第 18 卷 第 4 期
Vol. 18 No. 4

控 制 与 决 策
Control and Decision

2003 年 7 月
July 2003

文章编号: 1001-0920(2003)04-0392-06

时变系统具有 MT-滤波器的反推自适应控制

解学军[1], 吴昭景[2], 张嗣瀛[2]
(1. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165; 2. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 研究线性时变系统具有 MT-滤波器的反推自适应控制问题。给出了具有 MT-滤波器和 σ 修正自适应律的反推自适应控制器的设计,分析了闭环系统的稳定性和跟踪性能。同已有文献相比,难点在于误差系统的构造,并且稳定性的证明更加复杂。

关键词: MT-滤波器; 反推自适应控制; σ-修正自适应律
中图分类号: TP13 文献标识码: A

Backstepping adaptive control with MT-filter for time-varying systems

XIE Xue-jun[1], WU Zhao-jing[2], ZHANG Si-ying[2]
(1. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu 273165, China; 2. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: For linear time-varying plants, the problem of backstepping adaptive control with MT-filter is studied. The design of the backstepping adaptive controller with MT-filter and σ-modified adaptive law is given. The analysis of both stability and tracking performance of closed-loop plant is discussed. Compared with the existing references, the difficulty of this work is the construction of the error plant, meanwhile the proof of stability is more complicated.

Key words: MT-filter; Backstepping adaptive control; σ-modified adaptive law

1 引 言

在许多实际控制问题中, 受控对象的数学模型常常是时变参数模型, 这不仅给分析和设计自适应控制器增加了难度, 而且给闭环系统的稳定性分析带来许多困难。近年来关于这一问题的研究参见文献[1～5]。

文献[1]将具有 MT-滤波器的反推设计方法同具有交换 σ-修正的自适应律结合起来,研究时变系统的自适应控制问题。文献[6]指出, 由于 K-滤波器和 MT-滤波器具有不同的优缺点, 因此研究这两种滤波器的输出反馈自适应设计方法是很有意义的。

本文研究线性时变系统具有 MT-滤波器的反推自适应控制问题, 给出了闭环系统的稳定性和跟踪性能分析。同文献[1]相比, 本文的重点和难点在于误差系统的构造, 并且稳定性的证明更加复杂。

2 问题的提出

考虑如下时变系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - a(t)y(t) + \begin{bmatrix} 0_{\rho-1} \\ b(t) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

其中

收稿日期: 2002-01-29; 修回日期: 2002-08-08。
基金项目: 山东省自然科学基金资助项目(Q2002G02, Y2002G01)
作者简介: 解学军(1968—), 男, 山东崂山人, 教授, 博士后, 从事复杂系统、自适应控制的研究; 张嗣瀛(1925—), 男, 山东章丘人, 中国科学院院士, 教授, 博士生导师, 从事微分对策、复杂控制系统等研究。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & I_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
$$a(t)^{\mathrm{T}} = [a_{n-1}(t), \cdots, a_0(t)]$$
$$b(t)^{\mathrm{T}} = [b_m(t), \cdots, b_0(t)]$$

$a_i(t)(i = 0, \cdots, n-1)$ 和 $b_j(t)(j = 0, \cdots, m)$ 是未知的时变参数, I_{n-1} 为单位向量, $0_{\rho-1} \in R^{\rho-1}$ 为零向量, $u(t)$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统的输入、状态和输出, $\rho = n - m$ 为相对阶。

注 1　通过 Lyapunov 变换, 一大类线性时变系统都能化为式(2.1) 的形式。

对系统(2.1) 作如下假设:

1) $b_m(t)$ 的符号已知, 且存在常数 $\delta > 0$, 使得 $|b_m(t)| > \delta, \forall t \geq 0$;

2) 多项式 $B_t(s) = b_m(t)s^m + \cdots + b_1(t)s + b_0(t)$ 是一致 Hurwitz 的, 即 $B_t(s)$ 的所有零点 $z_i(t)(i = 1, \cdots, m)$ 满足 $\mathrm{Re}(z_i(t)) \leq -\delta', \forall t \geq 0, \delta' > 0$;

3) $a(t)$ 和 $b(t)$ 是可微且有界的, 即存在参数 $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$, 使得 $|\dot{a}(t)| \leq \mu_1, |\dot{b}(t)| \leq \mu_2$, 且其导数分段连续和有界;

4) 参考信号 $y_r(t)$ 满足 $y_r(t)$ 和 $y_r^{(i)}(t)(i = 1, \cdots, \rho)$ 都有界。

控制目标是设计一控制律和参数 $\theta(t) = [b^{\mathrm{T}}(t), a^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$ 的自适应律, 使得:

1) 闭环系统的所有信号都有界;

