文章编号: 1001-0920(2003) 04-0487-03

线性不确定奇异摄动系统的稳定控制鲁棒界

王宪杰[1], 高存臣[2]
(1. 烟台大学 数学与信息科学系, 山东 烟台 264005; 2. 中国海洋大学 数学系, 山东 青岛 266071)

摘 要: 对于具有不确定量的奇异摄动系统,利用 Lyapunov 稳定性理论研究其稳定鲁棒控制问题。在一定条件下得到了任一理想奇异摄动系统的稳定鲁棒控制,也是不确定奇异摄动系统具有一定鲁棒界的稳定控制。给出了闭环奇异摄动系统渐近稳定的条件,讨论了鲁棒界及其变化范围。

关键词: 奇异摄动系统; 稳定鲁棒控制; 鲁棒界
中图分类号: TP13 文献标识码: A

Robust bounds of stable controllers for linear uncertain singular perturbation systems

WANG Xian-jie[1], GAO Cun-chen[2]
(1. Department of Mathematics and Informational Science, Yantai University, Yantai 264005, China;
2. Department of Mathematics, Ocean University of China, Qingdao 266071, China)

Abstract: By the use of Lyapunov stability theory, the stable robust control problem is studied with constructing Lyapunov function. On definite condition, the stable robust controller of any ideal singular perturbation control system is obtained. At the same time, it is also the stable robust controller of uncertain singular perturbation control system with definite robust bounds. The condition which makes the closed-loop singular perturbation control system asymptotic stable is given. Further, the robust bounds of stable controllers and the change of range about its corresponding parameter are discussed.

Key words: Singular perturbation system; Stable robust controller; Robust bound

1 引 言

自从 Rohrs[1] 分析了产生系统不稳定的主要原因以来,对于不确定系统鲁棒性的研究已有许多重要成果。文献[2～4]分别讨论了具有反馈控制的不确定系统和时滞不确定系统的鲁棒控制问题。文献[5]给出了离散不确定系统主要结果的进一步说明和严格证明。文献[6]研究了状态反馈不确定系统稳定控制的鲁棒界。本文则给出具有不确定量的奇异摄动系统的稳定鲁棒控制问题,并讨论其鲁棒界的范围。

2 预备知识和重要引理

常用符号如下:

1) $\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ 表示 n 维向量 X 的范数;

2) $\lambda_{\max}(A)$ 和 $\lambda_{\min}(A)$ 分别表示 n 阶方阵 A 的最大和最小特征值;

3) $\sigma(A)$ 和 $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$ 分别表示矩阵 A 的谱和谱范数;

收稿日期: 2002-03-07; 修回日期: 2002-05-27。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69974032); 山东省自然科学基金资助项目(Q99G06)。
作者简介: 王宪杰(1959—),男,黑龙江牡丹江人,副教授,硕士,从事自适应控制等研究; 高存臣(1956—),男,山东烟台人,教授,博士生导师,从事大系统理论、变结构控制等研究。

4) $C(-r) = \{Z: \mathrm{Re}\, Z < -r, r > 0\}$。

引理 1[6] 如果 F 为实对称阵, 且满足 $\|F\|_2 < l$, 则 $(lI_n \pm F)$ 为正定对称阵。

引理 2[6] 对于任意正定对称阵 $Q \in R^{n\times n}$ 及 $r > 0$, 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + 2rP = -Q$$

有唯一正定解阵 P 的充要条件是 $\sigma(A) \subset C(-r)$。

引理 3[7] 如果 $[F: H]$ 完全可观测, 则 F 稳定的充要条件是存在正定对称阵 P, 使得

$$F^{\mathrm{T}}P + PF = -Q$$

成立, 其中 $Q = HH^{\mathrm{T}}$。

3 稳定控制的鲁棒性定理

考虑下述不确定奇异摄动系统

$$\dot{X} = (A_{11} + \Delta A_{11})X + A_{12}Z + B_1U \tag{1}$$

$$\mu\dot{Z} = A_{21}X + A_{22}Z + B_2U \tag{2}$$

$$Y = CX \tag{3}$$

式中: X, Z, U 和 Y 分别为 n 维主导状态、m 维寄生状态、p 维控制输入和 q 维系统输出; $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ 和 C 为适当阶数的矩阵, 假定 A_{22} 稳定, 即 $\mathrm{Re}\,\lambda_{\max}(A_{22}) < 0$; ΔA_{11} 为不确定量, 假定 $\Delta A_{11} \in U_\alpha = \{H: \|H\|_2 < \alpha, \alpha > 0\}$; μ 为摄动比率, 假定 $\mu \in [0, \mu^*]$, 且 $\mu^* \ll 1$。

