

文章编号: 1001-0920(2003)05-0585-05

基于简化 Takagi-Sugeno 模糊模型的系统镇定策略

韩安太, 王树青

(浙江大学 先进控制研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要: 针对 Takagi-Sugeno 型模糊控制器设计方法计算复杂且难以求解的问题, 在分析原因的基础上, 利用模糊规则将系统的输入输出空间划分为一个完备的模糊模式集, 通过寻找与实时输入对应的模糊模式, 对整个系统进行了简化。将该模型简化算法应用于一类非线性系统镇定问题的求解, 利用 Lyapunov 稳定性分析理论和线性矩阵不等式等工具推导了闭环系统的可镇定条件, 进而设计了相应的简化 Takagi-Sugeno 型模糊状态反馈控制器。仿真结果表明了这种模型简化方法的有效性。

关键词: Takagi-Sugeno 模型; 模糊控制; 模糊模式; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Stabilizing strategy of system based on the simplified Takagi-Sugeno fuzzy model

HAN An-tai, WANG Shu-qing

(Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Aiming at the problem that Takagi-Sugeno fuzzy controller is difficult to find the ordinary solutions and the computation is complex, the system's input/output space is divided into a complete fuzzy pattern set by use of fuzzy rules. The overall system is simplified through searching the dominant fuzzy pattern related to the real-time input variables set. The stabilization problem of a class of nonlinear systems is studied based on the above model simplified algorithm. The conditions of stabilizing closed-loop system are derived and the stabilizing fuzzy state feedback controller is designed through Lyapunov stability theory and linear matrix inequality respectively. The results of simulation show the effectiveness of the presented methods.

Key words: Takagi-Sugeno model; Fuzzy control; Fuzzy pattern; Linear matrix inequality

1 引言

近年来, 基于 Takagi-Sugeno 模糊模型(简称 T-S 模型)的非线性系统镇定问题^[1]受到了很多学者的关注。人们利用 Lyapunov 稳定性定理和线性矩阵不等式等工具, 提出了一系列稳定化控制器设计方法^[2-5]。这些方法的基本思路都是将被控非线性系统表示为由 T-S 模型描述的若干线性子系统的加权和形式。在此基础上, 利用现有的控制系统稳

定性分析方法对系统进行分析, 得到系统的可镇定条件; 然后, 通过求解一组线性矩阵不等式, 得到以若干线性状态反馈控制器的加权和形式描述的模糊控制器。这种思路为 T-S 型模糊非线性系统的分析与综合问题的求解建立了一个理论框架, 使得模糊控制器的设计具有了严格的理论依据。

但是, 这些方法在应用上具有很大的保守性。其原因在于模糊控制器的设计依赖于一组线性矩阵不

收稿日期: 2002-05-17; 修回日期: 2002-09-23。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60174035)。

作者简介: 韩安太(1975—), 男, 山西晋城人, 博士生, 从事模糊控制和先进控制算法等研究; 王树青(1939—), 男, 浙江

仙居人, 教授, 博士生导师, 从事过程控制系统和先进控制等研究。

等式约束的求解,而线性矩阵不等式约束的个数却依赖于描述被控系统的模糊规则的条数。

研究结果表明:为了较好地描述被控对象,在每个模糊前件变量的论域中,至少应取 6~8 个语言值^[6]。因此,对于一个 n 变量模糊系统,若每个前件变量取 6 个语言值,则完备模糊模型应包含 $p = 6^n$ 条规则。在文献[4]中,为了得到模糊控制器,需要求解一组满足 $p^2 + p$ 个线性矩阵不等式约束的解;文献[3,7]则需要求解一组满足 p^2 个线性矩阵不等式约束的解。事实上,寻找满足这些约束条件的解是很困难的。

基于上述考虑,本文对 T-S 模型进行了研究,通过寻找实时输入与系统的模糊输入输出空间之间的映射关系,得到了一种模型简化算法,并给出了该算法在一类非线性系统镇定问题求解中的应用。结果表明,由于采用了简化模型,使得求解需要满足的线性矩阵不等式约束减少为 p 个,从而增加了问题的可解性。

2 模型定义及问题的描述

多变量非线性系统可采用如下 T-S 模糊模型描述,即

$$P^i: \text{if } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{ig} \\ \text{then } \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = \varphi(0), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