2) 输出跟踪误差 $y(t) - y_r(t)$ 渐近趋向充分小。

3　具有 MT-滤波器的反推自适应控制器的设计

将系统(2.1) 表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + F(y(t), u(t))^{\mathrm{T}}\theta(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

其中

$$\begin{cases} F(y(t), u(t))^{\mathrm{T}} = \\ \left[\begin{bmatrix} 0_{(\rho-1)\times(m+1)} \\ I_{m+1} \end{bmatrix} u(t), \; -I_n y(t)\right] \\ \theta(t) = \begin{bmatrix} b(t) \\ a(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3.2}$$

考虑滤波器

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_l\xi, \quad \xi \in R^{n-1} \\ \dot{\Omega}^{\mathrm{T}} = A_l\Omega^{\mathrm{T}} + B_lF(y, u)^{\mathrm{T}} \\ \Omega \in R^{P\times(n-1)}, \quad P = m + n + 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{cases} A_l = \begin{bmatrix} -\bar{l} & I_{n-2} \\ & 0 \; \cdots \; 0 \end{bmatrix} \\ B_l = [-\bar{l} \quad I_{n-1}], \quad l = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{l} \end{bmatrix} \\ \bar{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3.4}$$

注意, 这里设计的 l 要求 $L(s) = s^{n-1} + l_1s^{n-2} + \cdots + l_{n-1}$ 和 $B_t(s)$ 一致互质, 即对所有 $t \geq 0$, $B_t(s)$ 和 $L(s)$ 互质。

定义

$$\chi = x - \begin{bmatrix} 0 \\ \xi + \Omega^{\mathrm{T}}\theta \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

由 θ 是时变参数和式(3.2) ～(3.5), 系统(3.1) 可化为如下形式

$$\begin{cases} \dot{\chi} = A\chi + l(\xi_1 + \omega^{\mathrm{T}}\theta) - \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega^{\mathrm{T}}\dot{\theta} \end{bmatrix} \\ y = \chi_1 \end{cases} \tag{3.6}$$

其中 $\omega = F_{(1)} + \Omega_{(1)}$, $F^{\mathrm{T}}_{(1)}$ 和 $\Omega^{\mathrm{T}}_{(1)}$ 分别是 F^{T} 和 Ω^{T} 的第 1 行。

下面利用式(3.2) 的形式进一步降低 Ω-滤波器(3.3) 的阶次。取

$$\Omega^{\mathrm{T}} = [v_m, \cdots, v_1, v_0, E] \tag{3.7}$$

由式(3.2), (3.3) 和(3.7) 得

$$\begin{cases} \dot{v}_j = A_lv_j + B_le_{n-j}u \\ v_j \in R^{n-1}, \quad j = 0, \cdots, m \end{cases} \tag{3.8}$$

其中 $e_{n-j} \in R^n$ 表示第 $n-j$ 行的元素为 1, 其他元素为 0。考虑如下滤波器

$$\dot{\lambda} = A_l\lambda + e'_{n-1}u, \quad \lambda \in R^{n-1} \tag{3.9}$$

其中 $e'_{n-1} = (0, \cdots, 0, 1)^{\mathrm{T}} \in R^{n-1}$。由 $A_l^je'_{n-1} = B_le_{n-j}$ 及

$$v_j = A_l^j\lambda, \quad j = 0, \cdots, m \tag{3.10}$$

知 v_j 可由式(3.9) 实现。由式(3.2), (3.3), (3.7) 得 $\dot{E} = A_lE - B_lIy$。定义 $E = [E_{n-1}, \cdots, E_0]$, 则

$$\begin{cases} \dot{E}_j = A_lE_j - B_le_{n-j}y \\ E_j \in R^{n-1}, \quad j = 0, \cdots, n-1 \end{cases} \tag{3.11}$$

由式(3.11) 及

$$E_j = -A_l^j\bar{\eta}, \quad j = 0, \cdots, n-1 \tag{3.12}$$

知 E_j 可由如下滤波器实现

$$\begin{cases} \dot{\bar{\eta}} = A_l\bar{\eta} + e'_{n-1}y \\ \bar{\eta} \in R^{n-1}, \quad e'_{n-1} \in R^{n-1} \end{cases} \tag{3.13}$$

由式(3.7),(3.10)和(3.12)得

$$\Omega^{\mathrm{T}} = [A_l^m\lambda, \cdots, \lambda, E] =$$
$$[A_l^m\lambda, \cdots, \lambda, -A_l^{n-1}\bar{\eta}, \cdots, -A_l\bar{\eta}, -\bar{\eta}] \tag{3.14}$$

