

文章编号: 1001-0920(2003)04-0483-04

圆轨单级倒立摆摆起过程控制

侯祥林^{1,2}, 顾立忠², 徐心和²

(1. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 研究圆轨单级倒立摆摆起控制问题, 以离散控制律为设计变量, 以终点约束条件为目标函数, 提出了倒立摆摆起控制律的优化算法。对控制律进行编程计算, 成功地实现了圆轨单级倒立摆的快速摆起。仿真计算结果表明了所提出方法的有效性和可行性。

关键词: 圆轨倒立摆; 摆起控制; 优化方法

中图分类号: TP202

文献标识码: A

Swing up control of a circular rail single inverted pendulum

HOU Xiang-lin^{1,2}, GU Li-zhong², XU Xin-he²

(1. School of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: The swing up control problem of a single inverted pendulum on an circular rail is discussed. A new optimization is presented by making discrete control law as the design variables and taking terminal constraint condition as the objective function respectively. The new method is used to the circular rail single inverted pendulum. And the pendulum swing up is realized by programming and computing the control law. The results show the effectiveness and feasibility of the studied method.

Key words: Circular rail inverted pendulum; Swing up control; Optimizations

1 引言

倒立摆是典型的自然不稳定动力系统, 在机器人领域具有广泛的工程实际背景。关于倒立摆的研究有两个问题: 一是如何快速使得倒立摆从初始位置达到工作位置的摆起控制; 二是在工作平衡点的稳定控制问题。模糊控制和最优控制已实现了倒立摆工作平衡点的良好控制^[1-6]。倒立摆的摆起过程是复杂非线性控制问题, 涉及到力学模型、参数识别和控制律计算等问题。文献[7]采用 PD 控制研究单摆的摆起问题, 但增益系数要通过实验分析, 并且对摆起是否完成有很大的影响。

对于非线性系统的一般控制问题, 大多是应用最优控制问题的数值计算方法。这种方法采用哈密顿函数 $H(u)$ 的负梯度方向来计算迭代点 $u^{(k+1)} = u^{(k)} + Ks^{(k)}$, 每个时间段上要通过时间正标确定状态变量 x , 再通过时间倒标确定伴随变量 λ ^[8]。在实际应用中发现, 采用最优控制的数值算法, 在状态变量较少时可实现最优控制律的计算, 但对于状态变量较多, 尤其是具有终点约束问题却难以实现。

本文基于最优化原理研究倒立摆快速摆起的实现方法, 将每个时间段上的控制律向量作为设计变量, 采用终点型指标 J 为目标函数, 建立了最佳控

收稿日期: 2002-05-02; 修回日期: 2002-08-21。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69875003)。

作者简介: 侯祥林(1962—), 男, 辽宁沈阳人, 副教授, 博士后, 从事非线性系统建模与控制、神经网络算法与应用的研究; 徐心和(1940—), 男, 河北山海关人, 教授, 博士生导师, 从事足球机器人、智能控制等研究。

制律的优化程序计算方法,并且有效地应用到圆轨单级倒立摆摆起过程控制。

2 圆轨单级倒立摆模型和运动微分方程

2.1 圆轨单级倒立摆模型

圆轨单级倒立摆模型由一个转动杆和一个摆杆组成,其坐标系如图 1 所示。这是一个二自由度系统,转动杆绕 z 轴水平转动,以使摆杆进入工作状态。所谓工作状态,就是摆相对于不稳定平衡点为 $\theta = 0$,摆杆的 θ_1 角保持在一定的范围内。在摆起前,摆杆处于下垂静止状态。