其中: $z_1(t), \dots, z_g(t)$ 为模糊规则的前件变量; M_{ij} 为模糊语言值, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, g; x(t) \in R^n$ 和 $u(t) \in R^m$ 分别为系统的状态向量和控制向量; $A_i \in R^{n \times n}$ 和 $B_i \in R^{n \times m}$ 为第 i 个模糊子系统的实常数系统矩阵; $\varphi(0)$ 为系统的初始状态。

采用单点模糊产生器,乘积推理机以及中心平均模糊消除器^[8],上述模糊系统可写为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) \{Ax(t) + Bu(t)\} \quad (1)$$

其中: $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_g(t)]$, $M_{ij}(z_j(t))$ 表示前件变量 $z_j(t)$ 对应于模糊值 M_{ij} 的隶属度。模糊基函数为

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(z_j(t)) \\ h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^n w_i(z(t))} > 0$$

且满足 $\sum_{i=1}^n h_i(z(t)) = 1$ 。

(1),设计相应的模糊状态反馈控制器,使整个闭环系统保持鲁棒稳定。基于“并行分布补偿”思想^[2~5],所考虑的 T-S 型模糊控制器具有如下形式

$$C^i: \text{if } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{ig} \\ \text{then } u(t) = K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

其中 K_i 为第 i 个局部反馈增益矩阵。

3 模型简化与控制器设计

考虑模糊系统(1),将规则前件中与各输入变量对应的语言真值转换为相应论域中的模糊数^[6]形式,可得

$$M_{n \times g} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1g} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{ng} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中: $M_{n \times g}$, 是用模糊数表示的规则前件语言值, m_{ij} 与语言变量 M_{ij} 对应。

在某采样时刻 t , 系统实时输入精确量为

$$Z_t = (z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_g(t))$$

经过模糊化,按最大隶属度原则,可得到一组输入模糊语言值,即

$$Z_{tM} = (M_{t1} \ M_{t2} \ \dots \ M_{tg})$$

写成模糊数形式为

$$Z_m = (m_{t1} \ m_{t2} \ \dots \ m_{tg}) \quad (4)$$

将 $M_{n \times g}$ 写成行向量形式,即

$$M_{n \times g} = (M_1 \ M_2 \ \dots \ M_n)^T \quad (5)$$

其中 $M_i = (m_{i1} \ m_{i2} \ \dots \ m_{ig})$ 称为模糊模式^[9]。

可以看到,式(3)中的 $M_{n \times g}$ 矩阵确定了 n 个模糊模式。需要强调一点, n 个模式应覆盖整个系统的输入输出空间^[9],即模糊模型应该是完备的。计算式(4)与每一模糊模式 M_i 之间的 Euclid 距离及最大 Euclid 距离

$$E_{ii}(Z_{tm}, M_i) = \frac{\|Z_{tm} - M_i\|}{\sqrt{\sum_{j=1}^g (m_{tj} - m_{ij})^2}} \\ E_t = \max_{i=1}^n [E_{ii}(Z_{tm}, M_i)]$$

令

$$\mu_{M_i}(Z_{tm}) = 1 - \frac{E_{ii}(Z_{tm}, M_i)}{E_t} \quad (6)$$

为实时输入 Z_{tm} 对模糊模式 M_i 的隶属度。采用最大隶属度原则,如果存在

$$\mu_{M_\alpha}(Z_{tm}) = \max[\mu_{M_1}(Z_{tm}), \dots, \mu_{M_n}(Z_{tm})]$$

则认为实时输入 Z_{tm} 优先隶属于 M_α 模式。由此可得

“主导子系统”为 R^α , “主导控制规则”为 C^α 。

由实验分析知, 在系统实际运行过程中, 任意时刻 t , 事实上仅有一个或若干个模糊子系统对整个系统的运行起着基础性作用, 也就是说, 该实时输入只对系统的某个局部有明显作用, 而对其他部分影响不大。基于此, 利用前面得到的“主导子系统”和“主导控制规则”, 可将模糊系统(1) 写为以“主导子系统”和“主导控制规则”为核心的简化模糊系统, 即

$$\begin{aligned}
 R^1: & \text{ if } z_1(t) \text{ is } M_{11} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{1g} \\
 & \text{ then } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \beta_1[A_\alpha \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)] \\ \mathbf{x}(0) = \mathcal{Q}(0) \end{cases} \\
 & \quad \vdots \\
 R^\alpha: & \text{ if } z_1(t) \text{ is } M_{\alpha 1} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{\alpha g} \\
 & \text{ then } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \beta_\alpha[A_\alpha \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)] \\ \mathbf{x}(0) = \mathcal{Q}(0) \end{cases} \\
 & \quad \vdots \\
 R^n: & \text{ if } z_1(t) \text{ is } M_{n1} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{ng} \\
 & \text{ then } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \beta_n[A_\alpha \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)] \\ \mathbf{x}(0) = \mathcal{Q}(0) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7}$$

