

文章编号: 1001-0920(2003)05-0563-05

同时含有状态和输入时滞系统的滑模控制

夏元清, 韩京清

(中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100080)

摘要: 研究同时含状态和输入时滞的系统变结构控制问题, 基于LM I, 给出了存在滑动模态的时滞相关的充分条件。利用LM I的解, 得到了两种不同的滑动模态和控制器的设计方法。所提出的方法简单易行, 具有较小的保守性, 可进一步推广到多时滞和不确定时滞系统。

关键词: 滑模控制; 时滞; 补偿器; LM I

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Sliding mode control for linear systems with input and state delays

XIA Yuan-qing, HAN Jing-qing

(Institute of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: Two design methods are proposed for the sliding mode control of linear systems with input and state delays. Delay-dependent and delay-independent sufficient conditions are given respectively for the existence of sliding manifolds in terms of LM Is, based on which the corresponding reaching motion controllers are also developed. An example illustrates the design methods.

Key words: Sliding mode control; Time-delay; Compensator; Linear matrix inequality

1 引言

时滞存在于许多工程系统, 常常是系统不稳定和产生不良性能的原因。因此, 时滞系统的研究一直得到众多学者的关注。在控制理论中, 有许多研究不确定时滞系统镇定问题的方法: 状态反馈或输出反馈控制, Riccati 方程方法, LM I方法, Lyapunov 最大最小化方法。然而, 这些方法对控制系统的不确定性较为敏感。

变结构控制具有一些独特性质, 在实际中得到了广泛的应用^[1]。文献[2, 3]考虑了含时滞的系统变结构问题。文献[4, 5]提出利用Lyapunov 方程的方法, 设计同时含状态和输入时滞系统的滑模控制, 该方法需要调节和分解一正定阵。由于调节此类矩

阵没有一定的规律可循, 使得该方法的应用较为困难, 尤其是该方法需要知到使系统仍可镇定的时滞的最大可能界。

本文针对同时含状态和时滞系统的滑模控制进行研究。分别利用基于滑动模态补偿器和状态变换方法, 对所得系统利用滑模进行控制, 给出了存在滑动面的时滞无关和时滞相关的充分条件, 且该条件以LM I形式表示。利用LM I软件包, 能很方便地给出可行解。基于LM I, 利用求广义特征值的优化方法, 可得到使系统仍可镇定的最大时滞。同时利用不等式方法, 得到了控制器的设计方法。本文方法可进一步推广到多时滞和不确定时滞系统。

收稿日期: 2002-07-01; 修回日期: 2002-10-22。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60174027)。

作者简介: 夏元清(1971—), 男, 安徽天长人, 博士, 从事鲁棒控制等研究; 韩京清(1937—), 男, 吉林长白人, 研究员, 博士生导师, 从事控制理论及其应用等研究。

2 问题描述

考虑如下时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + B_1 u(t) + B_2 u(t - \tau) \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \\ u(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^m$ 为状态; $u(t) \in R^m$ 为控制输入; A, A_d 和 B 为适维矩阵且 $\text{rank}(B) = m$ 。

假设 1 $\text{rank}(B_1 + B_2) = m$ 。

本文的目的是解决下列问题:

- 1) 如何设计同时含状态和输入时滞系统(1)的滑动流形;
- 2) 系统(1)可允许的最大时滞是多少。

3 主要结果

取切换流形

$$S(t) = Cx(t) + \int_{t-\tau}^t CA_d x(\xi) d\xi + \int_{t-\tau}^t CB_2 u(\xi) d\xi + \Pi \quad (2)$$