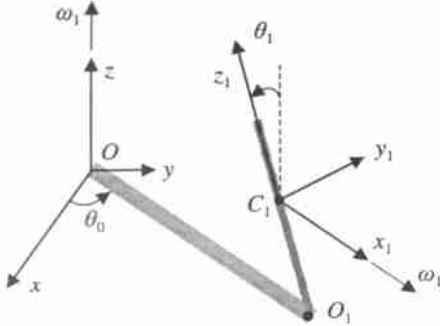


图 1 圆轨倒立摆坐标系

设 J_0 为水平杆对 z 轴的转动惯量, l_0 为转动杆长, J_{c1} 为摆杆对质心 C_1 的转动惯量, m_1 为摆杆质量, l_1 和 l_{c1} 分别为摆杆长度和摆杆质心 C_1 到转轴 O_1 的距离, u 为控制力矩; 并设 F_0 和 F_1 分别为转动杆和摆杆的阻力矩系数, θ_0 和 θ_1 分别为转动杆和摆杆的广义坐标, $\dot{\theta}_0$ 和 $\dot{\omega}$ 分别为转动杆转角和角速度, θ 和 ω 分别为摆杆转角和角速度。

2.2 圆轨单级倒立摆状态方程

圆轨单级倒立摆为二自由度系统,转动杆为定轴转动,摆杆为空间一般运动,整个系统运动由广义坐标 θ_0 和 θ_1 表示。通过齐次坐标变换^[9]可获得系统总动能(包括平动动能和转动动能)

$$T = \frac{1}{2}J_0\dot{\omega}^2 + \frac{1}{4}m_1[2(l_0\dot{\omega})^2 + (l_{c1}\dot{\omega})^2 + 2(l_{c1}\dot{\omega})^2 - 4l_0l_{c1}\dot{\omega}\dot{\omega}\cos\theta_1 - (l_{c1}\dot{\omega})^2\cos(2\theta_1)] + \frac{1}{2}J_{c1}(\dot{\omega}^2 + \dot{\omega}^2\sin^2\theta) \quad (1)$$

耗散能量为

$$D = \frac{1}{2}F_0\dot{\omega}^2 + \frac{1}{2}F_1\dot{\omega}^2 \quad (2)$$

系统广义力为 $Q_0 = u$, $Q_1 = m_1gl_{c1}\sin\theta_1$, 其中 u 为控制力矩。由拉格朗日方程^[10]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j} - \frac{\partial T}{\partial \theta_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_j} = Q_j, \quad j = 0, 1 \quad (3)$$

可列出系统运动微分方程组

$$\begin{cases} [J_0 + m_1l_0^2 + (m_1l_{c1}^2 + J_{c1})\sin^2\theta] \ddot{\theta}_0 - m_1l_0l_{c1}\cos(\theta)\ddot{\theta}_1 = \\ u - F_0\dot{\omega} - m_1l_0l_{c1}\dot{\omega}^2\sin\theta - \\ (m_1l_{c1}^2 + J_{c1})\dot{\omega}\dot{\omega}\sin(2\theta) \\ - m_1l_0l_{c1}\cos(\theta)\ddot{\theta}_0 + (m_1l_{c1}^2 + J_{c1})\ddot{\theta}_1 = \\ m_1gl_{c1}\sin\theta - F_1\dot{\omega} + m_1l_0l_{c1}\dot{\omega}\dot{\omega}\sin\theta + \\ (J_{c1} + m_1l_{c1}^2)\dot{\omega}^2\sin\theta\cos\theta \end{cases} \quad (4)$$

2.3 系统状态方程

方程 (4) 可以看成对于 $\ddot{\theta}_0$ 和 $\ddot{\theta}_1$ 的二元一次方程组,从方程 (4) 可求出 $\ddot{\theta}_0$ 和 $\ddot{\theta}_1$ 的表达式。设

$$a_{00} = J_0 + m_1l_0^2 + (m_1l_{c1}^2 + J_{c1})\sin^2\theta$$

$$a_{01} = a_{10} = -m_1l_0l_{c1}\cos\theta$$

$$a_{11} = m_1l_{c1}^2 + J_{c1}$$

$$b_0 = u - F_0\dot{\omega} - m_1l_0l_{c1}\dot{\omega}^2\sin\theta -$$

$$(m_1l_{c1}^2 + J_{c1})\dot{\omega}\dot{\omega}\sin(2\theta)$$

$$b_1 = m_1gl_{c1}\sin\theta - F_1\dot{\omega} +$$

$$m_1l_0l_{c1}\dot{\omega}\dot{\omega}\sin\theta + (J_{c1} +$$

$$m_1l_{c1}^2)\dot{\omega}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Delta = a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10}$$

$$\Delta_1 = b_0a_{11} - a_{01}b_1$$

$$\Delta_2 = a_{00}b_1 - a_{10}b_0$$

则

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_0 = f_1(\theta_0, \theta_1, \dot{\omega}, \omega, u) = \Delta_1/\Delta \\ \ddot{\theta}_1 = f_2(\theta_0, \theta_1, \dot{\omega}, \omega, u) = \Delta_2/\Delta \end{cases} \quad (5)$$