相应地, 基于“并行分布补偿”思想, 可得简化模糊控制器为

$$\begin{aligned}
 C^1: & \text{ if } z_1(t) \text{ is } M_{11} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{1g} \\
 & \text{ then } \mathbf{u}(t) = \beta_1 \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \\
 & \quad \vdots \\
 C^\alpha: & \text{ if } z_1(t) \text{ is } M_{\alpha 1} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{\alpha g} \\
 & \text{ then } \mathbf{u}(t) = \beta_\alpha \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \\
 & \quad \vdots \\
 C^n: & \text{ if } z_1(t) \text{ is } M_{n1} \text{ and } \dots \text{ and } z_g(t) \text{ is } M_{ng} \\
 & \text{ then } \mathbf{u}(t) = \beta_n \mathbf{K} \mathbf{x}(t)
 \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 为后件比例系数。

考虑到实际输入与各模糊模式之间的差别, 取 $\beta_i = \mu_{M_i}(\mathbf{Z}_{im})$, 则简化模糊系统和模糊控制器的解析表达式分别为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) \beta_i \{A_\alpha \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)\} \tag{9}$$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) \beta_i \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \tag{10}$$

考虑简化模糊系统(9) 和控制器(10) 构成的闭环系统

$$\mathbf{B}; \beta \mathbf{K} \alpha | \mathbf{x}(t) \} \tag{11}$$

首先推导在任意时刻 t 模糊状态反馈控制器的存在条件, 并在此基础上, 利用线性矩阵不等式给出控制器的设计方法。

定理 1 如果存在正定对称矩阵 P 和矩阵 K_α , 使得如下矩阵不等式组

$$\begin{aligned}
 (A_\alpha + \beta \mathbf{B} \mathbf{K} \alpha)^\top P + P(A_\alpha + \beta \mathbf{B} \mathbf{K} \alpha) < 0 \\
 \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{12}$$

成立, 则闭环系统渐近稳定。

证明 在定理 1 条件下, 考虑模糊闭环系统(11), 定义如下的 Lyapunov 泛函

$$V(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{x}^\top(t) P \mathbf{x}(t), \quad P > 0$$

上述简化 T-S 系统渐近稳定的充分条件是 $V(\mathbf{x}(t), t)$ 沿系统(11) 的任意运动轨迹的时间导数为负。即

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\mathbf{x}(t), t) = \\
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i(z(t)) h_j(z(t)) \beta_i \beta_j \{ \mathbf{x}^\top(t) (A_\alpha + \\
 \beta \mathbf{B} \mathbf{K} \alpha)^\top P + P(A_\alpha + \beta \mathbf{B} \mathbf{K} \alpha) \mathbf{x}(t) \}
 \end{aligned}$$

考虑到模糊基函数 $h_i(z(t))$ 和 β_i 的定义, 以及条件(12), 可推出 $\dot{V}(\mathbf{x}(t), t) < 0$ 。由 Lyapunov 主稳定性定理可知, 闭环系统渐近稳定。

定理 2 矩阵不等式组(12) 成立的充分必要条件是: 如果存在正定对称矩阵 V 和矩阵 W , 使得如下线性矩阵不等式组

$$\begin{aligned}
 (A_\alpha V + \beta \mathbf{B} \mathbf{K} \alpha W)^\top + (A_\alpha V + \beta \mathbf{B} \mathbf{K} \alpha W) < 0 \\
 \forall j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{13}$$

成立。如果不等式组(13) 有一组可行解 (V, W) , 则

$$\mathbf{K} \alpha = W V^{-1} \tag{14}$$

是工作时刻 t 与输入信号组 \mathbf{Z}_{im} 所对应的稳定化模糊控制器。

证明 在式(12) 两边分别左乘和右乘矩阵 P^{-1} , 并设 $V = P^{-1}, W = \mathbf{K} P^{-1}$, 即可得到式(13)。

