

文章编号: 1001-0920(2003)04-0423-04

## 双速率采样控制系统的仿真

赵霞, 姚郁, 贺风华

(哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 应用离散提升技术、快速采样算子和快速保持算子, 研究双速率采样控制系统的仿真方法。该方法可给出系统的接近连续信号的仿真结果。最后给出了具体的仿真步骤, 并结合实例在 MATLAB 环境下编程实现。

**关键词:** 双速率采样控制系统; 离散提升技术; 快速采样算子; 快速保持算子

中图分类号: TP273

文献标识码: A

## Simulation of dual-rate sampled-data system

ZHAO Xia, YAO Yu, HE Feng-hua

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** The simulation problem of a dual-rate sampled-data system is studied by applying discrete lifting technology, quick sampling operator and quick hold operator. The method can achieve the result that is close to the simulation of continuous-time signal. The concrete simulation is stepped and programmed with a real example under MATLAB environment.

**Key words:** Dual-rate sampled-data system; Discrete lifting technology; Quick sampling operator; Quick hold operator

### 1 引言

采样控制系统是指被控对象连续而控制器为数字式的系统<sup>[1]</sup>。目前, 大多数控制系统都是由连续被控对象在计算机离散控制下实现的采样控制系统。随着对系统要求的不断提高, 单速率采样控制系统已不能满足要求, 因此多速率采样控制系统便应运而生。多速率采样控制系统在实际工程中具有广泛的实用前景<sup>[2]</sup>, 这是因为:

1) 在复杂的多变量控制系统中, 要求所有物理信号的采样频率都相同是不现实的。

2) 采样器和保持器的频率越高, 系统的性能也越好, 但是快速的 A/D 和 D/A 转换则意味着高成本。因此对于不同带宽的信号, 应使用不同的 A/D 和 D/A 转换速率, 以实现性能与价格之间的最优折

衷。

3) 多速率控制器一般是时变的控制器, 它具有单速率控制器无法比拟的优点。例如提高系统的增益裕度, 使系统具有一致稳定性, 便于实现分散控制等。

一种较简单的多速率采样控制系统是双速率采样控制系统<sup>[3]</sup>, 如图 1 虚框所示。该系统的仿真过程定义为: 给定连续输入信号  $w$ , 仿真其连续输出信

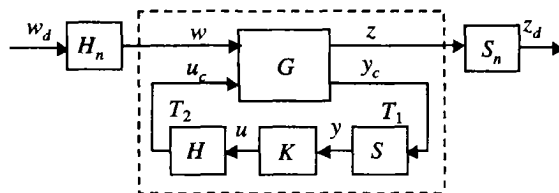


图 1 带虚拟采样器和保持器的双速率采样控制系统

收稿日期: 2002-06-05; 修回日期: 2002-07-15。

作者简介: 赵霞(1974—), 女, 内蒙古包头人, 博士生, 从事系统辨识、采样控制系统分析与设计等研究; 姚郁(1963—), 男, 黑龙江佳木斯人, 教授, 博士生导师, 从事采样控制系统分析与设计、非线性系统等研究。

号  $z$  的过程。

文献[4]给出了单速率采样控制系统的高精度仿真。由于单速率采样控制系统中只存在单一的采样周期,因而其仿真过程只需应用一些较成熟的理论,如连续传函的单一速率离散化。在双速率采样控制系统中,由于存在两种采样周期,且控制器为时变控制器,因而加大了仿真的难度。

本文采用离散提升技术<sup>[5]</sup>,将系统中两种不同的采样周期有机地联系起来,把时变控制器变为时不变控制器。同时采用快速采样算子和快速保持算子,给出了双速率采样控制系统的仿真方法。

### 2 预备知识

图 1 中采样器的采样周期  $T_1 = ph$ , 采样算子  $S:y(k) = Sy_c(t) = y_c(kph)$ , 保持器的采样周期  $T_2 = qh$ , 保持算子  $H:u_c(kqh + r) = Hu(k)$ ,  $0 < r < qh$ 。其中: $p$  和  $q$  为互质正整数, $h$  为基本采样时间间隔。设  $l$  为  $p$  和  $q$  的最小公倍数,则  $T = lh$  为  $T_1$  和  $T_2$  的最小公倍周期。令  $p_1 = l/p, q_1 = l/q$ , 则有  $T = lh = p_1ph = q_1qh$  成立。