其中: $C \in R^{l \times n}$ 为常数矩阵且满足条件: $C(B_1 + B_2)$ 是可逆的, 根据假设 1, 满足这样条件的 C 是存在的; Π 为滑模补偿器且具有以下形式

$$\dot{\Pi} = -C[(A + A_d) - (B_1 + B_2)K]x(t) \quad (3)$$

$K \in R^{m \times n}$ 为待定常数矩阵。

选定了滑动流形, 下一步是选择控制律, 使到达条件得到满足, 即 $S^T \dot{S} < 0$, 该条件确保系统的轨线在有限时间内到达滑动流形, 然后一直在上面渐近趋向平衡点。考虑如下形式的控制器

$$u(t) = u_{eq} + u_N$$

其中: u_{eq} 为系统(1)的等效控制, u_N 为趋近律。等效控制可通过 u_{eq} 使系统(1)的滑动流形的导数 $\dot{S} = 0$ 获得。 S 对时间 t 进行微分可得

$$\dot{S} = C(A + A_d)x(t) + C(B_1 + B_2)u(t) + \dot{\Pi}$$

注意到式(3), 有

$$\dot{S} = C(B_1 + B_2)Kx(t) + C(B_1 + B_2)u(t)$$

于是, 等效控制为

$$u_{eq} = -Kx(t)$$

这里所取的趋近律 u_N 满足

$$\dot{S} = -gS - \epsilon \text{sign}(S)$$

其中: g 和 ϵ 为常数, $\text{sign}(S(z)) = [\text{sign}(s_1(z)), \dots, \text{sign}(s_l(z))]^T$, 于是可得

$$u_N = -[C(B_1 + B_2)]^{-1}[gS + \epsilon \text{sign}(S)]$$

因而, 可得控制律为

$$u(t) = -Kx(t) - [C(B_1 + B_2)]^{-1}[gS + \epsilon \text{sign}(S)] \quad (4)$$

系统的轨线到达滑动流形后, 在滑动流形上的滑动模态为

$$\dot{x} = (A - B_1K)x(t) + (A_d - B_2K)x(t - \tau) \quad (5)$$

令 $\bar{A} = A - B_1K, \bar{A}_d = A_d - B_2K$, 则式(5)可表示为

$$\dot{x} = \bar{A}x(t) + \bar{A}_d x(t - \tau) \quad (6)$$

由上述可知, 如果满足如下两个条件: 1) 存在 $K \in R^{m \times n}$ 使系统(5)稳定; 2) 存在控制律使得系统轨线在有限时间内到达滑动流形。则滑模控制成立。

下面设计滑动流形和控制律。

首先给出时滞无关的结果。

引理 1^[6] 滑动模态(5)对所有 $\tau \geq 0$ 是稳定的如果存在正定阵 P 和 Q 满足不等式

$$A^T P + PA + PA_d Q^{-1} A_d^T P + Q < 0 \quad (7)$$

定理 1(时滞无关) 如果存在正定阵 $Y \in R^{m \times m}, J \in R^{n \times n}$ 和矩阵 $L \in R^{m \times n}$, 使得下列 LM I 成立

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & A_d Y - B_2 L \\ Y A_d^T - L^T B_2^T & -J \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

其中 $\Gamma_1 = AY + YA^T - B_2 L - L^T B_2^T + J$, 则取 $K = LY^{-1}$, 滑动模态(6)对所有 $\tau > 0$ 是稳定的。

证明 假设式(8)成立。在式(8)两边分别乘以 $\text{diag}\{Y^{-1}, Y^{-1}\}$, 并取 $K = LY^{-1}$, 可得

$$\begin{bmatrix} \Gamma_2 & Y^{-1}(A_d - B_2 K) \\ (A_d - B_2 K)^T Y^{-1} & -Y^{-1} J Y^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