设 $x_1 = \theta_0$, $x_2 = \theta_1$, $x_3 = \dot{\omega}$, $x_4 = \omega$, 可求得微分方程 (4) 和 (5) 的一阶状态方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \\ \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u) \end{cases} \quad (6)$$

3 摆起过程控制律的优化程序方法

3.1 摆起控制律优化计算原理

设终点时间固定,摆在给定时间 t_f 摆起,理想控制应在 t_f 时刻获得 $\theta_1 = 0$, $\dot{\theta}_1 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$ 三个终点指标。即终点约束为 $x_2(t_f) = x_3(t_f) = x_4(t_f) = 0$ 。控制指标可表示为

$$J = (x_2(t_f))^2 + (x_3(t_f))^2 + (x_4(t_f))^2 \quad (7)$$

实际程序采用数值计算方法,将时间 $[t_0, t_f]$ 分成 n 段,每段时间间隔为 $\Delta t = (t_f - t_0)/n$,使其与数值计算时间步长相等。状态变量为 $x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}$,

$x_{4,i}, i = 1, 2, \dots, n + 1$ 。在 $t = t_0 + i\Delta t$, 控制律为 u_i (待求量)。

基于最优化原理^[11], 可建立最优化问题

$$\min(F(\mathbf{u})) \quad (8)$$

其中目标函数为控制指标

$$F(\mathbf{u}) = (x_{2,n+1}(\mathbf{u}))^2 + (x_{3,n+1}(\mathbf{u}))^2 + (x_{4,n+1}(\mathbf{u}))^2 \quad (9)$$

待求设计变量为每个时间段上的控制律

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T, \quad \mathbf{u} \in R^n \quad (10)$$

将状态方程表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,i+1} = x_{3,i} \\ \dot{x}_{2,i+1} = x_{4,i} \\ \dot{x}_{3,i+1} = f_1(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, x_{4,i}, u_i) \\ \dot{x}_{4,i+1} = f_2(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, x_{4,i}, u_i) \end{cases} \quad (11)$$

值得注意的是, 这里计算每个时间段上控制变量的优化问题与采用最优控制的数值算法有两点不同:

1) 梯度是目标函数直接对设计变量的偏导数, 这里不存在 H 函数;

2) 每步计算通过一维搜索方法确定最优步长, 而不是所给的固定步长, 这种计算加快了计算收敛速度。

本文采用真实的梯度优化方法进行控制律的计算。

3.2 目标函数的动态形成过程

1) 给定系统参数和初始条件 $x_{i,1}, i = 1, 2, 3, 4$, 设置控制时间 t_f ;

2) 当给出控制量 u_1, u_2, \dots, u_n 时, 通过状态方程(11) 采用 R-K 方法^[12] 进行一步计算, 由 u_1 和 $x_{i,1}$ 计算 $x_{i,2}$, 由 u_k 和 $x_{i,k}$ 计算 $x_{i,k+1}$, 由 u_n 和 $x_{i,n}$ 计算 $x_{i,n+1}, x_{i,n+1} (i = 1, 2, 3, 4)$ 是 u_1, u_2, \dots, u_n 的函数;

3) 由过程 2) 的结果形成目标函数(9)。

3.3 梯度函数的形成过程

目标函数 $F(\mathbf{u})$ 是 u^1, u^2, \dots, u^n 复杂显函数, 具有繁琐嵌套关系, 采用梯度法优化方法计算需要梯度

$$\text{Grad}[F(\mathbf{u})] = \left[\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_n} \right]^T \quad (12)$$