$G$  为广义被控对象,其状态空间实现为

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

$K$  为双速率离散控制器,应满足相应的因果性、周期性和有限维性。

对于任意  $T > 0, D_T$  为连续空间上的延迟算子,即  $D_T u_c(t) = u_c(t - T)$ ;  $U$  为离散空间上的一步滞后算子;  $U^*$  为离散空间上的一步超前算子。

定义 1<sup>[6]</sup> 如果  $(U^*)^q K U^{p_1} = K$  成立,则称  $K$  为  $(p, q)$ -周期离散控制器。

定义 2 如果连续系统  $G$  满足  $D_T G = G D_T$ , 则称  $G$  为  $T$ -周期连续时变系统。

### 3 仿真方法

#### 3.1 仿真表达式

定理 1 已知  $K$  为  $(p, q)$ -周期离散控制器,采样算子和保持算子如上所述,则  $HKS$  为  $T$  周期连续时变系统。

证明 参见图 1 中各信号间关系,则有下式成立

$$\begin{aligned} D_T H K S y_c(t) &= D_T u_c(t) = u_c(t - T) = \\ u_c(t - q_1 q h) &= u_c[(k - q_1) q h + r] = \\ H u(k - q_1) &= H U^{q_1} u(k) = H U^{q_1} K y(k) = \\ H K U^{p_1} y(k) &= H K y(k - p_1) = \\ H K S y_c(t - p_1 p h) &= H K S y_c(t - T) = \end{aligned}$$

$$H K S D_T y_c(t)$$

即

$$D_T H K S y_c(t) = H K S D_T y_c(t)$$

$$D_T H K S = H K S D_T$$

其中  $0 < r < qh$ 。

由定义 2 可知,  $HKS$  为  $T$  周期连续时变系统。由于  $HKS$  是  $T$  周期的,所以同单速率情形类似,图 1 中系统的输入输出关系可表示为

$$z = [G_{11} + G_{12}(I - HKS G_{22})^{-1} HKS G_{21}] w \tag{1}$$

或

$$z = [G_{11} + G_{12} H (I - K S G_{22} H)^{-1} K S G_{21}] w \tag{2}$$

在双速率采样控制系统的输入输出通道中,加入虚拟的快速采样器和保持器,如图 1 所示,虚拟快速采样器和保持器的采样周期均为  $T/n$ 。

$w_d$  是  $w$  以  $T/n$  为采样周期的采样信号,当输入信号的仿真时间为  $mph$  时,有

$$w_d = w(kT/n), k = 0, 1, \dots, mn/p_1 \tag{3}$$

$z_d$  与  $z$  的关系同上。显然,当  $n$  选为  $l$  的整数倍。研究图 1 所示系统的仿真,便可得到虚框中双速率采样控制系统连续输入输出信号的仿真结果。

图 1 中的  $z_d = S_n z, w = H_n w_d$ , 故由式(2)得

$$\begin{aligned} z_d &= S_n z = S_n [G_{11} + G_{12} H (I - \\ &K S G_{22} H)^{-1} K S G_{21}] H_n w_d = \\ &[G_{11n} + G_{12n} S_n H (I - \\ &K S G_{22} H)^{-1} K S H_n G_{21n}] w_d \end{aligned} \tag{4}$$

其中  $G_{11n}, G_{12n}, G_{21n}$  为对应于周期  $T/n$  的离散化<sup>[4]</sup>。

式(4)即为双速率采样控制系统的仿真表达式。

#### 3.2 仿真表达式的计算

欲求表达式(4),须先求出  $G_{11n}, G_{12n}, G_{21n}, S_n H, S H_n, (I - K S G_{22} H)^{-1} K$  等的值。其中  $G_{11n}, G_{12n}, G_{21n}$  分别为连续传函  $G_{11}, G_{12}, G_{21}$  单一周期  $T/n$  的离散化,均易计算。下面讨论  $S_n H, S H_n, (I - K S G_{22} H)^{-1} K$  的计算。

##### (1) $S H_n$ 的计算

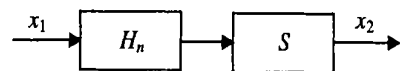


图 2  $S H_n$  的输入输出表示

图 2 中  $H_n$  的周期为  $T/n = lh/n$ ,  $S$  的周期为  $ph$ , 则有  $x_2(0) = x_1(0), x_2(1) = x_1(n/p_1), \dots, x_2(m-1) = x_1((m-1)n/p_1)$ , 故有

$$SH_n = \begin{matrix} \underbrace{\quad\quad\quad}_{n/p} & \underbrace{\quad\quad\quad}_{n/p} & \underbrace{\quad\quad\quad}_{n/p} \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{共 } m \text{ 行}$$