其中 $\Gamma_2 = Y^{-1}(A - B_1 K) + (A - B_1 K)^T Y^{-1} + Y^{-1} J Y^{-1}$ 。再令 $P = Y^{-1}$ 和 $Q = Y^{-1} J Y^{-1}$, 利用 Schur 补公式, 可知式(9)等价于

$$A^T P + PA + PA_d Q^{-1} A_d^T P + Q < 0 \quad (10)$$

由引理 1 知, 滑动模态(6)对所有 $\tau > 0$ 是稳定的。

在这些给定的条件中, 时滞允许任意大。因而, 一般而言它是保守的, 特别是时滞非常小且系统的可稳性依赖于系统的时滞时。

下面给出时滞相关的结果。

定理 2(时滞相关) 如果存在正定矩阵 $P \in R^{m \times m}, W \in R^{n \times n}, Q \in R^{n \times n}$ 和矩阵 $V \in R^{m \times n}$, 使得下列 LM I 成立

$$\begin{bmatrix} \Gamma_3 & \Gamma_4 & Q \\ \Gamma_4^T & -\tau^{-1} W & 0 \\ Q & 0 & -\tau^{-1} Q \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -2P + W & PA_d^T - B_2^T V^T \\ A_d P - B_2 V & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

其中

$$\Gamma_3 = (A + A_d)P + P(A + A_d)^T - (B_1 + B_2)V - V^T(B_1 + B_2)^T$$

$$\Gamma_4 = (A + A_d)P - (B_1 + B_2)V$$

那么, 对给定 $\tau > 0$, 并取 $u_{eq}(t) = VP^{-1}x(t)$, 滑动模态(6) 是稳定的。

证明 由于 $\det |sI - \bar{A} - \bar{A}_d e^{-s\tau}| = 0$ 的解与 $\det |sI - \bar{A}^T - \bar{A}_d^T e^{-s\tau}| = 0$ 的解相同, 所以研究如下系统以代替系统 (6)。

$$\dot{y}(t) = \bar{A}^T y(t) + \bar{A}_d^T y(t - \tau) \quad (13)$$

式(13) 可表示为

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = y(t) + \int_{t-\tau}^t \bar{A}_d^T y(w) dw \\ \dot{z}(t) = (\bar{A} + \bar{A}_d)^T y(t) \end{cases}$$

其次, 考虑 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{cases} V(t) = V_1(t) + V_2(t) \\ V_1(t) = z^T(t)Pz(t) \\ V_2(t) = \int_{t-\tau}^t \int_{t-w}^t y^T(v)Qy(v)dvdw \end{cases}$$

其中 P 和 Q 为正定矩阵。

容易看出, 存在正常数 β_1 和 β_2 使得

$$\beta_1 y(t)^2 \leq V(y(t), t) \\ \beta_2 \sup_{t \in [-2\tau, 0]} y(t + \theta)^2$$

对上述泛函沿式(13) 的解进行微分, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) \\ \dot{V}_1(t) &= y^T(t)(\bar{A} + \bar{A}_d)Pz(t) + z^T(t)P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T y(t) = \\ &= y^T(t)[(\bar{A} + \bar{A}_d)P + P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T]y(t) + W(t) \\ \dot{V}_2(t) &= - \int_{t-\tau}^t y^T(w)Qy(w)dw + \int_{t-\tau}^t y^T(t)Qy(t)dw \end{aligned}$$

其中

$$W(t) = 2 \int_{t-\tau}^t y^T(t)(\bar{A} + \bar{A}_d)PA_d^T y(w)dw$$

注意到对任何向量 u, v 和适维矩阵 $Q > 0$, 有

$$2u^T v \leq u^T Q u + v^T Q^{-1} v$$

因此对任何 $Q > 0$, 下列不等式成立

$$W(t) \leq \int_{t-\tau}^t y^T(t)(\bar{A} + \bar{A}_d)PA_d^T Q^{-1} \bar{A}_d P \times (\bar{A} - \bar{A}_d)^T y(t)dw + \int_{t-\tau}^t y^T(w)Qy(w)dw$$

由上式可知

$$\dot{V}(t) \leq y^T(t)[(\bar{A} + \bar{A}_d)P + P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T]$$

$$\bar{A}_d)^T + \tau Q + \tau(\bar{A} + \bar{A}_d)PA_d^T Q^{-1} \bar{A}_d P (\bar{A} + \bar{A}_d)^T]y(t) \quad (14)$$

