文章编号: 1001-0920(2003)05-0590-03

# 阶段性投资最优规模问题的实物期权方法

李洪江[1], 冯敬海[2], 曲晓飞[1]
(1. 大连理工大学 管理学院, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学 数学系, 辽宁 大连 116024)

**摘 要**: 提出一种两阶段投资最优规模的实物期权方法。借助随机过程刻画3种典型投资风格下的决策触发时间以及决策所依赖的执行概率, 利用扩张型实物期权估算或有投资决策的柔性价值, 建立项目综合价值函数模型, 以回报率为目标对投资最优规模进行数值求解。算例表明, 选择最佳投资规模可避免回报不足和资金浪费。

**关键词**: 阶段性投资; 最优规模; 实物期权; 触发时间
**中图分类号**: F830.59 **文献标识码**: A

# Capacity optimization of staged investment: A real options approach

*LI Hong-jiang*[1], *FENG Jing-hai*[2], *QU Xiao-fei*[1]
(1. School of Management, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Department of Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract**: A real options approach is put forward to determine the optimal capacity of two-stage investment. Some stochastic processes are employed to compute the trigger time of decision making under three typical risk preferences as well as the executable probability that the respective outcomes rely on. The managerial flexibility involved in the contingent investment can be described and valued by options to expand. A comprehensive evaluation model is set up to calculate the optimal capacity with numerical techniques when rate of return is mainly concerned. An example of computation indicates that the chosen optimal capacity avoids return shortfall and capital waste.

**Key words**: Staged investment; Optimal capacity; Real options; Trigger time

## 1 引 言

不确定性投资需要有柔性的投资策略。传统的DCF方法隐含了两个假设: 1) 后续阶段的项目投资必然发生; 2) 所有投资都是完全可逆的。这种机械的假设显然与实际动态市场环境不符。诸多文献表明, 实物期权方法适于分析不确定投资问题[1~4]。

当企业获得投资于某个项目的机会时, 通常会在各种限制条件下尽力寻求最优投资策略。本文研究一种两阶段投资最优规模的实物期权方法。借助随机过程刻画3种典型投资风格下的决策触发时间以及决策所依赖的执行概率, 利用扩张型实物期权估算或有投资决策的柔性价值, 建立项目综合价值函数模型, 以回报率为目标对投资最优规模进行数值求解。

## 2 问题描述

通常不确定性投资都是阶段性投资。考虑一种典型的两阶段投资问题, 企业的资金分别用于商业化启动和规模扩张。假设企业为激烈竞争市场环境下的价格接受者, 推迟投资的价值很小[5]。因此, 启动投资和扩张投资的注入都无需等待。通过预先的

**收稿日期**: 2002-06-11; **修回日期**: 2002-09-02。
**基金项目**: 国家自然科学基金资助项目(70142008); 加拿大国际开发署(CIDA)中-加大学与产业合作项目(CCUIPP)。
**作者简介**: 李洪江(1973—), 男, 河北枣强人, 博士生, 从事实物期权、金融工程研究; 曲晓飞(1956—), 男, 辽宁大连人, 教授, 博士生导师, 从事决策理论研究。

市场调查可以确定适当的启动投资额, 随后企业要经历一段时间的启动期经营。由于启动初期产品变动成本高等原因, 企业可能出现亏损。已知启动投资在 0 时刻必然发生, 于是进行规模扩张投资的时刻便成为关键的决策触发点。可以将企业管理者的决策过程分为两个环节: 首先根据前期经营状况决定触发时刻; 然后根据后期经营状况制定决策结果。不同经营风格和风险偏好的企业有不同的投资策略, 也就有不同的决策触发点。考虑以下 3 种典型情形:

1) 激进的决策者在企业实现经营性盈亏平衡时考虑扩大规模, 以抢占份额把握先机;

2) 中庸型决策者在企业刚好减亏为零时考虑扩张;