(2)  $S_n H$  的计算  
同理可得  $S_n H$  的表达式

$$S_n H = \begin{matrix} \underbrace{\quad\quad\quad}_m \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n/q \\ \\ \\ n/q \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{共 } mn/q \text{ 行}$$

(3)  $(I - KSG_{22}H)^{-1}K$  的计算  
由离散采样算子和离散保持算子的定义, 有  
 $S_p: l \quad l, \quad \Psi = S_p \Phi \Leftrightarrow \Psi(k) = \Phi_{kp}$   
 $H_q: l \quad l, \quad v = H_q \Phi \Leftrightarrow v(kq+r) = \Phi_k$

$r = 0, 1, \dots, q-1$   
可得<sup>[6]</sup>  
 $S G_{22} H = S_p S_h G_{22} H_h H_q = S_p G_{22d} H_q \quad (5)$   
其中  $G_{22d}$  可通过单一速率  $h$  离散化过程得到。对于  $(I - K S_p G_{22d} H_q)^{-1} K$  中仍为周期时变的  $S_p G_{22d} H_q$  和  $K$ , 本文利用离散提升算子将其变为时不变系统, 具体过程如图 3 所示。此时仿真表达式 (4) 可表示为图 4。

经离散提升后, 周期时变环节  $S_p G_{22d} H_q$  和  $K$  变为时不变的  $L_{p_1} S_p G_{22d} H_q L_{q_1}^{-1}$  和  $L_{q_1} K L_{p_1}^{-1}$ , 计算过程如下:

(1)  $L_{q_1} K L_{p_1}^{-1}$  的计算

如果双速率控制器  $K$  的状态方程为

$$\begin{aligned} x_k(k+1) &= A x_k(k) + \sum_{j=0}^{p_1-1} B_j y(p_1 k + j) \\ u(q_1 k + i) &= C_i x_k(k) + \sum_{j=0}^{p_1-1} D_{i,j} y(p_1 k + j) \end{aligned} \quad i = 0, 1, \dots, q_1 - 1$$

则  $L_{q_1} K L_{p_1}^{-1}$  的状态方程可表示为

$$\begin{cases} x_k(k+1) = \tilde{A} x_k(k) + \tilde{B} \tilde{y}(k) \\ \tilde{u}(k) = \tilde{C} x_k(k) + \tilde{D} \tilde{y}(k) \end{cases} \quad (6)$$

其中

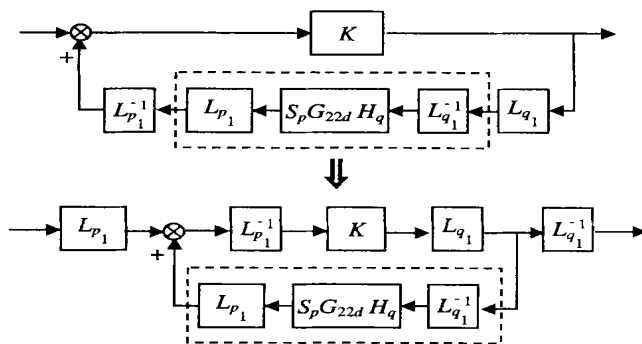
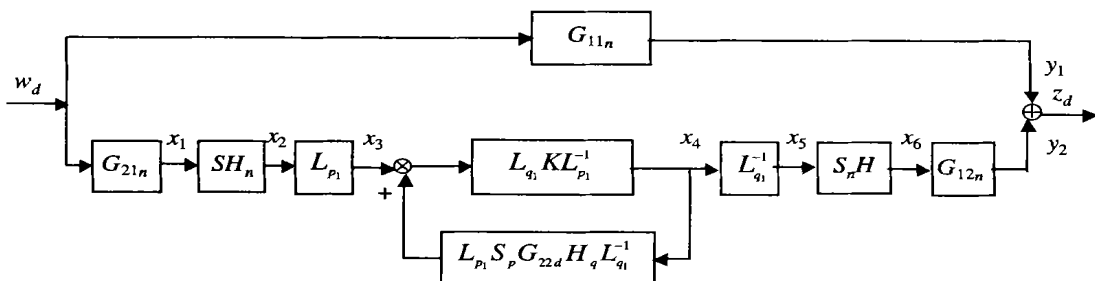


图 3  $(I - KSG_{22}H)^{-1}K$  的离散提升示意



$$\tilde{y} = L_{p_1} y, \quad \tilde{u} = L_{q_1} u, \quad \tilde{A} = A$$

$$\tilde{B} = [B_0 \ B_1 \ \dots \ B_{p_1-1}]$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{q_1-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_{0,0} & \dots & D_{0,p_1-1} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{q_1-1,0} & \dots & D_{q_1-1,p_1-1} \end{bmatrix}$$