对于式(3.6),由于θ是未知的,引入观测器

$$\dot{\hat{\chi}} = A\hat{\chi} + K(y - \hat{\chi}_1) + l(\xi_1 + \omega^{\mathrm{T}}\hat{\theta}) + k_0|\omega|^2 l(y - \hat{\chi}_1) \tag{3.15}$$

其中

$$K = (A + c_0 I)l, \quad A_0 = A - Ke_1^{\mathrm{T}}$$
$$\det(sI - A_0) = (s + c_0)L(s)$$

即

$$e_1^{\mathrm{T}}(sI - A_0)^{-1}l = \frac{1}{s + c_0} \tag{3.16}$$

定义观测器误差

$$\epsilon = \chi - \hat{\chi} \tag{3.17}$$

由式(3.6),(3.15),(3.17),$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$和$A_0 = A - Ke_1^{\mathrm{T}}$,得观测器误差方程

$$\dot{\epsilon} = (A_0 - k_0|\omega|^2 l e_1^{\mathrm{T}})\epsilon + l\omega^{\mathrm{T}}\tilde{\theta} - \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega^{\mathrm{T}}\dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

下面给出反推自适应控制器的设计。由式(3.6),(3.7)和(3.17)得

$$\dot{y} = \dot{\chi}_1 = \chi_2 + \xi_1 + \omega^{\mathrm{T}}\theta =$$
$$\epsilon_2 + \hat{\chi}_2 + \xi_1 + \omega^{\mathrm{T}}\theta =$$
$$b_m v_{m,1} + \epsilon_2 + \hat{\chi}_2 + \xi_1 + \bar{\omega}^{\mathrm{T}}\theta \tag{3.19}$$

其中

$$\begin{cases} \omega = [v_{m,1}, v_{m-1,1}, \cdots, v_{0,1}, E_{(1)} - ye_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ \bar{\omega} = [0, v_{m-1,1}, \cdots, v_{0,1}, E_{(1)} - ye_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{3.20}$$

$E_{(1)}$是E的第1行。由式(3.8)和(3.19)得系统

$$\begin{cases} \dot{y} = b_m v_{m,1} + \epsilon_2 + \hat{\chi}_2 + \xi_1 + \bar{\omega}^{\mathrm{T}}\theta \\ \dot{v}_{m,i} = -l_i v_{m,1} + v_{m,i+1}, \quad i = 1, \cdots, \rho - 2 \\ \dot{v}_{m,\rho-1} = -l_{\rho-1}v_{m,1} + v_{m,\rho} + u \end{cases} \tag{3.21}$$

类似于文献[6]的推导,选取控制律

$$u = \alpha_\rho - v_{m,\rho} + \hat{e}y_r^{(\rho)} \tag{3.22}$$

其中z_i, α_i和τ_i($1 \le i \le \rho$)定义如下

$$\begin{cases} z_1 = y - y_r \\ z_i = v_{m,i-1} - \hat{e}y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1} \end{cases} \tag{3.23a}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \hat{e}\bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 - \hat{\chi}_2 - \xi_1 - \bar{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{\theta} \\ \alpha_i = \\ -\hat{b}_i z_{i-1} - c_i z_i - d_i\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_i + \\ l_{i-1}v_{m,1} + \left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{e}} + y_r^{(i-1)}\right)\dot{\hat{e}} + \\ \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}(\hat{\chi}_2 + \xi_1 + \bar{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{\theta}) + \\ \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\chi}}[A\hat{\chi} + K(y - \hat{\chi}_1) + \\ l(\xi_1 + \omega^{\mathrm{T}}\hat{\theta}) + k_0|\omega|^2 l(y - \hat{\chi}_1)] + \\ \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\xi}A_l\xi + \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\bar{\eta}}(A_l\bar{\eta} + e'_{n-1}y) + \\ \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}}\Gamma\tau_i + \sum_{j=1}^{m+i-2}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\lambda_j}(-l_1\lambda_1 + \\ \lambda_{j+1}) + \sum_{j=1}^{m+i-2}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j-1)}}y_r^{(j)} + \sum_{j=1}^{m+i-2}\sigma_{ji}z_j \end{cases} \tag{3.23b}$$

$$\begin{cases} \tau_0 = v\omega\epsilon_1 \\ \tau_1 = \tau_0 + (\omega - \hat{e}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1)z_1 - \sigma_\theta\hat{\theta} \\ \tau_i - \tau_{i-1} = \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\omega z_i \end{cases} \tag{3.23c}$$

由式(3.22)得闭环系统

$$\dot{z} = A_z(z,t)z + W_\epsilon(z,t)\epsilon_2 +$$
$$W_\theta(z,t)^{\mathrm{T}}\tilde{\theta} - b_m(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1\tilde{e} \tag{3.24}$$

