathrm T}PA_1\xi(k,j)\} +$$
$$2(d^2 + d)x^{\mathrm T}(k)A_1^{\mathrm T}PA_1x(k) -$$
$$2(d^2 + d)x^{\mathrm T}(k-1)A_1^{\mathrm T}PA_1x(k-1) \le$$
$$(1+d)x^{\mathrm T}(k)\tilde{A}^{\mathrm T}P\tilde{A}x(k) - x^{\mathrm T}(k)Px(k) +$$
$$(1+d)\sum_{j=1}^{d}\xi(k,j)^{\mathrm T}A_1^{\mathrm T}PA_1\xi(k,j) +$$
$$(d-1)(d+1)[x(k) - x(k-1)]^{\mathrm T} \times A_1^{\mathrm T}PA_1[x(k) - x(k-1)] -$$
$$(d+1)\sum_{j=2}^{d}\xi(k,j)^{\mathrm T}A_1^{\mathrm T}PA_1\xi(k,j) +$$
$$2(d^2 + d)x^{\mathrm T}(k)A_1^{\mathrm T}PA_1x(k) -$$

$$2(d^2+d)x^{\mathrm T}(k-1)A_1^{\mathrm T}PA_1x(k-1)=$$
$$(1+d)x^{\mathrm T}(k)\tilde A^{\mathrm T}P\tilde A x(k)-x^{\mathrm T}(k)Px(k)+$$
$$(d^2+d)\xi(k,j)^{\mathrm T}A_1^{\mathrm T}PA_1\xi(k,j)+$$
$$2(d^2+d)x^{\mathrm T}(k)A_1^{\mathrm T}PA_1x(k)-$$
$$2(d^2+d)x^{\mathrm T}(k-1)A_1^{\mathrm T}PA_1x(k-1)\le$$
$$x^{\mathrm T}(k)((1+d)\tilde A^{\mathrm T}P\tilde A+$$
$$4(d^2+d)A_1^{\mathrm T}PA_1-P)x(k):=$$
$$x^{\mathrm T}(k)\Phi x(k)$$

根据上面的推导过程可以看出, 当矩阵不等式

$$\Phi<0 \tag{6}$$

成立时, 有 $\Delta V_k<0$, 由此可得闭环系统(4) 是渐近稳定的。

其次, 假设系统(1) 的初始状态为零, 这时引入性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}[z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2w^{\mathrm T}(k)w(k)] \tag{7}$$

那么对于任意的 $w(k)\in l_2[0,\infty)$, 有

$$J\le\sum_{k=0}^{\infty}[z^{\mathrm T}(k)z(k)-\gamma^2w^{\mathrm T}(k)w(k)+\Delta V_k]\le$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\{x^{\mathrm T}(k)(\Phi+C^{\mathrm T}C+K^{\mathrm T}K)x(k)+$$
$$x^{\mathrm T}(k)\tilde A^{\mathrm T}PB_1w(k)+w^{\mathrm T}(k)B_1^{\mathrm T}P\tilde Ax(k)+$$
$$w^{\mathrm T}(k)B_1^{\mathrm T}PB_1w(k)-\gamma^2w^{\mathrm T}(k)w(k)\}=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}[x^{\mathrm T}(k)\quad w^{\mathrm T}(k)]\Xi\begin{bmatrix}x(k)\\ w(k)\end{bmatrix}$$

其中

$$\Xi=\begin{bmatrix}\Phi+C^{\mathrm T}C+K^{\mathrm T}K & \tilde A^{\mathrm T}PB_1\\ B_1^{\mathrm T}P\tilde A & B_1^{\mathrm T}PB_1-\gamma^2I\end{bmatrix}$$

由此可得如下结论:

定理 1 如果存在矩阵 K 及正定矩阵 $P>0$, 使得如下矩阵不等式成立

$$\Xi<0 \tag{8}$$

则采用无记忆状态反馈控制(2) 时, 线性离散时滞系统(1) 是渐近稳定的, 且满足相应的 H_∞ 性能指标 γ。

注 1 由矩阵不等式(8) 可以看出, 上面所给出的 H_∞ 状态反馈控制器设计方案是滞后相关的。同时定理 1 表明, 上述控制方案对 $(A+A_1,B)$ 可控但 (A,B) 不可控的离散时滞系统来说尤为有效。

注 2 式(8) 只是一个一般的矩阵不等式, 还不能直接求解, 因而有必要将其转化为可由 MATLAB 中的 LMI 工具箱直接求解的线性矩阵不等式。根据 Schur 补引理 2, 矩阵不等式(6) 可化为如下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}C^{\mathrm T}C-P & 0 & (A+A_1+B_2K)^{\mathrm T} & d(A+A_1+B_2K)^{\mathrm T} & 4(d+d^2)A_1^{\mathrm T} & K^{\mathrm T}\\ 0 & -\gamma^2I & B_1^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0\\ A+A_1+B_2K & B_1 & -P^{-1} & 0 & 0 & 0\\ d(A+A_1+B_2K) & 0 & 0 & -dP^{-1} & 0 & 0\\ 4(d+d^2)A_1 & 0 & 0 & 0 & -4(d+d^2)P^{-1} & 0\\ K & 0 & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}<0 \tag{9}$$