3) 保守稳健的决策者在全部启动投资都收回的情况下才考虑扩张。

然而, 是否实行扩张投资依赖于某种判断准则。理性投资者在规模扩张的收益大于新增投资额时执行扩张投资, 同时继续原有规模的经营, 否则就放弃扩张。不仅如此, 考虑到在保守投资策略下, 启动投资已全部收回, 继续经营必然有利可图, 即使在激进投资策略下, 企业已开始回收启动投资, 如果此时放弃则损失最大, 因此继续经营启动投资是明智的选择。在这种决策框架下, 两种结果的执行概率的和为 1。第 1 种或有结果的决策柔性产生了扩张投资型实物期权, 这样两阶段投资项目的价值便包括必然发生的启动规模永续经营的收益和或有的扩张投资期权。而项目的总投资包括必然发生的启动投资和或有发生的扩张投资。由项目净值和总投资额的现值可以得到投资回报率。当企业以最佳投资回报率为经营目标时, 则存在最优的扩张投资规模。

## 3　数理建模

设 $I_1$ 为启动投资现值, $I_2$ 为扩张投资现值。忽略项目建设期, 即投资后便有回报。设企业以销定产, 经营灵活, 即产销量相等。

### 3.1　启动投资前期经营的收益过程

设 $p_t$ 表示 $t$ 时刻产品的单位价格, $c_t$ 表示 $t$ 时刻产品的单位成本, $m_t$ 表示 $t$ 时刻产品销量。假设它们的运动路径为几何布朗运动, 有

$$\mathrm{d}p_t = \alpha_p p_t \mathrm{d}t + \sigma_p p_t \mathrm{d}B_p(t) \tag{1}$$

$$\mathrm{d}m_t = \alpha_m m_t \mathrm{d}t + \sigma_m m_t \mathrm{d}B_m(t) \tag{2}$$

$$\mathrm{d}c_t = \alpha_c c_t \mathrm{d}t + \sigma_c c_t \mathrm{d}B_c(t) \tag{3}$$

其中: $\alpha_p$, $\alpha_m$ 和 $\alpha_c$ 分别为价格、销量和成本的预期增长率; $\sigma_p$, $\sigma_m$ 和 $\sigma_c$ 分别为价格、销量和成本的波动率。设 $p_0$, $m_0$ 和 $c_0$ 分别为 $p_t$, $m_t$ 和 $c_t$ 的初值。所有参数可通过市场测试获得数据后, 参考行业标准并运用计量经济手段估算。通常销量增长与价格降低一致[6], 即二者的随机过程相关, 有 $E\mathrm{d}B_p(t)\mathrm{d}B_m(t) = \rho_{pm}\mathrm{d}t$, 其相关系数 $\rho_{pm} < 0$。产品的市场风险主要体现在产品价格、成本和销量的波动上。通常启动初期产品成本较高, 企业要经历一段亏损时期, 可以假定 $p_0 < c_0$。

设触发时刻为 $\tau$, 则 $[0, \tau]$ 的预期销售额折现值 $S_0^\tau$ 和预期成本额折现值 $R_0^\tau$ 分别为

$$S_0^\tau = E\int p_s m_s e^{-\mu s}\mathrm{d}s = \frac{p_0 m_0}{a}(1 - e^{-a\tau})$$

$$R_0^\tau = E\int c_s m_s e^{-\mu s}\mathrm{d}s = \frac{c_0 m_0}{b}(1 - e^{-b\tau})$$

式中: $a = \mu - \alpha_p - \alpha_m - \rho_{pm}\sigma_p\sigma_m$, $b = \mu - \alpha_c - \alpha_m - \rho_{cm}\sigma_c\sigma_m$, $\mu$ 为行业的平均折现率, 则 $[0, \tau]$ 的收益折现值为

$$y_0^\tau = S_0^\tau - R_0^\tau = \frac{p_0 m_0}{a}(1 - e^{-a\tau}) - \frac{c_0 m_0}{b}(1 - e^{-b\tau}) \tag{4}$$

### 3.2　决策触发时刻

假设不同经营风格下的决策触发时刻服从指数分布[7]。

激进的决策者在企业达到经营性收支平衡时刻进行扩张投资, 设该时刻为 $\tau_1$, 则 $\tau_1$ 的期望值 $E\tau_1$ 满足方程 $\mathrm{d}y_0^\tau/\mathrm{d}t = 0$, $\mathrm{d}y_0^\tau/\mathrm{d}t$ 为企业的瞬态收益流。解此方程得到 $E\tau_1 = (\ln p_0 - \ln c_0)/(a - b)$。因 $p_0 < c_0$, 则必有 $a < b$, 否则将出现负值或无穷大, 与现实不符。最终企业赢利的必要条件是产品成本下降的速度比价格快。

中庸的决策者在前期亏损全部得到弥补即实现减亏为零时刻进行扩张投资。设该时刻为 $\tau_2$, 则 $\tau_2$ 满足方程 $y_0^\tau = 0$, 即 $\frac{p_0 m_0}{a}(1 - e^{-a\tau}) - \frac{c_0 m_0}{b}(1 - e^{-b\tau}) = 0$。对该方程求数值解可得到 $\tau_2$ 的期望值 $E\tau_2$。

稳健的决策者在启动投资全部收回时刻进行扩张投资。设该时刻为 $\tau_3$, 则 $\tau_3$ 满足方程 $y_0^\tau = I_1$, 即 $\frac{p_0 m_0}{a}(1 - e^{-a\tau}) - \frac{c_0 m_0}{b}(1 - e^{-b\tau}) = I_1$。同样, 求该方程的数值解可以得到 $\tau_3$ 的期望值 $E\tau_3$。

显然有 $E\tau_1 < E\tau_2 < E\tau_3$。

### 3.3　扩张规模的收益过程

当 $t > \tau$ 时, 企业至少已经实现经营性盈利, 这意味着单位收益必然非负, 本文用 $q_t$ 表示产品的单位收益。为体现市场风险下企业盈利的增长过程, 假设 $q_t$ 服从几何布朗运动, 有

$$dq_t = \alpha_q q_t dt + \sigma_q q_t dB_q(t), \quad t > \tau \tag{5}$$

式中: $\alpha_q$ 和 $\sigma_q$ 分别为单位收益的预期增长率和波动率, 设其初值为 $q_0$。

无建设期意味着资金投入后迅速实现产销量的大幅增加。假设销量仍服从式(2) 的几何布朗运动, 初值 $m_0'$ 与扩张投资额有关, 不妨设

$$m_0' = m_0 e^{\alpha_m \tau}(I_2/I_1)^{\xi}, \quad 0 < \xi < 1$$

表明扩张投资规模增长对销量初值的作用递减。同样有

$$E dB_q(t) dB_m(t) = \rho_{qm} dt, \quad \rho_{qm} < 0$$

则 $\tau$ 时刻后, 扩张规模的预期收益折现为

$$V_t^{\infty} = E\left[\int_t^{\infty} q_s m_s e^{-\mu s} ds \,\Big|\, \mathbf{F}_t\right] = \frac{q_0 m_0'}{\alpha_V} e^{-\alpha_V t} \exp\left[\sigma_V B_V(t) - \frac{\sigma_V^2}{2} t\right], \quad t > \tau$$

式中: $\alpha_V = \mu - \alpha_q - \alpha_m - \rho_{qm}\sigma_q\sigma_m$ 和 $\sigma_V = (\sigma_q^2 + \sigma_m^2 + 2\rho_{qm}\sigma_q\sigma_m)^{0.5}$ 分别为该预期收益的增长率和波动率, 维纳过程 $B_V(t) = (\sigma_q B_q(t) + \sigma_m B_m(t))/\sigma_V$。

可知 $V_t^{\infty}$ 的运动路径服从几何布朗运动, 有

$$dV_t^{\infty} = -\alpha_V V_t^{\infty} dt + \sigma_V V_t^{\infty} dB_V(t), \quad t > \tau \tag{6}$$

### 3.4 投资决策的执行概率

令 $P = \mathrm{Prob}(V_\tau^{\infty} > I_2)$, 则 $P$ 为实行规模扩张投资的概率。经计算得

$$P = \mathrm{Prob}(V_\tau^{\infty} > I_2) = N(d) \tag{7}$$

其中

$$d = \frac{\ln(q_0 m_0') - \ln(\alpha_V I_2) + (\alpha_V + \sigma_V^2/2)\tau}{\sigma_V \sqrt{\tau}}$$

$N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数, 则放弃扩张且继续经营原有规模的概率为 $1 - P = \mathrm{Prob}(V_\tau^{\infty} \leq I_2)$。

### 3.5 实物期权价值

或有的扩张投资机会相当于一个执行价格为 $I_2$, 到期日为 $\tau$ 的欧式看涨期权, 由 Black-Scholes 公式可得该期权的价值为

$$F_c = E(\mathrm{Max}(V_\tau^{\infty} e^{-\delta\tau} - I_2, 0) e^{-r\tau}) = \frac{q_0 m_0'}{\alpha_V} e^{-\delta\tau} N(d_1) - I_2 e^{-r\tau} N(d_2) \tag{8}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(q_0 m_0') - \ln(\alpha_V I_2) + (r - \delta + \sigma_V^2/2)\tau}{\sigma_V \sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(q_0 m_0') - \ln(\alpha_V I_2) + (r - \delta + \sigma_V^2/2)\tau}{\sigma_V \sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma_V \sqrt{\tau}$$

式中 $r$ 为无风险利率。多数项目不可自由交易, $\delta = \mu - \alpha_V$ 类似于股票红利, $\delta$ 为未真正拥有项目的企业低于均衡的机会成本(该风险水平下的项目回报)的回报短缺率。

### 3.6 优化目标

无论出现何种决策结果, 启动投资都将持续经营, 企业都将获得原有规模的收益 $y_0^{\infty}$, 则项目价值为

$$G_T = y_0^{\infty} + PF_c - I_T = \frac{p_0 m_0}{a} - \frac{c_0 m_0}{b} + PF_c - I_T \tag{9}$$

式中总投资额 $I_T = I_1 + PI_2$。二者之比构成投资回报率

$$\eta = \frac{G_T}{I_1 + PI_2} \tag{10}$$

将 $\eta$ 作为优化目标。显然 $\eta$ 是指数分布的随机变量 $\tau$ 的函数, 取数学期望后, 再用数值解法可得到最优扩张投资规模 $I_2$。

## 4 算例分析

某高技术公司分两阶段投入资金进行商业化启动和规模扩张, 该企业主要面临市场风险。由 $I_2$ 的不同取值可得到相应的投资回报率 $\eta$。激进风格的投资回报率曲线如图 1 所示。

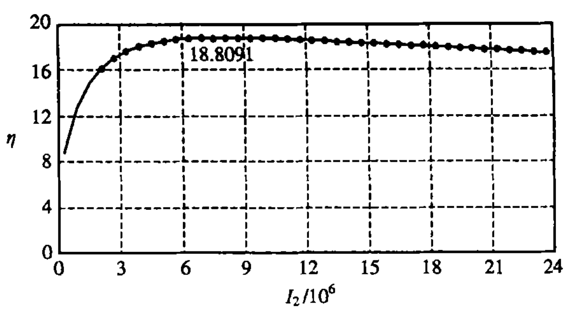


图 1 激进风格的投资回报率曲线

当扩张投资额 $I_2$ 为 $8.4 \times 10^6$ 时, 投资回报率 $\eta$ 取最大值 18.8091。在最高点左侧, 投资回报率增加较快, 对规模敏感; 在最高点右侧, 投资回报率缓慢降低, 规模增加对净利润的贡献逐渐变小。类似可得到中庸和保守风格下的企业投资回报率曲线。由于后两种决策所承担的风险较小, 相应的投资回报率也较小。限于篇幅, 数据和图表略。