其中

$$A_z + A_z^{\mathrm{T}} =$$
$$2\begin{bmatrix} -c_1 - d_1 & & & \\ & -c_2 - d_2\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -c_\rho - d_\rho\left(\frac{\partial\alpha_{\rho-1}}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

$$\begin{cases} W_\epsilon = \left[1, -\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}, \cdots, -\frac{\partial\alpha_{\rho-1}}{\partial y}\right]^{\mathrm{T}} \\ W_\theta^{\mathrm{T}} = W_\epsilon\omega^{\mathrm{T}} - \hat{e}(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1e_1^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{3.26}$$

自适应律取

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}} = \Gamma(W_\theta(z,t)z + v\omega\epsilon_1) - \Gamma\sigma_\theta\hat{\theta} \\ \dot{\hat{e}} = -\gamma\,\mathrm{sgn}(b_m)(\dot{y}_r + \bar{\alpha}_1)e_1^{\mathrm{T}}z - \gamma\sigma_l\hat{e} \end{cases} \tag{3.27}$$

其中:$\Gamma = \Gamma^{\mathrm{T}} > 0$, $\gamma > 0$是自适应增益,而

$$\sigma_\theta = \begin{cases} 0, & |\hat{\theta}| \le M_\theta \\ \sigma_{s\theta}, & |\hat{\theta}| > M_\theta \end{cases}, \quad \sigma_l = \begin{cases} 0, & |\hat{e}| \le M_e \\ \sigma_{sl}, & |\hat{e}| > M_e \end{cases}$$

$\sigma_{s\theta}, \sigma_{sl}, M_\theta, M_l$ 均为大于零的常数。式(3.3), (3.9), (3.13), (3.22), (3.23) 和(3.27) 构成了具有 MT-滤波器的反推自适应控制器。

注 2　对于系统(3.21), 采用类似于文献[6] 的方法, 可得控制律(3.22) 和闭环系统(3.24)。

4　性能分析

在给出主要结果之前, 首先考虑误差系统。引入相似变换

$$\begin{bmatrix}\epsilon_1\\ \eta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e_1^{\mathrm T}\\ T\end{bmatrix}\epsilon \tag{4.1}$$

其中: $\eta = T\epsilon, T = [A_l e_1', I_{n-1}]$。显然, T 满足如下性质

$$\begin{cases}T = [A_l, e_{n-1}'] \\ Tl = 0, \quad TA_0 = A_l T\end{cases} \tag{4.2}$$

其中 $e_{n-1}' = (0, \cdots, 0, 1)^{\mathrm T} \in R^{n-1}$。由式(3.18), (4.1) 和(4.2) 得

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= T\overset{\circ}{\epsilon} = \\ &T\left[(A_0 - k_0|\omega|^2 l e_1^{\mathrm T})\epsilon + l\omega^{\mathrm T}\tilde{\theta} - \begin{bmatrix}0\\ \Omega^{\mathrm T}\dot{\theta}\end{bmatrix}\right] = \\ &A_l T\epsilon - T\begin{bmatrix}0\\ \Omega^{\mathrm T}\dot{\theta}\end{bmatrix} = A_l\eta - T\begin{bmatrix}0\\ \Omega^{\mathrm T}\dot{\theta}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.3}$$

由式(3.18), (4.1), (4.2) 和 $K = (A + c_0 I)l$ 得

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\epsilon}_1 = &-(c_0 + k_0|\omega|^2)\epsilon_1 + \\ &\omega^{\mathrm T}\tilde{\theta} + \epsilon_2 - l_1\epsilon_1 = \\ &-(c_0 + k_0|\omega|^2)\epsilon_1 + \omega^{\mathrm T}\tilde{\theta} + \eta_1\end{aligned} \tag{4.4}$$

类似于文献[6] 的 MT-滤波器设计, 定义 $\dot{\eta}_r = A_l\eta_r + e_{n-1}' y_r, \tilde{\eta} = \eta - \eta_r$。由式(3.13) 和假设 2) 得

$$\dot{\tilde{\eta}} = A_l\tilde{\eta} + e_{n-1}' z_1 \tag{4.5}$$

由式(3.2), (3.5), (3.7), (3.14) 和(3.17) 得

$$\begin{aligned}x = &\chi + \begin{bmatrix}0\\ \xi + \Omega^{\mathrm T}\theta\end{bmatrix} = \\ &\epsilon + \hat{\chi} + \begin{bmatrix}0\\ \xi + \Omega^{\mathrm T}\theta\end{bmatrix} = \\ &\epsilon + \hat{\chi} + \begin{bmatrix}0\\ \xi + B_l(A_l)\lambda + Ea\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.6}$$