式(14) 中的矩阵是负定的如果下列不等式成

立

$$(\bar{A} + \bar{A}_d)P + P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T + \tau Q + \tau(\bar{A} + \bar{A}_d)PA_d^T Q^{-1} \bar{A}_d P (\bar{A} + \bar{A}_d)^T < 0 \quad (15)$$

为了将式(15) 表示为 LMI, 式(15) 变形为

$$\begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{A}_d)P + P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T + \tau Q + \tau(\bar{A} + \bar{A}_d)PW^{-1}P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T - \tau(\bar{A} + \bar{A}_d)P(W^{-1} - \bar{A}_d^T Q^{-1} \bar{A}_d)P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T < 0 \end{bmatrix}$$

其中 W 为满足下列不等式的正定阵

$$W^{-1} > \bar{A}_d^T Q^{-1} \bar{A}_d \quad (16)$$

因而, 式(15) 是负定的如果式(16) 和下列不等式成立

$$\begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{A}_d)P + P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T + \tau Q + \tau(\bar{A} + \bar{A}_d)PW^{-1}P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T < 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

利用 Schur 补公式(16) 和(17) 可知

$$\begin{bmatrix} -W^{-1} & \bar{A}_d^T \\ \bar{A}_d & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_5 & (\bar{A} + \bar{A}_d)P & Q \\ P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T & -\tau W & 0 \\ Q & 0 & -\tau Q \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

其中 $\Gamma_5 = (\bar{A} + \bar{A}_d)P + P(\bar{A} + \bar{A}_d)^T$

在式(18) 两边乘以 $\text{diag}[P, I_n]$, 得到

$$\begin{bmatrix} -PW^{-1}P & PA_d^T \\ \bar{A}_d P & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

由不等式 $PW^{-1}P - 2P + W = (P - W)W^{-1}(P - W) > 0$ 可知 $-2P + W - PW^{-1}P > 0$ 。因而, 如果存在正定阵 P, W 和 Q 满足

$$\begin{bmatrix} -2P + W & PA_d^T \\ \bar{A}_d P & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

则式(20) 成立。取 $K = VP^{-1}$, 则式(11) 和(12) 表明, 对任何满足 $0 < \tau < \bar{\tau}$ 的 τ , 式(19) 和(21) 成立。因此, 如式(11) 和(12) 成立, 则对任何非零 $y(t)$

$R^n, \dot{V}(t)$ 是负定的, 故滑动模态(6) 是稳定的。

下面进一步给出基于变换的系统的滑动模态控制。

添加 m 积分器^[5], 系统(1) 可表示为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= A y_1(t) + A_d y_1(t - \tau) + B_1 y_2(t) + B_2 y_2(t - \tau) \\ \dot{y}_2(t) &= \tilde{u}, \quad \tilde{u} \in R^m \end{aligned}$$

取滑动面

$$s(t) = y_2(t) + K y_1(t)$$

其中 $K \in R^{m \times n}$ 。当系统的轨线到达滑动面时, 其上的滑动模态为

$$y_1(t) = (A - B_1K)y_1(t) + (A_d - B_2K)y_1(t - \tau) \quad (22)$$

这时可利用定理 2 得到相关结果。

令 $\mu = 1/\tau$, 则可利用 LM I 软件包中的 `gevp` 命令, 求下列在 LM I 约束下广义特征值优化问题^[8]。

$$\begin{aligned} & \min_{P>0, W>0, Q>0, W_1>0, W_2>0, V} \nu \\ & \begin{bmatrix} \Gamma_3 & \Gamma_4 & Q \\ \Gamma_4^T & -W_1 & 0 \\ Q & 0 & -W_2 \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} < \nu \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中: Γ_3 和 Γ_4 如定理 2 所定义, W_1 和 W_2 为正定矩阵。

取在定理 2 所获 $K = VP^{-1}$ 和滑动面 (6), 可得到如下控制器的设计方法。

定理 3 给定在定理 2 所获 $K = VP^{-1}$, 可取如下形式的控制使系统轨线在有限时间内到达滑动面。

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & s(t) = 0 \\ - [K(Ay_1(t) + By_2(t)) + \beta s + N(t) \text{sign}(s)] \\ & s(t) > 0 \end{cases} \quad (23)$$

