第 18 卷 第 5 期　　控 制 与 决 策　　2003 年 9 月
Vol. 18 No. 5　　Control and Decision　　Sept. 2003

文章编号: 1001-0920(2003)05-0597-03

线性时不变控制系统中的互信息率和解析约束

章 辉, 孙优贤
(浙江大学 控制科学与工程系 工业控制国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 针对受随机干扰的离散线性时不变系统的跟踪控制问题,采用信息论的方法讨论了系统获得有效跟踪性能的基本信息条件。从此条件出发,得出系统闭环传递函数设计的解析约束,表明了系统敏感函数与补敏感函数的 Bode 积分间的关系。对于开环传递函数严格正则的系统,这一约束反映了开环不稳定零极点应具备的特性。

关键词: 线性跟踪控制系统; 随机干扰; 互信息率; 基本信息条件; Bode 积分; 解析约束
中图分类号: TP13　　文献标识码: A

Mutual information rate and analytic constraint in linear time invariant control systems

ZHANG Hui, SUN You-xian
(National Laboratory of Industrial Control Technology, Department of Control Science and Technology, Zhejiang University, Hangzhou, 310027, China)

Abstract: Linear discrete-time time-invariant feedback systems disturbed by random processes are investigated from the viewpoint of information theory. Mutual information rate is employed as a measure of information transmission in systems to formulate the basic information condition of the tracking control problem. Based on this condition, a new design constraint is derived in dealing with the "information destruction" induced by exogenous disturbance input. Such analytic constraint indicates a relation between Bode integrals of the sensitivity function and the complementary sensitivity function, and implies a requirement of the unstable poles and nonminimum phase zeros of the open loop transfer function when it is strictly proper.

Key words: Linear tracking systems; Random disturbance; Mutual information rate; Basic information condition; Bode integral; Analytic constraint

1 引　　言

Bode 最早采用解析函数理论研究了反馈控制系统中的可达性能极限和设计约束,针对单变量线性连续系统得出了关于系统敏感函数的 Bode 积分定理[1]。近年来,该成果已被推广到离散、多变量、非线性和时变系统,以及关于系统补敏感函数等的研究中[2~4]。从信息论的观点看,控制系统是一个信息传输通道,反馈控制器则是利用系统的实时信息来消除干扰等因素造成的影响,达到设计的性能要求。因而控制系统的可达性和设计约束是与系统中的信息传输相联系的。控制系统研究的信息论方法很早就受到关注[5],近年来得到了进一步发展[6~8]。

本文运用 Shannon 信息论中互信息率来研究离散线性时不变反馈控制系统的设计约束,针对受扰

收稿日期: 2002-04-03; 修回日期: 2002-06-10。
作者简介: 章辉(1967—),男,安徽黄山人,博士生,从事随机系统、鲁棒控制等研究; 孙优贤(1940—),男,浙江诸暨人,教授,博士生导师,中国工程院院士,从事鲁棒控制、容错控制等研究。

系统的跟踪控制问题, 从获得有效跟踪性能的基本条件出发, 讨论系统敏感函数和补敏感函数的 Bode 积分间的关系。

2 互信息率

设两个离散随机变量 μ 和 v 的取值集合为$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 和$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$, 取值概率分别为$\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$ 和$\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$, 即 $p_i = P(\mu = a_i)$, $q_j = P(v = b_j)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$。且设 $r_{ij} = P(\mu = a_i, v = b_j)$。则 μ 和 v 间的互信息为[9]

$$I(\mu; v) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} r_{ij} \ln \frac{r_{ij}}{p_i q_j} \tag{1}$$

其中 $I(\mu; v)$ 描述了 μ 和 v 相互所包含的关于对方的信息量。对于两个离散随机过程 $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_N, \cdots\}$ 和 $y = \{y_1, y_2, \cdots, y_N, \cdots\}$, 它们之间的互信息率为[9]

$$\bar{I}(x; y) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} I((x_1, x_2, \cdots, x_N); (y_1, y_2, \cdots, y_N)) \tag{2}$$