定义

$$T_1 = [A_b^{\rho}e_1, \cdots, A_b e_1, I_m]$$

$$A_b = \begin{bmatrix}-b_{m-1}/b_m & & I \\ \vdots & & \vdots \\ -b_0/b_m & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

则由式(4.6) 和(4.7) 得

$$\begin{aligned}\zeta = &T_1 x = \\ &T_1\epsilon + T_1\hat{\chi} + T_1\begin{bmatrix}0\\ \xi + B_l(A_l)\lambda + Ea\end{bmatrix} = \\ &T_1\epsilon + T_1\hat{\chi} + T_2(\xi + B_l(A_l)\lambda + Ea)\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中 $T_2 = [A_b^{\rho-1}e_1, \cdots, A_b e_1, I_m]$。由式(2.1) 和文献[6] 知

$$\dot{\zeta} = T_1\overset{\circ}{x} + \dot{T}_1 x = A_b\zeta + b_b y + \dot{T}_1 x \tag{4.9}$$

其中

$$b_b = T\left[A^{\rho}\begin{bmatrix}0\\ b\end{bmatrix} - a\right]$$

则有

$$\dot{\tilde{\zeta}} = A_b\tilde{\zeta} + b_b z_1 + \dot{T}_1 x \tag{4.10}$$

其中: $\dot{\zeta}_r = A_b\zeta_r + b_b y_r, \tilde{\zeta} = \zeta - \tilde{\zeta}$。定义 $\Psi = T\hat{\chi}$, 则由文献[6] 得

$$\dot{\Psi} = A_l\Psi + A_l l y \tag{4.11}$$

由式(3.4) 得

$$\dot{\tilde{\Psi}} = A_l\tilde{\Psi} - A_l^2 e_1 z_1 \tag{4.12}$$

其中: $\tilde{\Psi} = \Psi - \Psi, \dot{\Psi}_r = A_l\Psi_r + A_l l y_r$。由式(3.3) 得

$$\dot{\tilde{\xi}} = A_l\tilde{\xi} \tag{4.13}$$

其中: $\dot{\xi}_r = A_l\xi_r, \tilde{\xi} = \xi - \xi_r$。由式(4.2) 知

$$\begin{bmatrix}e_1^{\mathrm T}\\ T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & & & \\ -l_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -l_{n-1} & & & 1\end{bmatrix}$$

为非奇异阵。由式(4.1) 知闭环系统的状态向量

$$\begin{aligned}X = &(z, \tilde{\theta}, \tilde{e}, \epsilon, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}, \tilde{\Psi}, \tilde{\xi}) = \\ &(z, \tilde{\theta}, \tilde{e}, \epsilon_1, \eta, \tilde{\zeta}, \tilde{\eta}, \tilde{\Psi}, \tilde{\zeta})\end{aligned} \tag{4.14}$$

式(3.24), (3.27), (4.3) ～(4.5), (4.10), (4.12) 和(4.13) 即为误差系统。

注 3　为简单起见, 在推导中有时记 $\chi(t)$ 为 χ, 其中 $\chi(t)$ 为关于时间 t 的任意函数。

定理 1　考虑系统(2.1), 控制器由式(3.22) 和(3.23) 构成, 滤波器取式(3.3), (3.9), (3.13), 自适应律取式(3.27)。若假设 1) ～4) 满足, 且存在独立于 μ_1 和 μ_2 的常数 $\alpha, c, \mu_1^*, \mu_2^*$, 使得如下假设条件成立:

1) $\mu_1 \le \mu_1^*, \mu_2 \le \mu_2^*$;

2) $\|y_r\|_\infty + \|\overset{\circ}{y}_r\|_\infty + \cdots + \|y_r^{(\rho)}\|_\infty \le c/\mu_2^{1/q}$;

3) $\|X(0)\| \le \mu_2^{1/q}$。

其中q为一正整数。则:

1) 闭环系统的所有信号均有界;

2) 跟踪误差满足

$$\limsup_{t\to\infty}(y(t)-y_r(t))^2\le\frac{c(\mu_1^2+\mu_2^2+\sigma_\theta+\sigma_l)+2\sqrt{\mu_2}}{\alpha}$$

证明 考虑如下的类 Lyapunov 函数

$$V=\frac{1}{2}|z|^2+\frac{1}{2}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\tilde{\theta}+\frac{|b_m|}{2\gamma}\tilde{e}^2+\frac{\upsilon}{2}\epsilon_1^2+\mu\eta^{\mathrm{T}}P_l\eta \qquad (4.15)$$