在式(9) 的两端同时乘以

$$\mathrm{diag}(X,I,I,I,I,I)$$

并根据 Schur 补引理 2 可得式(9) 等价于如下线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}-X & 0 & \hat A^{\mathrm T} & d\hat A^{\mathrm T} & 4(d^2+d)XA_1^{\mathrm T} & Y^{\mathrm T} & XC^{\mathrm T}\\ 0 & -\gamma^2I & B_1^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hat A & B_1 & -X & 0 & 0 & 0 & 0\\ d\hat A & 0 & 0 & -dX & 0 & 0 & 0\\ 4(d^2+d)A_1X & 0 & 0 & 0 & -4(d^2+d)X & 0 & 0\\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0\\ CX & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}<0 \tag{10}$$

其中: $\hat A=(A+A_1)X+B_2Y, X=P^{-1}, Y=KP^{-1}$。由此可有如下推论:

推论 1 如果存在矩阵 Y 及对称正定矩阵 $X>0$, 使得线性矩阵不等式(10) 成立, 则采用无记忆状态反馈控制(2) 时, 时滞系统(1) 是渐近稳定的, 且 H_∞ 范数小于给定的界 γ。这时控制器增益矩阵可取为 $K=YX^{-1}$。

当时滞参数 $d=0$ 时, 根据定理 1 的结论可得如

下推论:

推论 2　如果存在矩阵 K 及正定矩阵 $P > 0$, 使得如下 Riccati 矩阵不等式成立

$$(A + A_1 + B_2K)^{\mathrm{T}}P(A + A_1 + B_2K) - P < 0 \tag{11}$$

则采用无记忆状态反馈控制(2) 时, 线性离散时滞系统(1) 是渐近稳定的。

注 3　由推论 2 可以看出, 当时滞参数 $d = 0$ 时, 所得结论与无时滞线性系统是一致的; 而对于一般的滞后无关型控制器设计方案来说, 则得不到类似的结论。

4　结　　语

本文基于适当的 Lyapunov 泛函, 对于存在状态时滞的线性离散时滞系统, 给出了滞后相关型 H_∞ 状态反馈控制器设计方案, 仅需求解一个相应的线性矩阵不等式即可求得满足设计要求的控制器, 且无需调整任何参数。当滞后常数较小时(与系统参数相比较而言) 具有较小的保守性。

参考文献(References):

[1] Vladimir B Kolmanovskii, Jean Pierre Richard. Stability of some linear systems with delays[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1999, 44(5): 984-989.

[2] Bohyung Lee, Jang Gyu Lee. Robust stability and stabilization of linear delayed systems with structured uncertainty[J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1149-1154.

[3] Cheng Chuwang. Decentralized robust H_∞ control of uncertain delay large-scale systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(3): 361-366.

[4] Jong Hae Kim, Hong Bae Park. H_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system[J]. *Automatica*, 1999, 35: 1443-1451.

[5] Xu Shengyuan, Lam James, Yang Chengwu. Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 43: 77-84.

[6] Yu Li, Feng Hao. Guaranteed cost control of discrete-time uncertain time-delay systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(3): 392-396.

[7] Cao Yongyan, Sun Youxian Cheng Chuwang. Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1998, 43(11): 1608-1612.

[8] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

(上接第 463 页)

参考文献(References):

[1] Utkin V I. Variable structure systems with sliding modes[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1977, 22(20): 212-222.

[2] Furuta K. Sliding mode control of variable structure control systems[J]. *System Control Letters*, 1990, 14(2): 145-152.

[3] 高为炳. 离散时间系统的变结构控制[J]. 自动化学报, 1995, 21(2): 154-161.
(Cao W B. Variable structure control of discrete-time systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1995, 21(2): 154-161.)

[4] 姚琼荟, 黄继起, 吴汉松. 变结构控制系统[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1997.

[5] 张科, 周凤岐. 不确定性多变量系统的全程滑模变结构控制方案设计[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(2): 221-224.
(Zhang K, Zhou F Q. Design of global sliding-mode variable structure control for uncertain multivariable linear systems[J]. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(2): 221-224.)

[6] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[7] 高为炳, 程勉. 变结构控制的品质控制[J]. 控制与决策, 1989, 4(4): 1-6.
(Gao W B, Cheng M. Quality of variable structure control systems[J]. *Control and Decision*, 1989, 4(4): 1-6.)