互信息率描述了随机过程之间相互所包含的单位时间平均信息量, 也反映了其间的信息传输情况。

式(2) 中的极限并非对任意随机过程都是存在的[9], 对于平稳高斯过程, 有:

引理 1[7] 如果两个联合高斯平稳随机过程 $x \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in \boldsymbol{R}^m$ 具有谱密度$\begin{bmatrix} I & W(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) \\ W^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}) & I \end{bmatrix}$, 那么 x 和 y 的互信息率为

$$\bar{I}(x; y) = \frac{-1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det[I - W^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) W(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})] \mathrm{d}\omega \tag{3}$$

3 基本信息条件

图 1 为受随机干扰的离散线性时不变反馈控制系统。其中: $r, d, u, y, e \in \boldsymbol{R}^1$ 分别为系统的参考输入、外来干扰、控制器输出、系统输出和误差; $C(z)$, $P(z)$ 分别为控制器和被控过程的传递函数。

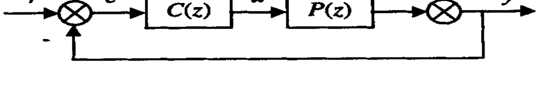

图 1 受随机干扰的离散线性时不变反馈控制系统

本文假设: 系统开环传递函数 $L(z) = P(z) C(z)$ 是正则的, 且没有单位圆上的零极点, 即

$$L(z) = \frac{l_0 \prod_{i=1}^{p} (z - z_i^L)}{\prod_{j=1}^{q} (z - p_j^L)} \tag{4}$$

其中: l_0 为 $L(z)$ 分子的主导系数; z_i^L 和 p_j^L 分别为 $L(z)$ 的零、极点; 参考输入 r 和干扰 d 为相互独立的零均值平稳高斯序列, 分别具有有理谱密度 Φ_r 和 Φ_d; 系统是闭环稳定的。

对于图 1 所示系统, 控制器的设计任务是消除干扰 d 造成的影响, 保证系统闭环稳定, 并使输出 y 有效地跟踪参考输入 r。信号从 r 到 y 的传递过程是一个信息传输过程, 因而 y 中包含了 r 的信息; 同时由于干扰 d 的存在, y 中不可避免地也包含了 d 的信息。以信息论的观点看, y 中所含的关于 r 的信息量越多, 跟踪效果越好; 相反 y 所含的关于 d 的信息量越多则跟踪效果越差。如前所述, 互信息率描述了两个随机过程之间相互所包含的平均信息量。因而下述关系是系统获得有效跟踪性能的一个基本要求:

基本信息条件: 对于图 1 所示系统, 为使输出 y 有效地跟踪参考输入 r, 在闭环稳定的同时需有

$$\bar{I}(r; y) > \bar{I}(d; y) \tag{5}$$

其中: $\bar{I}(r; y)$ 为 y 和 r 的互信息率, $\bar{I}(d; y)$ 为 y 和 d 的互信息率。

式(5) 从信息传输的角度要求所设计的控制系统在受到干扰时能保持对 r 的跟踪, 使 y 中包含的关于 r 的信息量要大于关于 d 的信息量, 或者说 y 对 r 的跟踪程度要大于它被 d "污染"的程度。但式(5) 并没有强调如最优或鲁棒等性能要求, 因而称之为"基本信息条件"。

4 互信息率与解析约束

从 r 到 y 和从 d 到 y 的传递函数分别为 $\dfrac{L(z)}{1 + L(z)} = T(z)$ 和 $\dfrac{1}{1 + L(z)} = S(z)$, 即系统的补敏感函数和敏感函数。因为系统是闭环稳定的, 所以 y 是平稳序列。可知 y 的谱密度为

$$\Phi_y(\omega) = \Phi_r(\omega) \left| T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) \right|^2 + \Phi_d(\omega) \left| S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) \right|^2 \tag{6}$$

y 与 r 和 d 的互谱密度分别为

$$\Phi_{ry}(\omega) = \Phi_r(\omega) T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}), \quad \Phi_{dy}(\omega) = \Phi_d(\omega) S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})$$