其中: $q_1 > 1; q_2 > 1; \text{sign}(s) = [\text{sign}(s_1), \dots, \text{sign}(s_m)]^T; N(t) = \text{diag}(n_1, \dots, n_m), i = 1, \dots, m$, 定义

$$n_i = \sum_{j=1}^n q_1 |(KA_d)_{ij}| |y_{1j}(t)| + \sum_{k=1}^n q_2 |(KB_2)_{ik}| |y_{2k}(t)|$$

证明略。

4 数值例子

为了阐明上述结果的应用, 考虑文献[5]中的例子。

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + A_d y(t - \tau) + B_2 u(t - \tau) \quad (24)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

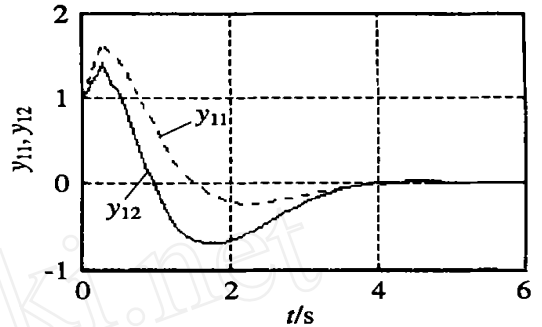
$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = 1, \quad t \in [-\tau, 0]$$

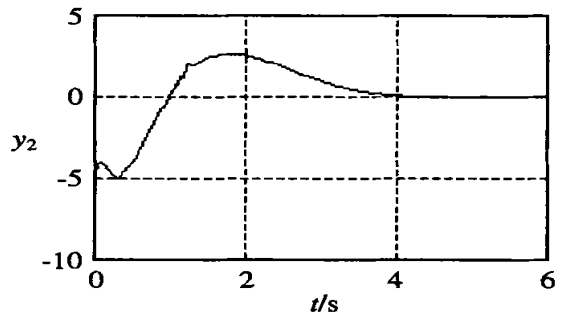
$$y(t) = [1 \ 1]^T, \quad t \in [-\tau, 0]$$

$$y_1(t) = [y_{11} \ y_{12}]^T$$

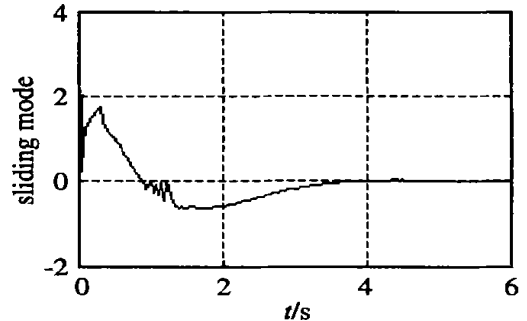
利用文献[5]方法, 增加 1 个积分器, 将本文结果与文献[5, 7]的结果进行比较。根据定理 2, 利用 LM I



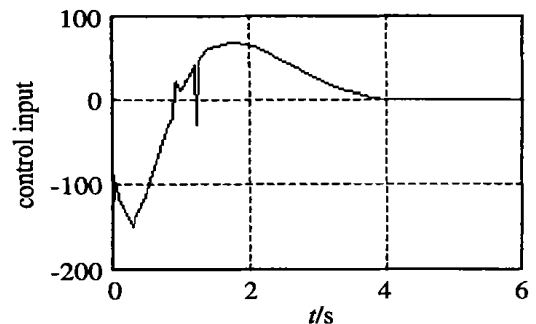
(a) 状态 y_{11}, y_{12}



(b) 状态 y_2



(c) 滑动面 s



(d) 控制输入

图 1 仿真结果

软件包中的广义特征值凸优化方法, 可得系统(24)对任何满足 $0 < \tau < 0.3615$ 的 τ 仍是可镇定的。而文献[5]只对满足 $0 < \tau < 0.2472$ 的 τ , 系统(24)是仍可镇定的; 文献[7]中的结果为系统(24)仅对满足 $0 < \tau < 0.0338$ 的 τ 是仍可镇定的。