其中:$\mu>0$和$\upsilon>0$为待定参数,$P_l>0$满足$P_lA_l+A_l^{\mathrm{T}}P_l=-I$。由式(3.24)~(3.27),(4.3)和(4.4),对V求导得

$$\begin{aligned}\dot{V}\le{}&-\sum_{i=1}^{\rho}c_iz_i^2+\sum_{i=1}^{\rho}\frac{\epsilon_2^2}{4d_i}+\sigma_\theta\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\hat{\theta}+\\&\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\dot{\theta}+\sigma_l|b_m|\tilde{e}\hat{e}+|b_m|\gamma^{-1}\tilde{e}\dot{\tilde{e}}-\\&\upsilon(c_0+k_0|\omega|^2)\epsilon_1^2+\upsilon\epsilon_1\eta_1-\\&\mu|\eta|^2-2\mu\eta^{\mathrm{T}}P_lT\begin{bmatrix}0\\ \Omega^{\mathrm{T}}\dot{\theta}\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (4.16)$$

其中:$\tilde{\theta}(t)=\theta(t)-\hat{\theta}(t)$,$\tilde{e}(t)=e(t)-\hat{e}(t)$。由于上述类Lyapunov函数不包含整个状态向量X,因此考虑如下Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}V_1={}&V+\frac{1}{k_\zeta}\tilde{\zeta}^{\mathrm{T}}P_b(t)\tilde{\zeta}+\frac{1}{k_\eta}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P_l\tilde{\eta}+\\&\frac{1}{k_\psi}\tilde{\psi}^{\mathrm{T}}P_l\tilde{\psi}+\frac{1}{k_\xi}\tilde{\xi}^{\mathrm{T}}P_l\tilde{\xi}\end{aligned} \qquad (4.17)$$

其中

$$P_b(t)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{A_b^{\mathrm{T}}(t)\tau}\mathrm{e}^{A_b(t)\tau}\mathrm{d}\tau$$

$P_b(t)$使得$P_b(t)A_b(t)+A_b^{\mathrm{T}}(t)P_b(t)=-I$,并且$1/\delta^*>P_b(t)>\delta^*$,$\delta^*>0$是一常数,$k_\zeta$,$k_\eta$,$k_\psi$和$k_\xi$是待定参数。由式(4.5),(4.10),(4.12),(4.13),(4.16)及$P_lA_l+A_l^{\mathrm{T}}P_l=-I$,对$V_1$求导得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1\le{}&-\sum_{i=1}^{\rho}c_iz_i^2+\sum_{i=1}^{\rho}\frac{\epsilon_2^2}{4d_i}+\sigma_\theta\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\hat{\theta}+\\&\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\dot{\theta}+\sigma_l|b_m|\tilde{e}\hat{e}+|b_m|\gamma^{-1}\tilde{e}\dot{\tilde{e}}-\\&\upsilon(c_0+k_0|\omega|^2)\epsilon_1^2+\upsilon\epsilon_1\eta_1-\mu|\eta|^2-\\&2\mu\eta^{\mathrm{T}}P_lT\begin{bmatrix}0\\ \Omega^{\mathrm{T}}\dot{\theta}\end{bmatrix}-\frac{1}{k_\zeta}|\tilde{\zeta}|^2+\frac{2}{k_\zeta}\tilde{\zeta}^{\mathrm{T}}P_b(b_bz_1+\\&\dot{T}_1x)+\frac{1}{k_\zeta}\tilde{\zeta}^{\mathrm{T}}\dot{P}_b\tilde{\zeta}-\frac{1}{k_\eta}|\tilde{\eta}|^2+\frac{2}{k_\eta}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P_le_{n-1}'z_1-\\&\frac{1}{k_\psi}|\tilde{\psi}|^2-\frac{2}{k_\psi}\tilde{\psi}^{\mathrm{T}}P_lA_l^2e_1z_1-\frac{1}{k_\xi}|\tilde{\xi}|^2\end{aligned} \qquad (4.18)$$

选取

$$k_\eta\ge16|P_le_{n-1}'|^2/c_1 \qquad (4.19)$$

则有

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4k_\eta}|\tilde{\eta}|^2+\frac{2}{k_\eta}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}P_le_{n-1}'z_1-\frac{c_1}{4}z_1^2=\\&-\frac{1}{4k_\eta}(|\tilde{\eta}|-4|P_le_{n-1}'||z_1|)^2+\\&\frac{4}{k_\eta}|P_le_{n-1}'|^2z_1^2-\frac{c_1}{4}z_1^2\le0\end{aligned} \qquad (4.20)$$

选取$k_\psi\ge8|P_lA_l^2e_1|^2/c_1$,则有

$$-\frac{1}{2k_\psi}|\tilde{\psi}|^2-\frac{2}{k_\psi}\tilde{\psi}P_lA_l^2e_1z_1-\frac{c_1}{4}z_1^2\le0 \qquad (4.21)$$