引理 2 对于图 1 所示系统, 输出 y 与输入 r 和 d 的互信息率分别为

$$\bar{I}(r; y) = \frac{-1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{\Phi_d(\omega) \left| S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) \right|^2}{\Phi_r(\omega) \left| T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) \right|^2 + \Phi_d(\omega) \left| S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) \right|^2} \mathrm{d}\omega \tag{7}$$

$$\bar{I}(d; y) = \frac{-1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{\Phi_r(\omega) \left| T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) \right|^2}{\Phi_r(\omega) \left| T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) \right|^2 + \Phi_d(\omega) \left| S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) \right|^2} \mathrm{d}\omega \tag{8}$$

证明 设 $Y(z)$ 为 y 的 z-变换, 其他亦然。由于 r 和 y 皆为高斯平稳随机序列, 根据谱分解定理[10], 存在有理函数 F_r 和 F_y, 它们的极点都在单位圆内,

零点在单位圆内或单位圆上, 使得 $\Phi_r(\omega) = F_r(e^{i\omega})F_r(e^{i\omega})$, $\Phi_y(\omega) = F_y(e^{i\omega})F_y(e^{i\omega})$。用 F_r 和 F_y 分别对 r 和 y 进行非奇异变换, 得 r' 和 y', 即 $R'(z) = R(z)F_r^{-1}(z)$, $Y'(z) = Y(z)F_y^{-1}(z)$。设 $M(z) = F_r(z)T(z)F_y^{-1}(z)$, 可知 $M(z^{-1})M(z) \le 1$。则 r' 和 y' 具有高斯联合谱密度 $\begin{bmatrix} 1 & M(e^{i\omega}) \\ M(e^{-i\omega}) & 1 \end{bmatrix}$。根据引理 1, r' 和 y' 的互信息率为

$$\bar{I}(r';y') = \frac{-1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln[1 - M(e^{-i\omega})M(e^{i\omega})]\,d\omega = \frac{-1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{\Phi_d(\omega)|S(e^{i\omega})|^2}{\Phi_d(\omega)|S(e^{i\omega})|^2 + \Phi_r(\omega)|T(e^{i\omega})|^2}\,d\omega$$

由信息论可知[7], 平稳高斯过程的互信息在非奇异线性有限维系统的变换下是保持不变的。因而有 $\bar{I}(r;y) = \bar{I}(r';y')$, 则得出式(7)。同样, Φ_d 也存在非奇异分解 $\Phi_d(\omega) = F_d(e^{i\omega})F_d(e^{i\omega})$, 同理可得式(8)。□

式(7) 和式(8) 中积分项的分母是一致的, 因而式(5) 等价于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\Phi_r(\omega)\,d\omega + \int_{-\pi}^{\pi}\ln|T(e^{i\omega})|^2 d\omega > \int_{-\pi}^{\pi}\ln\Phi_d(\omega)\,d\omega + \int_{-\pi}^{\pi}\ln|S(e^{i\omega})|^2 d\omega \tag{9}$$

设
$$F_r(z) = \frac{r_0\prod_{i=1}^{p_1}(z - z_i^r)}{\prod_{j=1}^{q_1}(z - p_j^r)}$$
$$F_d(z) = \frac{d_0\prod_{i=1}^{p_2}(z - z_i^d)}{\prod_{j=1}^{q_2}(z - p_j^d)}$$

其中: r_0, d_0 分别是 F_r, F_d 的当分母为首一多项式时, 分子的主导系数; z_i^r, p_j^r 和 z_i^d, p_j^d 分别是 F_r 和 F_d 的零、极点。则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\Phi_r(\omega)\,d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|\frac{r_0\prod_{i=1}^{p_1}(e^{i\omega} - z_i^r)}{\prod_{j=1}^{q_1}(e^{i\omega} - p_j^r)}\right|^2 d\omega \tag{10}$$