由上述证明过程中的变量代换可得, 如果线性矩阵不等式组(13) 有解, 则相应的模糊控制器为

$$\mathbf{K} \alpha = W V^{-1}$$

本文提出的模型简化算法以及镇定控制策略具有如下特点:

1) 选用 $\beta = \mu_{M_i}(\mathbf{Z}_{im})$ 度量其他模式与主导模糊模式之间的差别, 既突出了“主导子系统”和“主导控制规则”在系统中的基础性作用, 又考虑了与实时输入组合对应的主导模糊模式与其他模式之间的不完全一致。事实上, 可能存在更好的度量办法。

2) 对式(14) 的模糊控制器而言, 反馈增益会随

实时输入的变化而变化,原因在于不同的输入对应着不同的“主导子系统”和“主导控制规则”。因此,从整体上看,该模糊控制器又是一个会随着时间和输入变化而变化的变增益控制器。

3) 由于输入变量的模糊化采用了单点模糊产生器,以实时输入 Z_m 为基础,每次计算得到的稳定化模糊控制器至少可以保证在输入点 Z_m 的邻域内系统是渐近稳定的,而邻域的范围则在很大程度上取决于单点模糊产生方法中参数的设定和语言变量的选取。

4 仿真例子

考虑如下模糊系统的模糊规则:

- ① if $e(t)$ is P and $\dot{e}(t)$ is P
then $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$
- ② if $e(t)$ is P and $\dot{e}(t)$ is Z
then $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$
- ③ if $e(t)$ is P and $\dot{e}(t)$ is N
then $\dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t)$
- ④ if $e(t)$ is Z and $\dot{e}(t)$ is P
then $\dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t)$
- ⑤ if $e(t)$ is Z and $\dot{e}(t)$ is Z
then $\dot{x}(t) = A_5x(t) + B_5u(t)$
- ⑥ if $e(t)$ is Z and $\dot{e}(t)$ is N
then $\dot{x}(t) = A_6x(t) + B_6u(t)$
- ⑦ if $e(t)$ is N and $\dot{e}(t)$ is P
then $\dot{x}(t) = A_7x(t) + B_7u(t)$
- ⑧ if $e(t)$ is N and $\dot{e}(t)$ is Z
then $\dot{x}(t) = A_8x(t) + B_8u(t)$
- ⑨ if $e(t)$ is N and $\dot{e}(t)$ is N
then $\dot{x}(t) = A_9x(t) + B_9u(t)$

其中: $e(t)$ 和 $\dot{e}(t)$ 为前件变量; P, Z 和 N 是对应的语言真值,且具有图 1 所示的隶属函数。

$$x(t) = [e(t) \quad \dot{e}(t)]^T$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & -0.01 \\ 0.20 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.225 & -0.02 \\ 1 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.5618 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.5275 \\ 0 & -0.235 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1.4387 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -0.225 & -1.5275 \\ 0.442 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0.5613 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -1.25 & 2 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 1.85 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0.958 & -1.274 \\ 1.9876 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -1.75 & 0.88 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_7 = \begin{bmatrix} 1.8150 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} -1.54 & -1 \\ 0.025 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_8 = \begin{bmatrix} 0.593 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1 & -1.3481 \\ 0.9582 & -0.235 \end{bmatrix}, \quad B_9 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

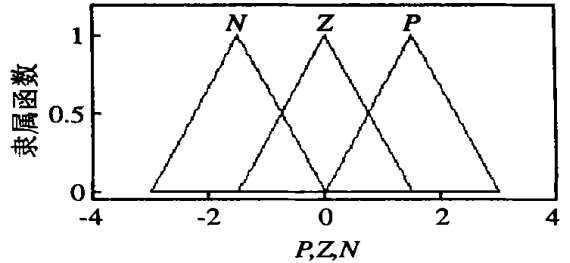


图 1 P, Z 和 N 的隶属函数

令系统初始条件为 $e(0) = -1.5$ 。

对于上述完备模糊系统,采用文献[2~5]介绍的控制器的设计方法,不能得到满足约束的可行解,因此闭环系统不能镇定。经过反复组合,当模型的规则数减少为 4 条(②, ④, ⑤, ⑦)时,可以得到可行解。