选取$k_\zeta\ge16|P_bb_b|^2/c_1$,则有

$$-\frac{1}{4k_\zeta}|\tilde{\zeta}|^2+\frac{2}{k_\zeta}\tilde{\zeta}^{\mathrm{T}}P_bb_bz_1-\frac{c_1}{4}z_1^2\le0 \qquad (4.22)$$

注意到式(4.7),假设1)和3)满足,由文献[1]得

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4k_\zeta}|\tilde{\zeta}|^2+\frac{2}{k_\zeta}\tilde{\zeta}^{\mathrm{T}}P_b\dot{T}_1x+\\&\frac{1}{k_\zeta}\tilde{\zeta}^{\mathrm{T}}\dot{P}_b\tilde{\zeta}\le c\mu_2^2|x|^2\end{aligned} \qquad (4.23)$$

其中c是独立于μ_1和μ_2的常数。选取$k_\eta\le1/4c^2\mu\mu_1^2$,由式(4.19)知

$$\mu_1^*\le\sqrt{\frac{c_1}{64c^2\mu|P_le_{n-1}'|^2}} \qquad (4.24)$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\mu}{4}|\eta|^2+c\mu\mu_1|\eta||\tilde{\eta}|-\frac{|\tilde{\eta}|^2}{4k_\eta}\le\\&-\frac{1}{4k_\eta}(|\tilde{\eta}|-2c\mu\mu_1k_\eta|\eta|)^2+\\&c^2\mu^2\mu_1^2k_\eta|\eta|^2-\frac{\mu}{4}|\eta|^2\le0\end{aligned} \qquad (4.25)$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\mu}{4}|\eta|^2+c\mu\mu_1|\eta||\eta_r|\le\\&-\frac{\mu}{4}(|\eta|-2c\mu_1|\eta_r|)^2+c\mu\mu_1|\eta_r|^2\le\\&c\mu\mu_1^2\end{aligned} \qquad (4.26)$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\mu}{4}|\eta|^2+c\mu\mu_2|\eta||\lambda|\le\\&-\frac{\mu}{4}(|\eta|-2c\mu_2|\lambda|)^2+c^2\mu\mu_2^2|\lambda|^2\le\\&c\mu\mu_2^2|\lambda|^2\end{aligned} \qquad (4.27)$$

其中c是独立于μ_1和μ_2的常数。由式(4.25)~(4.27)和$\tilde{\eta}=\bar{\eta}-\bar{\eta}_r$得

$$c\mu|\eta|(\mu_1|\eta|+\mu_2|\lambda|)-\frac{3\mu}{4}|\eta|^2-\frac{|\tilde{\eta}|^2}{4k_\eta}\le$$

$$c\mu\mu_1^2 + c\mu\mu_2^2|\lambda|^2 \tag{4.28}$$

由式(4.18), (4.20) ～ (4.23) 和(4.28) 得

$$\dot{V}_1 \le - \frac{c_1}{4}z_1^2 - \sum_{i=2}^{\rho} c_i z_i^2 - \left(\frac{\upsilon c_0}{2} - \frac{l_1^2}{2d_0}\right)\epsilon_1^2 - \left(\frac{\mu}{4} - \frac{1}{2d_0} - \frac{\upsilon}{2c_0}\right)|\eta|^2 - \frac{\sigma_\theta|\tilde{\theta}|^2}{2} + \frac{\sigma_\theta|\theta|^2}{2} - \frac{\sigma_l|b_m|\tilde{e}^2}{2} + \frac{\sigma_l|b_m|e^2}{2} + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\theta} + \gamma^{-1}|b_m|\tilde{e}\mathring{e} - \frac{|\tilde{\zeta}|^2}{2k_\zeta} - \frac{|\tilde{\bar{\eta}}|^2}{2k_\eta} - \frac{|\tilde{\Psi}|^2}{2k_\Psi} - \frac{|\tilde{\xi}|^2}{k_\xi} + c\mu\mu_1^2 + c\mu\mu_2^2|\lambda|^2 + c\mu_2^2|x|^2 \tag{4.29}$$

选取 υ 使 $\frac{\upsilon c_0}{2} - \frac{l_1^2}{2d_0} \ge c$, 选取 μ 使 $\frac{\mu}{4} - \frac{1}{2d_0} - \frac{\upsilon}{2c_0} \ge c$, c 为某一独立于 μ_1 和 μ_2 的常数。由假设 3) 得

$$- \frac{\sigma_\theta|\tilde{\theta}|^2}{4} + \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\theta} \le - \frac{\sigma_\theta|\tilde{\theta}|^2}{4} + \lambda_{\max}(\Gamma^{-1})|\tilde{\theta}||\dot{\theta}| \le \frac{1}{\sigma_\theta}\lambda_{\max}^2(\Gamma^{-1})|\dot{\theta}|^2 \le c(\mu_1^2 + \mu_2^2) \tag{4.30}$$