可采用差商代替偏导数

$$\frac{\partial F}{\partial u_j} \approx \frac{F(\mathbf{u}_j) - F(\mathbf{u})}{du_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{u} = [u^1, u^2, \dots, u^j, \dots, u^n]^T \\ \mathbf{u}_j = [u^1, u^2, \dots, u^j + du^j, \dots, u^n]^T \end{cases} \quad (14)$$

3.4 采用梯度优化方法的程序步骤

- 1) 赋初值 $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}$;
- 2) 调梯度函数计算 $\partial F / \partial u_j$, 获得负梯度方向向量

$$s_j = - \partial F / \partial u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

- 3) 调一维搜索子程序(进退法, 黄金分割法) 计算每步最优步长 α 得到新控制律

$$u_j = u_j^{(0)} + \alpha s_j \quad (16)$$

- 4) 计算目标函数值

$$F_0 = F(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (17)$$

- 5) 若满足条件 $F_0 < e$, 则输出程序所计算的控制律; 若不满足条件 $F_0 < e$, 则使 $u_j^{(0)} = u_j$, 返回步骤 2) 继续计算。

4 圆轨单级倒立摆摆起控制

4.1 系统参数及初始条件

转动杆的转动惯量 $J_o = 0.0475 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 水平杆长 $l_o = 0.165 \text{ m}$, 质量 $m_1 = 0.408 \text{ kg}$, 摆杆对中心轴转动惯量 $J_{c1} = 0.0029 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 质心与转轴距离 $l_{c1} = 0.116 \text{ m}$, 驱动力矩幅值 $u_{\max} = 4.7 \text{ N} \cdot \text{m}$; 初始条件: $F_0 = 0.11 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $F_1 = 0.025 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $t_0 = 0$, $t_f = 1 \text{ s}$, $\theta_0 = 0$, $\theta = 3.14 \text{ rad}$, $\omega = \dot{\omega} = 0$; 控制目标函数精度 $\epsilon = 0.05$; 梯度函数中的增量 $du_j = 0.00001$ 。

4.2 仿真计算

程序仿真经过 1916 次优化计算, 目标函数值达到 0.04371, 计算出摆起过程最优控制力矩随时间的变化关系, 如图 2 所示。终点时刻的状态参量达到 $\theta = 0.3404 \text{ rad}$, $\dot{\theta} = 0.011 \text{ rad/s}$, $\omega = -0.161 \text{ rad/s}$ 。

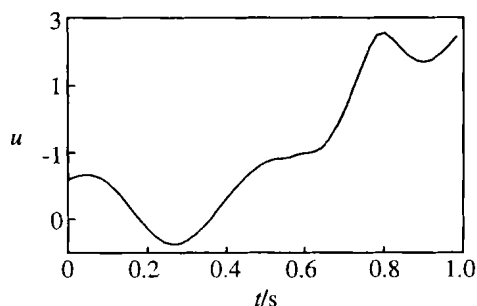


图 2 摆起过程控制力矩随时间变化

摆杆摆起过程转角和角速度随时间变化分别如图 3 和图 4 所示。转动杆摆起过程转角和角速度随时间变化分别如图 5 和图 6 所示。这一计算结果已成功地使圆轨单级倒立摆在 1 s 内摆起到工作平衡点。