根据 Poisson 积分定理[9], 当 $|\alpha| \le 1$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi}\ln|e^{i\omega} - \alpha|^2 d\omega = 0$。所以, $\int_{-\pi}^{\pi}\ln\Phi_r(\omega)\,d\omega = 4\pi\ln|r_0|$。同理, $\int_{-\pi}^{\pi}\ln\Phi_d(\omega)\,d\omega = 4\pi\ln|d_0|$。

由以上分析可以得出如下结果:

定理 1　对于图 1 所示系统, 当且仅当

$$2\pi\ln|r_0| + \int_{-\pi}^{\pi}\ln|T(e^{i\omega})|\,d\omega > 2\pi\ln|d_0| + \int_{-\pi}^{\pi}\ln|S(e^{i\omega})|\,d\omega \tag{11}$$

时, 系统满足基本信息条件式(5)。

由定理 1 可以看出, 对于本文所讨论的跟踪控制系统, 基本信息条件直接关系到系统敏感函数和补敏感函数的 Bode 积分。根据离散系统敏感函数和补敏感函数的 Bode 积分定理[3,4], 当系统开环传递函数为严格正则时, 即式(4) 中 $p < q$, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln|S(e^{i\omega})|\,d\omega = 2\pi\sum_{i=1}^{k}\ln|p_i^u| \tag{12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln|T(e^{i\omega})|\,d\omega = 2\pi\sum_{j=1}^{l}\ln|z_j^u| + 2\pi\ln|l_0| \tag{13}$$

式中: p_i^u 和 z_j^u 为开环传递函数 $L(z)$ 单位圆外的极点和零点, l_0 为开环传递函数 $L(z)$ 分子的主导系数。因而有如下推论:

推论 1　对于图 1 所示系统, 假如开环传递函数是严格正则的, 那么, 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{l}\ln|z_j^u| + \ln|l_0| - \sum_{i=1}^{k}\ln|p_i^u| > \ln|d_0| - \ln|r_0| \tag{14}$$

时, 系统满足基本信息条件式(5)。

定理 1 从有效跟踪的基本信息条件出发, 得出了系统敏感函数和补敏感函数的 Bode 积分间存在的关系, 这一关系反映了系统闭环传递函数设计所受到的解析约束。推论 1 则利用 Bode 积分定理, 表明了基本信息条件与系统开环不稳定零极点的关系。事实上, 式(14) 右边等于信号 d 和 r 的平均信息量(熵率[9]) 之差。d 的信息是对系统"有害"的信息, 即干扰; r 的信息是对系统"有用"的信息, 即输出要尽量获取的内容。所以, 式(14) 右边反映了所有输入对系统的"信息损害", 而左边则是系统开环传递函数有关参数的函数。因而, 基本信息条件反映了为对抗信息损害系统(开环传递函数) 应具备的特性。

5　结　　语

本文针对受随机干扰的离散线性时不变系统的反馈跟踪控制问题, 考察了系统内的信息传输情况, 讨论了系统获得有效跟踪性能应满足的基本信息条件。从此条件出发, 得出了系统闭环传递函数(敏感函数和补敏感函数) 设计所受到的解析约束, 表明了系统敏感函数和补敏感函数的 Bode 积分间的关系。本文的工作为研究反馈控制系统的性能设计约束探索了一条新的途径——信息论方法。

(下转第 603 页)

确定，并且

$$J_{th}=\left[\sup_{\Delta A\in\Omega_1,\Delta B\in\Omega_2}\|r_u\|_{2,N}^2+\sup_{\Delta A\in\Omega_1}\|r_d\|_{2,N}^2\right]^{1/2}=\left[J_{th,u}^2+J_{th,d}^2\right]^{1/2}$$