因而, 对此例而言, 本文所得结果与文献[5, 7]的结果相比, 具有较小的保守性。取控制(23), 其中: $q_1 = 2, q_2 = 2, \beta = 6, K = [0.3434 \quad 4.4480]$, 得到的仿真结果如图 1 所示。

5 结 语

本文利用两种不同的方法, 研究了同时含有状态和输入时滞的变结构控制问题, 给出了存在滑动流形或滑动面的充分条件, 该条件以 LMI 形式表示。基于 LMI 的解和不等式方法, 得到了控制律设计方法。与以往文献中已有的结果相比, 本文方法简单易行, 且有较小的保守性。

参考文献(References):

- [1] Hung J Y, Gao W B, Hung J C. Variable structure control: A survey[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 1993, 40(1): 2-22
- [2] Shyu Kuokai, Yan Junjuh. Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by variable structure control[J]. *Int J Control*, 1993, 57(1): 237-

246

- [3] Roh Younghoon, Oh Junho. Sliding mode control with uncertainty adaptation for uncertain input-delay systems[J]. *Int J Control*, 2000, 73(13): 1255-1260
- [4] 岳东, 刘永清. 时滞系统变结构控制的新方法[J]. *控制与决策*, 1994, 9(4): 311-314
(Yue D, Liu Y Q. New design method of variable structure control of delay systems[J]. *Control and Decision*, 1994, 9(4): 311-314)
- [5] Gouaisbant G, Perruquetti W, Richard J P. A sliding mode control for linear systems with input and state delays[A]. *In Proc of the 38th Conf on Decision and Control*[C]. Arizona, 1999. 4234-4239
- [6] Joon Hwa Lee, Sang Woo Kim, Wook Hyun Kwon. Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(1): 159-162
- [7] Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics[A]. *Mathematics and Applications*[C]. Kluwer Academic Publishers, 1992
- [8] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in systems and control theory[A]. *Studies in Applied Mathematics*[C]. Philadelphia: SIAM, 1994

(上接第 562 页)

5 结 论

本文研究了商业广告排版问题, 建立了描述该问题的数学模型, 设计了两级分支定界算法来寻求问题的最优解。仿真测试结果表明, 该算法是可行的, 基本能满足实际应用的要求。由于采用的是寻求最优解的分支定界算法, 当版面增大以及广告的数量和类型增大时, 将出现无法在有效计算时间得到最优解的问题, 仍需要采用时间终止条件, 保证算法的可行性。进一步研究可考虑运用智能化算法与分支定界算法相结合的搜索策略。

参考文献(References):

- [1] Liggett R S. Automated facilities layout: Past, present, and future[J]. *Automation in Construction*, 2000, 9(1): 197-215
- [2] Medjdoub B, Yannou B. Dynamic space ordering at

topological level in space planning[J]. *Artificial Intelligent in Engineering*, 2001, 15(1): 47-60

- [3] Tam K. Simulated annealing algorithm for allocating space to manufacturing cells[J]. *Int J of Production Research*, 1991, 30(1): 63-87.
- [4] 唐飞, 滕弘飞. 一种改进的遗传算法及其在布局优化中的应用[J]. *软件学报*, 1999, 10(10): 1096-1102
(Tang F, Teng H F. A modified genetic algorithm and its application to layout optimization[J]. *J of Software*, 1999, 10(10): 1096-1102)
- [5] 王金敏, 喻宏波, 陈东洋, 等. 布局模装系统的研究[J]. *工程图学学报*, 2000, 1(1): 47-54
(Wang J M, Yu H B, Chen D Y, et al. Research on packing simulation systems[J]. *J of Engineering Graphics*, 2000, 1(1): 47-54)