引入新的寄生变量

$$\eta = Z + A_{22}^{-1}(A_{21}X + B_2U) \tag{4}$$

则式(1) 和(2) 可分别化为

$$\dot{X} = (A_0 + \Delta A_{11})X + B_0U + A_{12}\eta \tag{5}$$

$$\mu\dot{\eta} = A_{22}\eta + \mu[(A_1 + \Delta A_1)X + A_2U + A_3\eta + A_4\dot{U}] \tag{6}$$

式中

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$$

$$A_1 = A_{22}^{-1}A_{21}A_0, \quad A_2 = A_{22}^{-1}A_{21}B_0$$

$$A_3 = A_{22}^{-1}A_{21}A_{12}, \quad A_4 = A_{22}^{-1}B_2$$

$$\Delta A_1 = A_{22}^{-1}A_{21}\Delta A_{11}$$

当 $\mu = 0$ 时, 系统(5), (6) 和(3) 退化为线性不确定系统

$$\dot{X} = (A_0 + \Delta A_{11})X + B_0\dot{U} \tag{7}$$

$$Y = CX \tag{8}$$

在状态反馈 $U = KX$ 下, 可得到闭环系统

$$\dot{X} = (A_c + \Delta A_{11})X + A_{12}\eta \tag{9}$$

$$\mu\dot{\eta} = A_{22}\eta + \mu(EX + F\eta) \tag{10}$$

$$Y = CX \tag{11}$$

式中

$$A_c = A_0 + B_0K, \quad F = A_3 + A_4KA_{12}$$

$$E = A_1 + A_2K + A_4KA_0 + A_4KB_0K + \Delta A_1 + A_4K\Delta A_{11}$$

$$K \in R^{p\times n}$$

显然, 矩阵 E 依赖于不确定量 ΔA_{11}, 可记为 $E = E(\Delta A_{11})$。

定理 1 设 $U = KX$ 是理想奇异摄动系统[8]

$$\dot{X} = A_0X + B_0U + A_{12}\eta \tag{12}$$

$$\mu\dot{\eta} = A_{22}\eta + \mu[A_1X + A_2U + A_3\eta + A_4\dot{U}] \tag{13}$$

$$Y = CX \tag{14}$$

的稳定控制, 则必存在 $\mu^* > 0$, 当 $\mu < \mu^*$ 时, $U = KX$ 是不确定奇异摄动系统(9) ~(11) 的稳定鲁棒控制, 其稳定界为

$$\alpha^* = \frac{r\lambda_{\min}(P_C) - \mu\beta^*}{\lambda_{\max}(P_C)} \tag{15}$$

其中: P_C 是 Lyapunov 方程

$$A_C^{\mathrm{T}}P_C + P_CA_C + 2rP_C = -Q \tag{16}$$

的正定解阵; β^* 是由不确定量 ΔA_{11} 确定的正常数, 当 α 给定后, β^* 便随之确定; $0 < r < |\lambda_{\min}(A_C)|$。

证明 由引理 2, 对任意正定对称阵 Q 及 $r > 0$, 方程

$$A_C^{\mathrm{T}}P_C + P_CA_C + 2rP_C = -Q$$

有唯一正定解阵 P_C。由引理 3, 对任意正定对称阵 Q_1, 由于 A_{22} 稳定, 所以方程

$$A_{22}^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A_{22} = -Q_1$$

有唯一正定解阵 P_1。为此选择下述 Lyapunov 函数

$$V(X,\eta) = \frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}P_CX + \frac{\mu}{2}[\eta - \delta(X)]^{\mathrm{T}}P_1[\eta - \delta(X)] \tag{17}$$

式中

$$\delta(X) = P_1^{-1}\Phi X, \quad \Phi = (P_CA_{12}A_{22}^{-1})^{\mathrm{T}}$$

将 $V(X,\eta)$ 对 t 求全导数, 并利用式(9) 和(10), 得

$$\begin{aligned}\dot{V}(X,\eta) = {}& \frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}[A_C^{\mathrm{T}}P_C + P_CA_C + \Delta A_{11}^{\mathrm{T}}P_C + P_C\Delta A_{11}]X + \\ & \frac{1}{2}\eta^{\mathrm{T}}[A_{22}^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A_{22}]\eta - \frac{\mu}{2}X^{\mathrm{T}}[G_1^{\mathrm{T}}\Phi + \Phi G_1]X + \\ & \frac{\mu}{2}[\eta^{\mathrm{T}}(G_2^{\mathrm{T}}P_1 + P_1G_2)\eta + X^{\mathrm{T}}G_1^{\mathrm{T}}P_1\eta + \\ & \eta^{\mathrm{T}}P_1G_1X - \eta^{\mathrm{T}}G_2^{\mathrm{T}}\Phi X - X^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}G_2\eta]\end{aligned} \tag{18}$$

式中

$$G_1 = E - P_1^{-1}\Phi(A_C + \Delta A_{11})$$
$$G_2 = F - P_1^{-1}\Phi A_{12}$$

由式(15) 和(16) 得

$$\dot{V}(X,\eta) = \frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}[-Q - 2rP_C + \Delta A_{11}^{\mathrm{T}}P_C + P_C\Delta A_{11} - \mu(G_1^{\mathrm{T}}\Phi + \Phi^{\mathrm{T}}G_1)]X - \frac{1}{2}\eta^{\mathrm{T}}Q_1\eta + \frac{\mu}{2}[\eta^{\mathrm{T}}(G_2^{\mathrm{T}}P_1 + P_1G_2)\eta + X^{\mathrm{T}}G_1^{\mathrm{T}}P_1\eta + \eta^{\mathrm{T}}P_1G_1X - \eta^{\mathrm{T}}G_2^{\mathrm{T}}\Phi X - X^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}G_2\eta] \tag{19}$$

设

$$\sigma^* = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q_1)$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(G_2^{\mathrm{T}}P_1 + P_1G_2)$$
$$\lambda_2 = \|G_1^{\mathrm{T}}P_1 - \Phi^{\mathrm{T}}G_2\|_2 = \|P_1G_1 - G_2^{\mathrm{T}}\Phi\|_2$$
$$\|G_1^{\mathrm{T}}\Phi + \Phi^{\mathrm{T}}G_1\|_2 = \beta(\Delta A_{11}) < \beta^*$$

由于 $\Delta A_{11} \in U_\alpha$, 所以

$$\|\Delta A_{11}^{\mathrm{T}}P_C + P_C\Delta A_{11}\|_2 \le 2\|\Delta A_{11}\|_2\|P_C\|_2 \le 2\alpha\|P_C\|_2 \le 2\alpha\lambda_{\max}(P_C)$$

于是

$$\dot{V}(X,\eta) \le \frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}[-Q - 2(r\lambda_{\min}(P_C) - \alpha\lambda_{\max}(P_C) - \mu\beta^*)I_n - (2\alpha\lambda_{\max}(P_C)I_n - (\Delta A_{11}^{\mathrm{T}}P_C + P_C\Delta A_{11})) - \mu(\beta^*I_n + (G_1^{\mathrm{T}}\Phi + \Phi G_1))]X - \sigma^*\|\eta\|_2^2 - \mu\frac{\beta^*}{2}[\|X\|_2 - \frac{\lambda_2}{\beta^*}\|\eta\|_2]^2 + \mu(\lambda_1 + \frac{\lambda_2^2}{2\beta^*})\|\eta\|_2^2 \tag{20}$$

λ_1 是与不确定量 ΔA_{11} 无关的正常数, 而 λ_2 和 β^* 则与 ΔA_{11} 有关。当 $\Delta A_{11} \in U_\alpha$ 时, λ_2 和 β^* 的取值范围也随之确定, 不妨设 $\lambda_2^* = \sup_{\Delta A_{11}\in U_\alpha}\{\lambda_2\}$。另一方面, 当 $\Delta A_{11} \in U_\alpha$ 时, β^* 的值已经确定, 可取 $\beta^* = \sup_{\Delta A_{11}\in U_\alpha}\{\|G_1^{\mathrm{T}}\Phi + \Phi G_1\|_2\}$。因为 $\sigma^* = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q_1)$, 所以对任意正定阵 Q_1, 必存在 $\mu^* > 0$, 当 $\mu < \mu^*$ 时, 能保证

$$\sigma^* = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q_1) \ge \mu(\lambda_1 + \frac{(\lambda_2^*)^2}{2\beta^*}) \ge \mu(\lambda_1 + \frac{\lambda_2^2}{2\beta^*}) \tag{21}$$

由引理 2, $2\alpha\lambda_{\max}(P_C)I_n - (\Delta A_{11}^{\mathrm{T}}P_C + P_C\Delta A_{11})$ 与 $\beta^*I_n + (G_1^{\mathrm{T}}\Phi + \Phi G_1)$ 都是正定对称阵, 因此只要 $r\lambda_{\min}(P_C) - \alpha\lambda_{\max}(P_C) - \mu\beta^* \ge 0$, 且 $\mu < \mu^*$, 就能保证 $\dot{V}(X,\eta) \le 0$。同时, 当且仅当 $X = \eta = 0$ 时, $V(0,0) = 0$。

因此, 当 $\Delta A_{11} \in U_\alpha$ 时, 闭环系统(9) ～(11) 是渐近稳定的, 即 $U = KX$ 是系统(5) 和(6) 的稳定鲁棒控制。稳定界为式(15), 稳定条件为式(21)。□

由于 r 的取值范围为 $r \in (0, |\lambda_{\min}(A_C)|)$, P_C 是方程(16) 的正定解阵, 所以 P_C 与 r 和 Q 有关, 稳定的鲁棒界 α^* 是关于 r 和 Q 的函数。可采用寻优的方法求取 α 的最大值。

定理 2　对于理想奇异摄动系统(12) ～(14), 存在 $\mu^* > 0$, 当 $\mu < \mu^*$ 且 $\mathrm{rank}\,B_0 = n$ 时, 具有不确定量 ΔA_{11} 的奇异摄动系统(5) 和(6), 必存在稳定鲁棒控制器 $U = KX$。其中

$$K = -rB_0^{\mathrm{T}}P_C$$
$$A_0^{\mathrm{T}}P_C + P_C\Delta A_0 = -I_n$$
$$r \ge \frac{\alpha\lambda_{\max}(P_C) + \mu\beta^*}{\lambda_{\min}(B_0B_0^{\mathrm{T}})\lambda_{\min}(P_C^2)}$$

证明　当 $K = -rB_0^{\mathrm{T}}P_C$ 时, 有

$$K^{\mathrm{T}}B_0P_C + P_CB_0K = -2rP_CB_0B_0^{\mathrm{T}}P_C$$

由式(18) 得

$$\dot{V}(X,\eta) \le \frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}[A_0^{\mathrm{T}}P_C + P_CA_0 - 2(r\lambda_{\min}(B_0B_0^{\mathrm{T}})\lambda_{\min}(P_C^2) - \alpha\lambda_{\max}(P_C) - \mu\beta^*)I_n - (2\alpha\lambda_{\max}(P_C) - (\Delta A_{11}^{\mathrm{T}}P_C + P_CA_{11})) - \mu(\beta^*I_n + G_1^{\mathrm{T}}\Phi + \Phi^{\mathrm{T}}G_1)]X - \sigma^*\|\eta\|_2^2 - \mu\frac{\beta^*}{2}[\|X\|_2 - \frac{\lambda_2}{\beta^*}\|\eta\|_2]^2 + \mu(\lambda_1 + \frac{\lambda_2^2}{2\beta^*})\|\eta\|_2^2$$

由引理 1 知, $2\lambda_{\max}(P_C)I_n - (\Delta A_{11}^{\mathrm{T}}P_C + P_CA_{11})$ 与 $\beta^*I_n + G_1^{\mathrm{T}}\Phi + \Phi^{\mathrm{T}}G_1$ 都是正定对称阵, 所以对任意正定对称阵 Q_1, 必存在 $\mu^* > 0$, 当 $\mu < \mu^*$ 时, 有

$$\sigma^* \ge \mu(\lambda_1 + \frac{(\lambda_2^*)^2}{2\beta^*}) \ge \mu(\lambda_1 + \frac{\lambda_2^2}{2\beta^*})$$

因此, 只要

$$r\lambda_{\min}(B_0B_0^{\mathrm{T}})\lambda_{\min}(P_C^2) - \alpha\lambda_{\min}(P_C) - \mu\beta^* \ge 0$$

就能保证 $\dot{V}(X,\eta) \le 0$。其中 $A_0^{\mathrm{T}}P_C + P_CA_0 = -I_n$。□

(下转第 493 页)

的控制性能。实验结果表明, 该非线性PID 控制的6自由度并联机器人具有很高的轨迹跟踪精度。该控制器结构简单, 易于工程实现, 可应用于其他精度要求较高的伺服系统控制。

鸣 谢 衷心感谢中国科学院数学与系统科学研究院韩京清研究员在控制器参数确定过程中的精心指导。感谢北京理工大学丁洪生教授、郝娟博士、李成刚博士生在实验方面的帮助。感谢解放军信息工程大学郑勇教授、夏治国副教授、骆亚波硕士生在Leica 测试中提供的帮助。

参考文献(References):

[1] Ronen Ben Horin, Moshe Shoham, Shlomo Djerassi. Kinematics, dynamics and construction of a planarly actuated parallel robot[J]. *Robotics and Computer-integrated Manufacturing*, 1998, 14: 163-172.

[2] Su Y X, Duan B Y. The application of Stewart platform in the large spherical radio telescope[J]. *J of Robotic Systems*, 2000, 17(7): 375-383.

[3] 黄真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.

[4] Charles C Nguyen, Sami S Antrazi, Zhou Zhenlei. Adaptive control of a stewart platform-based manipulator[J]. *J of Robotic Systems*, 1993, 10(5): 657-687.

[5] Dong Hwan Kim, Jiyoon Kang, Kyoil Lee. Robust tracking control design for a 6 DOF parallel manipulator[J]. *J of Robotic Systems*, 2000, 17(10): 527-547.

[6] 韩京清. 非线性 PID 控制器[J]. 自动化学报, 1994, 20(4): 487-490.

(Han Jingqing. Nonlinear PID controller[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1994, 20(4): 487-490.)

[7] 韩京清, 王伟. 非线性跟踪-微分器[J]. 系统科学与数学, 1994, 14(2): 177-183.

(Han Jingqing, Wang Wei. Nonlinear tracking-differentiator[J]. *J Syst Sci Math Sci*, 1994, 14(2): 177-183.)

(上接第 489 页)

4 结 论

本文研究具有不确定量的奇异摄动系统的稳定鲁棒控制问题, 在较弱的条件下, 给出了理想奇异摄动系统的稳定控制, 也是不确定奇异摄动系统具有一定鲁棒界的稳定控制, 并分析了稳定鲁棒界及相应参数的变化范围。本文结果是文献[6]结论在奇异摄动系统中的推广。

参考文献(References):

[1] Rohrs C E, Valavani L, Athans M, et al. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodelled dynamics[J]. *IEEE Trans Autom Contr*, 1985, 30(9): 881-889.

[2] Zhou K, Khargonekar P P. Stability robustness bounds for linear state-space model with structured uncertainty[J]. *IEEE Trans Autom Contr*, 1987, 32(7): 621-623.

[3] Sobel K M, Banda S S, Yeh H H. Robust control for linear systems with structured state space uncertainty[J]. *Int J Contr*, 1989, 50(5): 1991-2004.

[4] Kim J H, Jeung E T, Park H B. Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input[J]. *Automatic*, 1996, 32(9): 1337-1339.

[5] Mao L N, Meng J E. Comment on "A new robust control for a class of uncertain discrete-time systems"[J]. *IEEE Trans Autom Contr*, 2001, 46(3): 509-511.

[6] 贾新春, 王素格. 线性不确定系统的稳定控制鲁棒界和多级稳定鲁棒控制[J]. 系统科学与数学, 2000, 20(2): 155-159.

(Jia Xinchun, Wang Suge. Robust bounds of stable controllers and multilevel stable robust controllers for linear unceartain systems[J]. *Syst Sci Math Sci*, 2000, 20(2): 155-159.)

[7] 袁震东. 自适应控制理论及其应用[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1988.

[8] Loannou P A, Kokotovic P V. *Adaptive Systems with Reduced Models*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.