## 5 结 论

作为不确定项目价值的一部分, 决策柔性可由实物期权方法估价。由算例分析可知, 存在最优的投资规模使项目回报率最高, 选取适当规模可以避免低回报和资金浪费。

(下转第 596 页)

设各指标的权重等权,由本文提出的灰色模式识别方法,可求出待识别对象与 5 类标准模式的灰色关联度分别为

$$\tilde{\otimes}(\gamma_{11}) \in [0.055\,1,\quad 0.438\,6]$$

$$\tilde{\otimes}(\gamma_{12}) \in [0.125\,8,\quad 0.700\,1]$$

$$\tilde{\otimes}(\gamma_{13}) \in [0.077\,4,\quad 0.578\,6]$$

$$\tilde{\otimes}(\gamma_{14}) \in [0.043\,9,\quad 0.298\,8]$$

$$\tilde{\otimes}(\gamma_{15}) \in [0.027\,3,\quad 0.198\,7]$$

通过灰关联度灰心计算后,有

$$\max_j \odot(\otimes(\gamma_{1j})) = \odot(\otimes(\gamma_{12})) = 0.413\,2$$

因此,待识别对象划归为第 2 类模式。由式(12) 可求出划归为第 2 类模式的可信度为

$$\mu(\otimes(\gamma_{12})) = 0.644\,2$$

## 7 结 语

本文将标准模式的指标特征值和待识别对象的指标特征值均视为区间灰数,能较好地考虑由人们认知能力的有限性、客观事物本身的复杂性以及信息接收系统能力的局限性所带来的不确定性,从而使模式识别更为科学、更加接近实际。由于普通实数是区间灰数的完全退化,因此只要将本文所有公式中区间灰数白化值的上、下限取为一致,则本文模式识别的模型便能方便地应用于标准模式指标值和待识别对象指标值均为普通实数的模式识别。

本文给出了待识别对象划归为某一类模式的可信度,从而使得人们在进行模式识别时更加心中有数。

参考文献(References):


[1] Deng Julong. Grey hazy sets [J]. *J of Grey System*, 1992, 4(1): 13-30.

[2] Deng Julong. Extent information cover in grey system theory[J]. *J of Grey Systems*, 1995, 7(2): 131-138.

[3] 邓聚龙. 灰色控制系统(第 2 版) [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1993. 102-110.

[4] 吕峰. 灰色系统关联度之分辨系数的研究[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(6): 49-54.
(Lu F. Research on the identification coefficient of relational grade for grey system [J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 1997, 17(6): 49-54.)

[5] 张全, 樊治平, 潘德惠, 等. 不确定性多属性决策中区间数的一种排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(5): 129-133.
(Zhang Q, Fan Z P, Pan D H, et al. A ranking approach for interval numbers in uncertain multiple attribute decision making problems [J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 1999, 19(5): 129-133.)


(上接第 592 页)

参考文献(References):


[1] Brennan M, Schwartz E. Evaluation natural resource investment[J]. *J of Business*, 1985, 58 (2): 135-157.

[2] Pindyck R. Irreversible investment, capacity choice, and the value of the firm [J]. *American Economic Review*, 1988, 79(12): 969-985.

[3] Trigeorgis L. Real options and interactions with financial flexibility [J]. *Financial Management*, 1993, (Autumn): 202-224.

[4] Dangl T. Investment and capacity choice under uncertain demand[J]. *European J of Operational Research*, 1999, 117: 415-428.

[5] Kester W. Today's options for tomorrow's growth[J]. *Harvard Business Review*, 1984, (March-April): 153-160.

[6] Pennings E, Lint O. Market entry, phased rollout or abandonment? A real option approach[J]. *European J of Operational Research*, 2000, 124: 125-138.

[7] Ottoo R. Valuation of internal growth opportunities: The case of a biotechnology company[J]. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 1998, 38 (SI): 537-567.