由假设 1), 3) 和 $e = 1/b_m$ 得

$$- \frac{\sigma_l|b_m|}{4}|\tilde{e}|^2 + \gamma^{-1}|b_m|\tilde{e}\mathring{e} \le \frac{|b_m|\mathring{e}^2}{\sigma_l\gamma^2} = \frac{|\dot{b}_m|^2}{\sigma_l\gamma^2|b_m|^3} \le c\mu_2^2 \tag{4.31}$$

由式(4.29) ～ (4.31) 知存在 $\alpha > 0$, 使得

$$\dot{V}_1 \le -\alpha V_1 + c\mu_2^2|\lambda|^2 + c\mu_2^2|x|^2 + \beta \tag{4.32}$$

其中 $\beta = c(\sigma_\theta + \sigma_l + \mu_1^2 + \mu_2^2)$。由式(3.14), (4.8) 和 $\tilde{\xi} = \xi - \xi_r$ 得

$$T_2B_l(A_l)\lambda = \tilde{\xi} + \xi_r - T_1\epsilon - T_1\hat{\chi} - T_2(\xi - a_{n-1}A_l^{n-1}\bar{\eta} - \cdots - a_1A_l\bar{\eta} - a_0\bar{\eta}) \tag{4.33}$$

由 $B_l(s)$ 和 $L(s)$ 一致互质知

$$\lambda_m = h\epsilon + h\tilde{\zeta} + h\hat{\chi} + h\tilde{\xi} + h\tilde{\bar{\eta}} + k \tag{4.34}$$

其中 h 和 k 为某些独立于 μ_1 和 μ_2 的常数。由(4.1) 和 (4.2) 知 ϵ 可由 ϵ_1 和 η 线性表示, 从而由式(4.34) 得

$$\lambda_m = h\epsilon_1 + h\eta + h\tilde{\zeta} + h\hat{\chi} + h\tilde{\xi} + h\tilde{\bar{\eta}} + k \tag{4.35}$$

由 $\Psi = T\hat{\chi}$, 式(3.6), (3.17) 和假设 2) 知

$$\begin{bmatrix} \hat{\chi}_1 \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ T \end{bmatrix}\hat{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_1 - \epsilon_1 \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - \epsilon_1 \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + y_r - \epsilon_1 \\ \Psi \end{bmatrix}$$

由 $\begin{bmatrix} e_1^T \\ T \end{bmatrix}$ 非奇异, $\Psi = \tilde{\Psi} + \Psi_r$ 和式(4.35) 知

$$\lambda_m = h\epsilon_1 + h\eta + h\tilde{\zeta} + h\tilde{\xi} + h\tilde{\eta} + h\tilde{\Psi} + hz + k$$

由文献[1] 知存在某一正整数 q, 使得

$$\begin{cases} |\lambda|^2 \le c(V_1 + Y_r)^{q+1} \\ |x|^2 \le c(V_1 + Y_r)^{q+1} \end{cases} \tag{4.36}$$

由式(4.32) 和(4.36) 知 $\dot{V}_f \le -\alpha V_f + c\mu_2 V_f^{q+1} + \beta^*$, 其中: $V_f = V + Y_r$, $\beta^* = \beta + \alpha Y_r$。

以下证明完全类似于文献[1] 中定理 1 的证明(略)。□

5　结　　语

对于线性时变系统, 本文研究具有 MT-滤波器的反推自适应控制问题。给出了具有 MT-滤波器的反推自适应控制器的设计, 分析了闭环系统的稳定性和跟踪性能。同文献[1]相比, 本文的难点在于误差系统的构造, 并且稳定性的证明更加复杂。

参考文献(References):

[1] Giri F, Fabeh A, Ikhouane F. Backstepping adaptive control of time-varying plant[J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 36(2): 245-252.

[2] Tsakalis K S, Ioannou P A. *Linear Time Varying Systems: Control and Adaptation*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1993.

[3] Limanond S, Tsakalis K S. Model reference adaptive and nonadaptive control of linear time-varying plants[J]. *IEEE Trans Automatic Control*[J]. 2000, 45(7): 1290-1300.

[4] Dimogianopoulos D, Lozano R. Adaptive control for linear slowly time-varying systems using direct least-squares estimation[J]. *Automatica*, 2001, 37(2): 251-256.

[5] Lozano R, Dimogianopoulos D, Mahony R. Identification of linear time-varying systems using a modified least squares algorithm[J]. *Automatica*, 2000, 36(7): 1009-1015.

[6] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*[M]. New York: Wiley-Interscience, 1995.