采用本文算法,无论是针对 9 条规则的完备模型还是 4 条规则的不完备模型,所得到的变增益控制器都可以使闭环系统保持稳定。

图 2 给出了针对 9 条规则的完备模型,在 $t \in [0, 8]$ 时,采用本文处理方法得到的 $e(t)$ 状态响应曲线;图 3 为采用 4 条规则的不完备模型时,本文方法与文献[2~5]方法的控制效果对比。

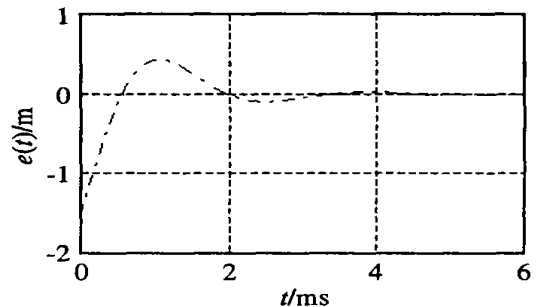


图 2 采用本文算法时, $e(t)$ 的响应曲线

从图中可以看出,对于采用 4 条规则的不完备模型,采用本文算法设计的控制器的控制效果较文献[2~5]方法设计的控制器差(除响应速度较快外)。

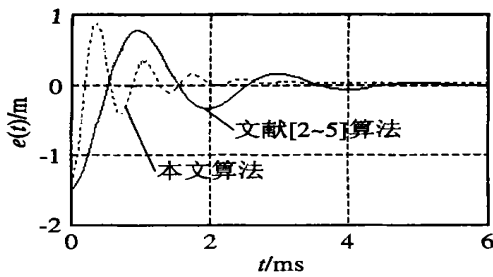


图 3 两种方法的响应曲线对比

Z_m 所进行的模型简化操作部分, 忽略了与“主导子系统”关联不深的信息, 而这些信息对于改善控制效果可能是至关重要的。

5 结 论

针对文献[1~5]介绍的 T-S 型模糊控制器设计方法难以求解的问题, 本文给出了一种模型简化算法, 并将该算法应用于一类非线性系统镇定问题的求解。研究表明, 所提出的模型简化算法减少了求解过程的约束条件, 增加了问题的可解性, 使得更容易得到问题的可行解。仿真结果验证了这种方法的有效性和正确性。

然而, 如何处理简化模型与原模型之间的误差, 以及简化模型与原模型之间的关系仍是需要进一步研究的问题。

参考文献(References):

[1] Tanaka K, Sano M. A robust stabilization problem of

fuzzy controller systems and its applications to backing up control of a trucktrailer[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1994, 2(1): 119-134.

[2] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI based design[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1998, 6(2): 250-265.

[3] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust stabilization of a class uncertain nonlinear system via fuzzy control[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 1-13.

[4] Wang H O, Tanaka K, Griffin M. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 14-23.

[5] Lee H J, Park J B, Chen Guanrong. Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2001, 9(2): 369-379.

[6] 诸静. 模糊控制原理与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 1995. 18-90.

[7] Lam H K, Leung F H F, Tam P K S. Stable and robust fuzzy control for uncertain nonlinear system [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 2000, 30(4): 825-840.

[8] Ying H. An analytical study on structure, stability and design of general nonlinear Takagi-Sugeno fuzzy control system [J]. *Automatica*, 1998, 34(2): 157-167.

[9] Ying H. The Takagi-Sugeno fuzzy controllers using the simplified linear control rules are nonlinear variable gain controllers[J]. *Automatica*, 1998, 34(12): 1617-1623.

(上接第 580 页)

参考文献(References):

[1] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.

[2] Qin Linmei, Hu Guangrui. A new speech enhancement method[A]. *Proc of 2001 Int Symposium on Intelligence Multimedia, Video and Speech Processing* [C]. Hong Kong, 2001. 92-94.

[3] David L, Donoho. Denoising by soft-thresholding[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1995, 41(3): 613-

627.

[4] Udar Mittal, Nam Phamdo. Signal/noise KLT based approach for enhancing speech degraded by colored noise[J]. *IEEE Trans on Speech and Audio Processing*, 2000, 8(3): 159-167.

[5] Yariv Ephraim, Harry L, Van Trees. A signal subspace Approach for speech enhancement [J]. *IEEE Trans on Speech and Audio Processing*, 1995, 3(4): 251-266.