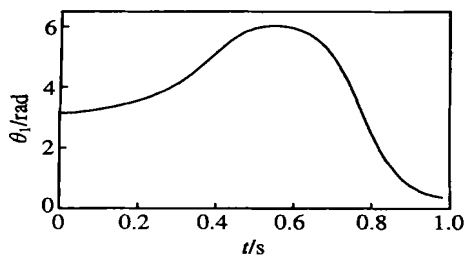


图3 摆杆摆起过程转角随时间变化

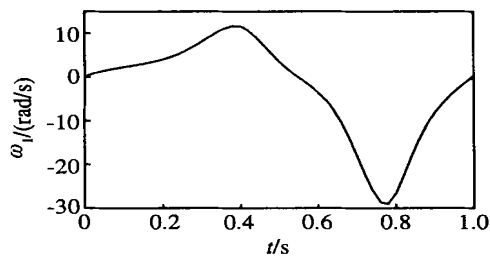


图4 摆杆摆起过程角速度随时间变化

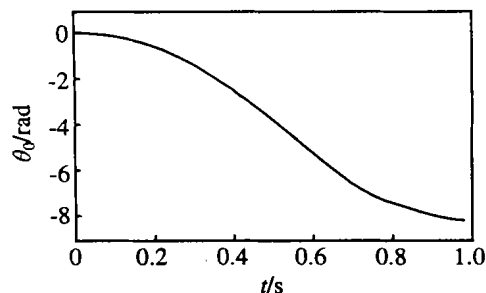


图5 转动杆摆起过程转角随时间变化

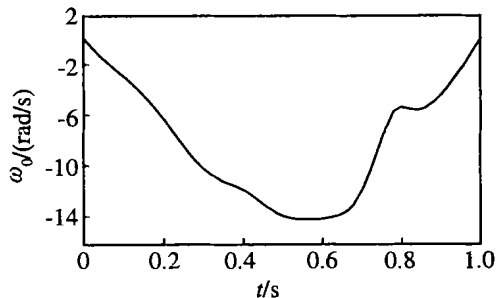


图6 转动杆摆起过程角速度随时间变化

5 结论

本文以离散控制律向量为设计变量,以终点约束条件为目标函数,建立了最佳控制律的优化方法。编制了圆轨倒立摆摆起过程的计算机程序,并对圆轨倒立摆摆起过程控制获得成功。理论和实际表明,这种控制律计算的优化方法是有效的,新的优化方法为复杂非线性系统的过程控制提供了条件。

参考文献(References):

- [1] Furuta K, Hiroyuki K, Kosuge K. Digital control of double inverted pendulum on an inclined rail[J]. *Int J Control*, 1980, 32(5): 907-924.
- [2] 张乃尧, Ebert C, Belschner R, 等. 倒立摆的双闭环模糊控制[J]. *控制与决策*, 1996, 11(1): 85-88.
(Zhang N Y, Ebert C, Belschner R, et al. Fuzzy cascade control of an inverted pendulum [J]. *Control and Decision*, 1996, 11(1): 85-88.)
- [3] Meier H, Farwig Z, Unbehauen H. Discrete computer control of a triple inverted pendulum[J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 1990, 11(2): 157-171.
- [4] 尹征琦, 冯祖仁, 陈辉堂. 采用模拟调节器的二级倒立摆的控制[J]. *信息与控制*, 1985, 14(1): 6-10.
(Yin Z Q, Feng Z R, Chen H T. Control of double inverted pendulum of adopting imitating adjustor [J]. *Information and Control*, 1985, 14(1): 6-10.)

- [5] Furuta K, Ochiai T, Ono N. Attitude control of a triple inverted pendulum[J]. *Int J Control*, 1984, 139(6): 1351-1365.
- [6] 张明廉, 孙昌龄, 杨亚炜. 拟人控制二维单倒立摆[J]. *控制与决策*, 2002, 17(1): 53-56.
(Zhang M L, Sun C L, Yang Y W. Human-imitating control for 2-D inverted pendulum [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(1): 53-56.)
- [7] 李祖枢. 力矩受限单摆的倒立控制——仿人智能控制在非线性系统中的应用[J]. *控制理论与应用*, 1999, 16(2): 225-229.
(Li Z S. The control for swinging up of a pendulum under limited torque - An application of human simulated intelligent control in nonlinear systems [J]. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(2): 225-229.)
- [8] 叶庆凯, 王肇明. 优化与最优控制中的计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
- [9] 白井 良明. 王棣棠译. 机器人工程[M]. 北京: 科学出版社, 2001. 9-29.
- [10] 黄昭度, 纪辉玉. 分析力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1985.
- [11] Fletcher R. *Practical Methods of Optimization*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1987.
- [12] 孙庆新, 齐秉寅, 张树功, 等. 数值分析[M]. 沈阳: 东北工学院出版社, 1990.