(2)  $L_{p_1} S_p G_{22d} H_q L_{q_1}^{-1}$  的计算

引理 1<sup>[6]</sup> 设  $P$  的状态变量为  $x$ , 状态模型为  $[A, B, C, D]$ ,  $m, \bar{m}, n, \bar{n}$  和  $s$  是满足下列关系的正整数:  $m\bar{m} = n\bar{n} = s$ . 则系统  $\tilde{P}: = L_{\bar{m}} S_m P H_n L_{\bar{n}}^{-1}$  的状态变量为  $S_s x$  ( $S_s$  为离散采样算子), 状态模型可表示为  $[\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}]$ . 其中

$$\tilde{A} = A^s$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} A^{s-1-r} B & \dots & A^{s-1-r} B_1 \end{bmatrix}_{r=0}^{n-1}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA^m \\ \vdots \\ CA^{s-m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_{0,0} & \dots & D_{0,\bar{n}-1} \\ D_{1,0} & \dots & D_{1,\bar{n}-1} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{\bar{m}-1,0} & \dots & D_{\bar{m}-1,\bar{n}-1} \end{bmatrix}$$

式中

$$D_{i,j} = D \chi_{j n, (j+1)m}(im) + CA^{im-1-r} B \chi_{(0,im)}(r)_{r=jn}^{(j+1)n-1}$$

特征  $X$  函数为

$$\chi_{(p,q)}(r) = \begin{cases} 1, & p \leq r < q \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

取  $\bar{m} = p_1, \bar{n} = q_1, m = p, n = q, s = l$ , 由上述结论, 可从  $G_{22d}$  求得  $L_{p_1} S_p G_{22d} H_q L_{q_1}^{-1}$  的状态空间模型。

综上所述可知图 4 中系统的仿真过程为: 输入  $m p h$  时间段内的信号,  $w_d = \{w_d(0) \ \dots \ w_d(mn/p_1)\}$ , 则

$$w_d(k) = w(kT/n) \Rightarrow$$

$$\text{计算 } G_{11n}, G_{12n}, G_{21n}, G_{22d} \Rightarrow$$

$$\text{计算 } L_{p_1} S_p G_{22d} H_q L_{q_1}^{-1} \Rightarrow$$

$$\text{计算 } L_{q_1} K L_{p_1}^{-1} \Rightarrow$$

$$\text{计算 } x_1 = G_{21n} w_d, x_2 = S H_n x_1 \Rightarrow$$

$$\text{计算 } x_3 = L_{p_1} x_2 \Rightarrow$$

$$\text{计算 } x_4 = (I - L_{q_1} K L_{p_1}^{-1},$$

$$L_{p_1} S_p G_{22d} H_q L_{q_1}^{-1})^{-1} L_{q_1} K L_{p_1}^{-1} x_3 \Rightarrow$$

$$\text{计算 } x_5 = L_{q_1}^{-1} x_4 \Rightarrow$$

$$\text{计算 } x_6 = S_n H_n x_5 \Rightarrow$$

$$\text{计算 } y_2 = G_{12n} x_6, y_1 = G_{11n} w_d \Rightarrow$$

$$\text{计算 } z_d = y_2 + y_1$$

#### 4 仿真举例

图 1 中广义被控对象  $G$  为

$$A = \begin{bmatrix} -0.14 & 0 & -0.004 & 0 \\ 0 & -0.14 & 0 & -0.004 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.004 \\ 0 & 0 & 0.004 & 0.004 \end{bmatrix}$$

控制器  $K$  为

$$A = \begin{bmatrix} 0.045 & 62 & 0.954 & 38 \\ & 1 & 0 & \end{bmatrix}, \quad B_j = \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$$

$$C_i = [-953.258 \ 69 \ 955.213 \ 07]$$

$$D_{ij} = 5.237 \ 70$$

采样周期  $T_1 = 2 \text{ s}, T_2 = 3 \text{ s}, p = 2, q = 3, h = 1, p_1 = 3, q_1 = 2, l = 6, T = 6$ . 令  $m = 6, n$  分别为 4 800, 7 200, 9 600, 输入  $w_d$  为单位阶跃信号。采用 MATLAB 语言编程, 并对上述系统进行仿真, 其结果如图 5 所示。

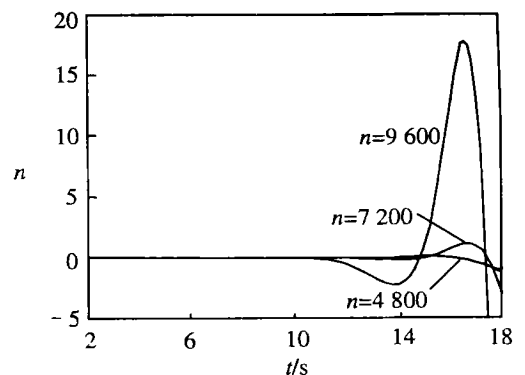


图 5 仿真图形

#### 5 结 语

本文针对双速率采样控制系统的特点, 应用离散提升技术、快速采样算子和快速保持算子, 研究双速率采样控制系统的仿真方法, 并给出了具体的仿真步骤和仿真实例。由于双速率控制器为时变控制器, 所以有关双速率采样控制系统仿真精度的验证问题还有待于进一步研究。

(下转第 431 页)

文讨论。

## 6 结 语

本文采用非线性的混沌方法,其特点是不稳定、非平衡、无序、不确定和非一致,这与线性观点截然相反。现有方法是靠一小段动态过程的轨道值进行辨识,具有很大的局限性,而本文方法是使系统失稳后成为混沌态。本文利用长轨道的曲折形状进行辨识,通过分析两符号序列的异同来表示两轨道弯曲状况。这就避免了大量的测量,并可使每一周期期间的干扰产生相互抵消作用,从而大大提高了估计精度。不考虑系统实验误差,只要有足够长的符号序列,便可达到任意所需的估计精度。

### 参考文献(References):

- [1] 普利高津 I. 湛敏译. 确定性的终结[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1999.
- [2] 童勤业, 严筱刚, 钱鸣奇. 混沌测量的一种改进方案[J]. 仪器仪表学报, 2000, 21(1): 22-27.  
(Tong Q Y, Yan X G, Qian M Q. A new method of chaotic measurement[J]. *Chinese J of Scientific Instrument*, 2000, 21(1): 22-27.)
- [3] 陈素琴, 袁瑞跃, 童勤业. 多数制式混沌 A/D 变换器[J]. 计量学报, 2000, 21(1): 12-16.

(Chen S Q, Yuan R Y, Tong Q Y. Study on the multi-number system chaotic A/D conversion[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2000, 21(1): 12-16.)

- [4] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994.
- [5] Hao Bailin. *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative System* [M]. Singapore: World Scientific Press, 1989.
- [6] 关肇直, 张恭庆, 冯德兴. 线性泛函分析[M]. 上海: 上海科技出版社, 1979.
- [7] 邹伯明. 自动控制理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999.
- [8] Pawlak M, Hasiewicz Z. Nonlinear system identification by the Haar multiresolution analysis[J]. *IEEE Trans Circuits and Systems*, 1998, 45(9): 945-961.
- [9] Bai E W, Ye Y. Constrained logarithmic least squares in parameter estimation[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1999, 44(1): 182-186.
- [10] Bai E W, Qiu L, Tempo R. Unfalsified weighted least squares estimates in set-membership identification[J]. *IEEE Trans Circuits and Systems*, 1998, 45(1): 41-49.
- [11] Potapov A. Characteristic scales of reconstruction distortions[J]. *Int J Bifurcation and Chaos*, 1998, 18(4): 835-841.

(上接第 426 页)

### 参考文献(References):

- [1] Christansson A K, Lennartson B, Toivonen H. Continuous-discrete and sampled-data  $H_\infty$  control - A unified framework[A]. *Proc 39th IEEE Conf on Decision and Control*[C]. Sydney, 2000. 2: 1936-1941.
- [2] Qiu Li, Chen Tongwen. Multirate sampled-data systems: All  $H_\infty$  suboptimal controllers and the minimum entropy controller[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1999, 44(3): 537-550.
- [3] Chen Tongwen. On stability robustness of a dual-rate control system[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1994, 39(1): 164-167.

- [4] 毕贞福, 董锡军. 采样控制系统的高精度仿真[J]. 计算机仿真, 1998, 19(1): 58-60.  
(Bi Zhenfu, Dong Xijun. High precision simulation of sampled-data system[J]. *Computer Simulation*, 1998, 19(1): 58-60.)
- [5] Francis B A, Georgiou T T. Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1988, 33(9): 820-832.
- [6] Chen T W, Qiu L.  $H_\infty$  design of general multirate sampled-data control systems[J]. *Automatica*, 1994, 30(7): 1139-1152.