特别是当 $\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{l}_2$，$J_{th,d}$ 可近似取为常数，而 $J_{th,u}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 有关并且是在线已知的。因此 $\boldsymbol{u}$ 的变化使阈值也随之改变。从该意义上讲，又称其为自适应阈值。从而有

$$\|r\|_{2,N}>J_{th}\Rightarrow \text{故障报警}$$
$$\|r\|_{2,N}\le J_{th}\Rightarrow \text{无故障}$$

4　结　　语

本文研究了受模型不确定性和范数有界未知输入影响的不确定离散时间系统的鲁棒 FDF 设计问题。通过引入新的性能指标函数，可将基于观测器的 FDF 设计问题归结为 H_∞ 优化问题，进而可通过选择适当的稳定后滤波器和观测器增益矩阵求得问题的解。本文的主要特点在于通过求解一矩阵 Riccati 方程，可求得最大化对于故障信号的灵敏度，同时又确保对于模型不确定性和未知输入鲁棒性的残差产生系统，即最小化给定性能指标函数的最优解。另外，通过进一步选取适当的自适应阈值，可有效降低故障发生的误报率和漏报率。

参考文献(References)：

[1] Chen J, Patton R J. *Robust Model-based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[2] Frank P M, Ding S X, Koppen-Seliger B. Current developments in the theory of FDI[A]. *Proc SAFEPROCESS'2000*[C]. Budapest, 2000. 16-27.

[3] Ding S X, Ding E L, Jeinsch T. A new optimization approach to the design of fault detection filters[A]. *Proc SAFEPROCESS'2000*[C]. Budapest, 2000. 250-255.

[4] Ding S X, Frank P M, Ding E L, et al. A unified approach to the optimization of fault detection systems[J]. *Int J of Adaptive Control and Signal Processing*, 2000, 14(7): 725-745.

[5] Nobrega E G, Abdalla M O, Grigoriadis K M. LMI-based filter design for fault detection and isolation[A]. *Proc of 39th CDC*[C]. Sydney, 2000. 4329-4334.

[6] Patton R J, Hou M. On sensitivity of robust fault detection observers[A]. *Proc of 14th World Congress IFAC*[C]. Beijing, 1999. 67-72.

[7] Zhong M Y, Ding S X, Tang B Y, et al. An LMI approach to robust fault detection filter design for discrete-time systems with model uncertainty[A]. *Proc of 2001 IEEE CDC Conference*[C]. Orlando, 2001. 3613-3618.

[8] Zhou K, Doyle J C. *Essentials of Robust Control*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1998. 200-250.

(上接第 599 页)

参考文献(References)：

[1] Bode H W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*[M]. Princeton: Van Nostrand, 1945.

[2] Iglesias P A. Tradeoffs in linear time-varying systems: An analogue of Bode's sensitivity integral[J]. *Automatic*, 2001, 37(10): 1541-1550.

[3] Sung H K, Hara S. Properties of complementary sensitivity function in SISO digital control systems[J]. *Int J of Control*, 1989, 50(9): 1283-1295.

[4] Wu B F, Jonckhecre E A. A simplified approach to Bode's theorem for continuous-time and discrete-time systems[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1992, 37(11): 1797-1802.

[5] Ashby W R. *An Introduction to Cybernetics*[M]. London: Chapman & Hall Ltd, 1956.

[6] 章辉，孙优贤. 随机自适应控制的信息论方法[J]. 控制与决策，1995, 10(6): 519-524.
(Zhang H, Sun Y X. An information theoretic approach to stochastic adaptive control[J]. *Control and Decision*, 1995, 10(6): 519-524.)

[7] Stoorvogel A A, Schuppen J H Van. System identification with information theoretic criteria[A]. *Identification, Adaptation, Learning*[C]. Berlin: Springer, 1996. 289-338.

[8] Wang H. Minimum entropy control of non-Gaussian dynamic stochastic systems[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 2002, 47(2): 398-403.

[9] Ihara S. *Information Theory for Continuous Systems*[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1993.

[10] Åström K J, Wittenmark B. *Computer-controlled Systems: Theory and Design*[M]. 3rd ED. