

文章编号: 1001-0920(2003)04-0403-04

## 具有不匹配参数混沌系统的同步控制

陈茂银<sup>1</sup>, 韩正之<sup>1</sup>, 尚云<sup>2</sup>

(1. 上海交通大学 自动化系, 上海 200030; 2. 陕西师范大学 数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062)

**摘要:** 基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出一种具有不匹配参数混沌系统的同步控制方法。即使在有较大参数误差的情况下, 只要选择合适的反馈控制律和参数自适应律, 也能保证同步系统的全局稳定性。与已有的结果相比, 该方法能克服较大参数误差对同步的影响。Lorenz 系统和 Chen 系统的数值仿真验证了该方法的有效性。

**关键词:** 混沌; 同步; 反馈控制; 保密通信

**中图分类号:** TP18      **文献标识码:** A

## Synchronization controlling of chaotic systems with mismatched parameter

CHEN Mao-yin<sup>1</sup>, HAN Zheng-zhi<sup>1</sup>, SHANG Yun<sup>2</sup>

(1. Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China; 2. School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

**Abstract:** Based on the rigorous Lyapunov stability theory, a method of synchronizing chaotic systems with mismatched parameters is proposed. Feedback control law and parameter adaptive law can be chosen suitably such that the global stability of synchronization system is ensured even if there exist higher parameter errors between driving system and response system. Compared with the existed results, the method can overcome the effect of mismatched parameters. Numerical simulations of Lorenz and Chen systems verify the effectiveness of the method.

**Key words:** Chaos; Synchronization; Feedback control; Private communication

### 1 引言

混沌系统具有对初始条件以及系统参数极其敏感的特性。系统参数或初始条件的微小差异, 最终会导致系统完全不同的行为。Pecora 和 Carroll 发现, 一个混沌系统的某些相同的子系统在特定条件下可以相互同步<sup>[1]</sup>。特别是混沌系统的高度随机性和宽带特性, 使得混沌同步在保密通信<sup>[2]</sup>等领域显示出良好的应用前景, 成为近年来混沌系统研究的主要课题。利用反馈控制<sup>[3]</sup>、自适应控制<sup>[4~7]</sup>以及变结构控制<sup>[8]</sup>等方法, 都能使混沌系统达到同步。另外, 反

馈控制律与参数自适应律相结合, 也能使系统达到全部或部分状态的同步<sup>[9,10]</sup>。但该方法并未给出严格的理论分析<sup>[10]</sup>, 也没有给出如何选择反馈控制律以及参数自适应律, 而且对应参数不能相差太大。

为了克服上述缺点, 本文利用 Lyapunov 稳定性理论, 以 Lorenz 系统和 Chen 系统为例, 给出了严格的稳定性理论分析。所得结果不但能保证同步系统的全局稳定性, 而且可根据 Lyapunov 函数来选择合适的反馈控制律和参数自适应律。另外, 即使在参数匹配误差很大的情况下, 混沌系统也能达到同

收稿日期: 2002-03-26; 修回日期: 2002-08-09。

作者简介: 陈茂银(1975—), 男, 山东莱芜人, 博士, 从事非线性科学、复杂网络的研究; 韩正之(1947—), 男, 浙江义乌人, 教授, 博士生导师, 从事非线性科学等研究。

步。Lorenz 系统和 Chen 系统的仿真结果表明了该方法的有效性。

## 2 Lorenz 系统

首先利用 Lorenz 系统来构造同步系统。驱动系统和响应系统分别为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma_1(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \rho_1 x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - \beta_1 x_3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sigma_2(y_2 - y_1) + h(*) \\ \dot{y}_2 = \rho_2 y_1 - y_2 - y_1 y_3 \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - \beta_2 y_3 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $h(*)$  是控制律。假定系统(1)和(2)满足下列条件:

- 1)  $\rho_1 = \rho_2 = \rho > 0, \beta_1 = \beta_2 = \beta > 0$ ;
- 2)  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 > 0$  是常数或慢时变的,  $\sigma_2 > 0$  是可变的。

定义误差

$$e_i = y_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$e_{\sigma} = \sigma_2 - \sigma_1$$

则误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \sigma_1(e_2 - e_1) + e_{\sigma}(y_2 - y_1) + h(*) \\ \dot{e}_2 = \rho e_1 - e_2 - x_1 e_3 - x_3 e_1 - e_1 e_3 \\ \dot{e}_3 = x_2 e_1 + x_1 e_2 + e_1 e_2 - \beta e_3 \\ \dot{e}_{\sigma} = g(*) \end{cases} \quad (3)$$

其中  $g(*)$  是参数自适应律。于是同步系统的稳定性便等价于误差系统(3)在原点的稳定性。文献[9, 10] 仅仅保证系统在同步流形附近的收敛性。下述定理表明: 只要根据 Lyapunov 函数适当选取控制律  $h(*)$  和自适应律  $g(*)$ , 就能保证系统(3)在原点的全局渐近稳定性。

**定理 1** 设驱动 Lorenz 系统对于参数  $(\sigma_1, \rho_1, \beta_1)$  是混沌的。对于误差系统(3), 取反馈控制律和参数自适应律

$$h(*) = -K(y_1 - x_1) \quad (4a)$$

$$e_{\sigma} = g(*) = -(y_1 - x_1)(y_2 - y_1) - \gamma(\sigma_2 - \sigma_1) \quad (4b)$$

其中可调参数  $\gamma > 0$ 。只要  $K$  充分大, 则误差系统(3)在原点渐近稳定, 即驱动系统(1)和响应系统(2)达到同步。

证明 取 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_{\sigma}^2)$$

沿系统(3)的轨迹对时间  $t$  求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\sigma_1 e_1^2 - e_2^2 - \beta e_3^2 + (\sigma_1 + \\ & \rho - x_3)e_1 e_2 + x_2 e_1 e_3 + \\ & e_{\sigma} e_1 (y_2 - y_1) + e_{\sigma} e_{\sigma} + e_1 h(*) \end{aligned} \quad (5)$$

根据式(4a)和(4b), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -(\sigma_1 + K)e_1^2 - e_2^2 - \beta e_3^2 - \\ & \gamma e_{\sigma}^2 + (\sigma_1 + \rho - x_3)e_1 e_2 + x_2 e_1 e_3 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -[e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_{\sigma}] \times \\ & \begin{bmatrix} \sigma_1 + K & -\frac{\sigma_1 + \rho - x_3}{2} & -\frac{x_2}{2} & 0 \\ -\frac{\sigma_1 + \rho - x_3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{2} & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_{\sigma} \end{bmatrix} = \\ & -[e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_{\sigma}] A(K) [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_{\sigma}]^T \end{aligned} \quad (6)$$

由于驱动系统是混沌的, 所以存在  $M > 0$ , 使得  $\max(|x_2|, |x_3|) < M$ 。根据式(6), 只要  $K$  充分大, 且

$$K > \frac{\beta(\sigma_1 + \rho + M)^2 + M^2}{4\beta} - \sigma_1$$

就能保证矩阵  $A(K)$  是正定阵, 因此  $\dot{V}(t) < 0$ 。所以: 1)  $e_1 \in L^{\infty}, e_2 \in L^{\infty}, e_3 \in L^{\infty}, e_{\sigma} \in L^{\infty}$ ; 2)  $e_1 \in L^2, e_2 \in L^2, e_3 \in L^2, e_{\sigma} \in L^2$ 。根据 Barbalat 引理<sup>[11]</sup>, 对误差系统(3)的任意初始状态  $(e_1(0), e_2(0), e_3(0), e_{\sigma}(0))$ , 有  $e_1 \in L^{\infty}, e_2 \in L^{\infty}, e_3 \in L^{\infty}, e_{\sigma} \in L^{\infty}$ 。因此  $e_1 \rightarrow 0, e_2 \rightarrow 0, e_3 \rightarrow 0, e_{\sigma} \rightarrow 0$ , 即  $y_i \rightarrow x_i (i = 1, 2, 3), \sigma_2 \rightarrow \sigma_1, t \rightarrow \infty$ 。故驱动系统(1)和响应系统(2)达到同步。

从参数自适应律(4b)和(6)可以看出, 误差系统(3)在原点是全局渐近稳定的, 而文献[9, 10] 仅在同步流形附近成立, 并且要求较小的参数误差。另外, 自适应律(4b)引入了参数  $\gamma$ ,  $\gamma$  越大, 同步速度越快, 对外部干扰的抑制能力越强。

## 3 Chen 系统

下面利用 Chen 系统来阐明该方法的有效性。假设驱动系统和响应系统分别为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = (c - a_1)x_1 + c_1 x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b_1 x_3 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_2(y_2 - y_1) + h_1(*) \\ \dot{y}_2 = (c - a_2)y_1 + cy_2 - y_1y_3 + h_2(*) \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - by_3 \end{cases} \quad (8)$$

其中  $h_1(*)$  和  $h_2(*)$  是反馈控制律。假定系统(7)和(8)满足如下条件: 1)  $c_1 = c_2 = c > 0, b_1 = b_2 = b > 0$ ; 2)  $a_1 > 0, a_1, a_2, a_1$  是常数或慢时变的,  $a_2$  是可调的。

定义误差

$$\begin{aligned} e_i &= y_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ e_a &= a_2 - a_1 \end{aligned}$$

则误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_a(y_2 - y_1) + a_1(e_2 - e_1) + h_1(*) \\ \dot{e}_2 = c(e_1 + e_2) - x_1e_3 - x_3e_1 - e_1e_3 - a_1e_1 - e_ay_1 + h_2(*) \\ \dot{e}_3 = x_2e_1 + x_1e_2 + e_1e_2 - be_3 \\ \dot{e}_a = g(*) \end{cases} \quad (9)$$

其中  $g(*)$  是参数自适应律。

只要选取适当的反馈控制律  $h_1(*)$ ,  $h_2(*)$  以及参数自适应律  $g(*)$ , 就能保证误差系统(9)在原点  $(0, 0, 0, 0)^T$  的渐近稳定性。

**定理 2** 设驱动 Chen 系统是混沌的。取反馈控制律

$$h_1(*) = -K_1(y_1 - x_1) \quad (10a)$$

$$h_2(*) = -K_2(y_2 - x_2) \quad (10b)$$

以及参数自适应律

$$\begin{aligned} \dot{e}_a &= g(*) = \\ &(y_2 - x_2)y_1 - (y_1 - x_2) \times \\ &(y_2 - y_1) - \mathcal{Y}(a_2 - a_1) \end{aligned} \quad (10c)$$

其中可调参数  $\mathcal{Y} > 0$ 。只要  $K_1$  和  $K_2$  充分大, 误差系统(9)就能在原点渐近稳定。

证明 取 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_a^2)$$

沿系统(9)的轨迹对时间  $t$  求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \\ &- a_1e_1^2 + ce_2^2 - be_3^2 + (c - x_3)e_1e_2 + \\ &x_2e_1e_3 + e_ae_a - e_ae_2y_1 + \\ &e_ae_1(y_2 - y_1) + e_1h_1(*) + e_2h_2(*) \end{aligned} \quad (11)$$

由式(10a) ~ (10c) 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \\ &-(K_1 + a_1)e_1^2 - (K_2 - c)e_2^2 - \\ &be_3^2 - \mathcal{Y}e_a^2 + (c - x_3)e_1e_2 + x_2e_1e_3 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= - [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_a] \times \\ &A(K) [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_a]^T \end{aligned} \quad (12)$$

由于系统(7)是混沌的, 所以存在  $M > 0$ , 使得  $\max(|x_2|, |x_3|) < M$ 。只要  $K_1$  和  $K_2$  充分大, 满足  $K_2 - c > 0$

$$K_1 > \frac{(c + M)^2}{4(K_2 - c)} + \frac{M^2}{4b} - a_1$$

就能保证矩阵  $A(K)$  是正定阵, 因此  $\dot{V}(t) < 0$ 。根据  $V(t)$  的性质, 得  $e_1 \rightarrow 0, e_2 \rightarrow 0, e_3 \rightarrow 0, e_a \rightarrow 0$ 。即  $y_i \rightarrow x_i (i = 1, 2, 3), a_2 \rightarrow a_1, t \rightarrow \infty$ 。所以系统(7)和系统(8)达到同步。

**注 1** 自适应律(10a)和(10c)需要利用误差状态  $e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 - x_2$  的信息。根据式(9)和(10b),  $e_1$  的信息可用滤波器

$$\dot{\eta} = -a_1\eta + a_1e_2, \quad \eta(0) \text{ 任意} \quad (13)$$

来估计。所以式(10a)和(10c)变为

$$\begin{cases} h_1(*) = -K_1\eta \\ \dot{a}_2 = g(*) = \\ y_1(y_2 - x_2) - \eta(y_2 - y_1) - \mathcal{Y}(a_2 - a_1) \\ \dot{\eta} = -a_1\eta + a_1(y_2 - x_2) \end{cases} \quad (14)$$

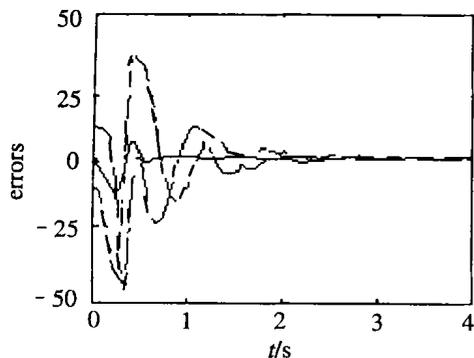
#### 4 数值仿真

**例 1** Lorenz 系统: 设系统(1)的初始条件和参数分别为  $(-4, 8, 3)^T, (10, 28, 8/3)$ ; 系统(2)的初始条件和参数分别为  $(4, -5, 8)^T, (30, 28, 8/3)$ ; 参数误差为  $e_a(0) = 20$ 。反馈控制律以及参数自适应律取式(4a)和(4b), 其中:  $K = 30, \mathcal{Y} = 2$ 。

数值仿真结果如图 1 所示。从图 1(a) 可以看出, 误差分量  $e_i (i = 1, 2, 3)$  能趋于零; 从图 1(b) 可以看出, 系统(2)的参数  $\sigma_2$  能逼近系统(1)的参数  $\sigma_1$ ; 假设参数  $\sigma_1(t)$  在标称值  $\sigma_1 = 10$  附近作周期性扰动, 即  $\sigma_1(t) = \sigma_1 + 0.2\sin(40t)$ , 从图 1(c) 可以看出, 响应系统的参数  $\sigma_2(t)$  仍能逼近驱动系统的标称参数值  $\sigma_1 = 10$ , 而且系统(1)和系统(2)仍然同步。

**例 2** Chen 系统: 设系统(7)的初始条件和参数分别为  $(10, -12, 13)^T, (35, 3, 28)$ ; 系统(8)的初始条件和参数分别为  $(-5, 10, -5)^T, (40, 3, 28)$ ; 参数误差为  $e_a(0) = 5$ 。反馈控制律以及参数自适应律取式(10b)和(14), 其中:  $K_1 = 40, K_2 = 4, \mathcal{Y} = 2$ 。

仿真结果如图 2 所示。从图 2 可以看出, 误差  $e_i (i = 1, 2, 3)$  趋于零, 系统(8)的参数  $a_2$  能较快地趋于系统(7)的参数  $a_1$ 。即使对驱动系统的参数  $a_1$



(a) 误差曲线

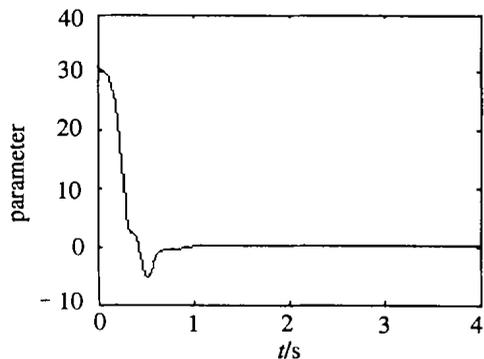
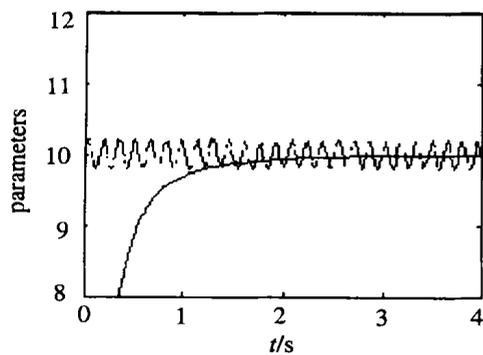
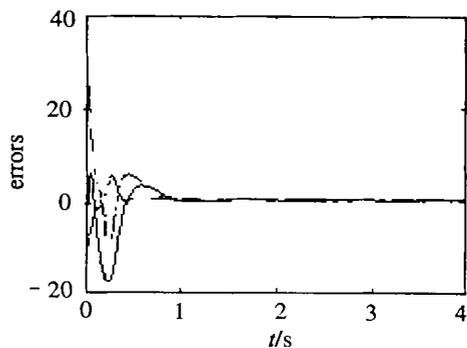
(b) 参数  $\sigma_2$  曲线(c) 参数  $\sigma_{1,2}$  的对比

图 1 Lorenz 系统仿真结果



(a) 误差曲线

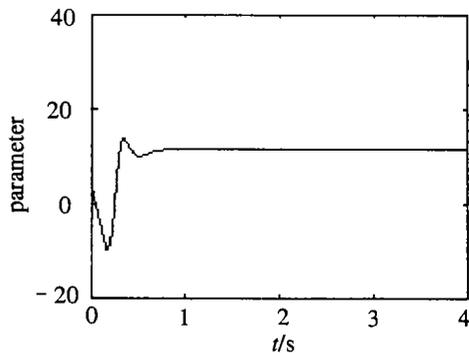
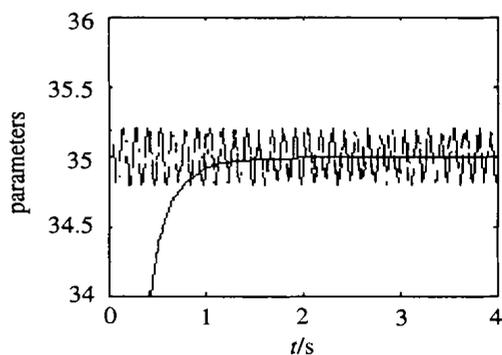
(b) 参数  $a_2$  曲线(c) 参数  $a_{1,2}$  的对比

图 2 Chen 系统仿真结果

施加周期性干扰  $0.2\sin(50t)$ , 参数  $a_2$  仍能逼近标称参数  $a_1 = 35$ 。

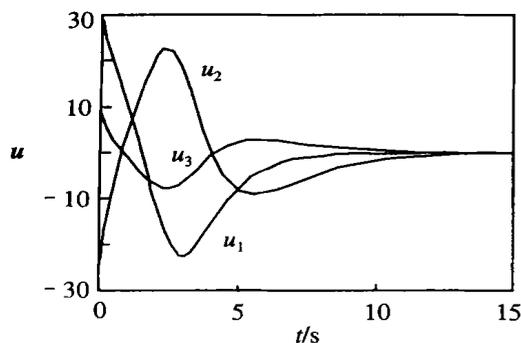
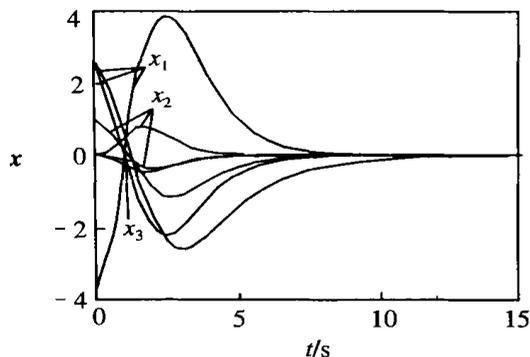
## 5 结论

本文利用 Lyapunov 稳定性理论, 提出一种具有不匹配参数的混沌系统的同步控制方法。只要根据 Lyapunov 函数选择合适的反馈控制律和参数自适应律, 就能保证同步系统的全局稳定性。与文献 [9, 10] 相比, 该方法能更好地克服较大参数误差对同步的影响, 并具有较强的干扰抑制能力。Lorenz 系统和 Chen 系统的数值仿真结果表明了该方法的有效性。

## 参考文献 (References):

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Phys Rev Lett*, 1990, 64(8): 821-824.
- [2] Yang T, Chua L O. Secure communication via chaotic parameter modulation[J]. *IEEE Trans CAS-I*, 1996, 43(9): 817-819.
- [3] 刘锋, 陈小利, 穆肇骊, 等. 混沌系统的反馈同步及其在保密通讯中的应用[J]. *电子学报*, 2000, 28(8): 46-48. (Liu F, Chen X L, Mu Z L, et al. Feedback synchronization of chaotic system and its application to private communication[J]. *Electronic J*, 2000, 28(8): 46-48.)

(下转第 412 页)

图 3 控制  $u$  仿真曲线图 4 状态  $x$  仿真曲线

## 5 结 论

本文针对多变量模型不确定系统,提出一种二阶终端滑模分解控制方法。通过状态变换和去耦合处理,将系统转换为块能控标准型,它由输入输出子系统和稳定的零动态子系统组成。对输入输出子系

统提出了特殊的二阶终端滑模超曲面和相应的控制策略,使该子系统状态渐近收敛到平衡点,稳定的零动态子系统随后也渐近收敛到平衡点。本文所提出的方法对于控制维数较高的系统具有较大的意义,可简化设计,实现鲁棒分解控制。同时,由于采用了二阶滑模的思想,可有效地消除系统的高频抖振。最后对一个 7 阶多变量模型不确定系统进行仿真,结果表明了所提出方法的有效性。

## 参考文献 (References):

- [1] Lukyanov A G, Utkin V I. Time-varying linear system decomposed control[A]. *Proc American Control Conf* [C]. Philadelphia, 1998. 2884-2888.
- [2] Slotine J E, Li W. *Applied Non-linear Control*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991. 226-269.
- [3] Man Z, Yu X H. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems[J]. *IEEE Trans Fundamental Theory and Applications*, 1997, 44(11): 1065-1070.
- [4] Bartolini G, Ferrara A, Usai E. Chattering avoidance by second-order sliding mode control[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1998, 43(2): 241-246.
- [5] Wu Y, Yu X, Man X. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems[J]. *Systems and Control Letters*, 1998, 34(5): 281-288.
- [6] Feng Y, Yu X, Man Z. Nonsingular terminal sliding mode control and its applications to robot manipulators [A]. *Proc 2001 IEEE Int Symp Circuits and Systems* [C]. Sydney, 2001. 3: 545-548.

(上接第 406 页)

- [4] Hong Y G, Qin H S. Adaptive synchronization of chaotic systems via state or output feedback control[J]. *Int J Bifurc Chaos*, 2001, 11(4): 1149-1158.
- [5] Femat R, Jose A R, Guillermo F A. Adaptive synchronization of high-order chaotic systems: A feedback with low-order parameterization[J]. *Physica D*, 2000, 139(3): 231-246.
- [6] Liao T L, Tsai S H. Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communication [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2000, 11(9): 1387-1396.
- [7] Wang C, Ge S S. Adaptive synchronization of uncertain

chaotic systems via backstepping design[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2001, 12(7): 1199-1206.

- [8] Fang J Q. Switching manifold approach to chaos synchronization[J]. *Phys Rev E*, 1999, 59(3): 2523-2526.
- [9] Alexander K K, Vladimir D S. Exact synchronization of mismatched chaotic systems[J]. *Int J Bifurc Chaos*, 1996, 6(3): 569-580.
- [10] Jolly K J, Amritkar R E. Synchronization and adaptive control[J]. *Int J Bifurc Chaos*, 1994, 6(6): 1687-1693.
- [11] Slotine J J, Li W P. *Applied Nonlinear Control*[M]. Spanish: Prentice Hall, 1991. 122-125.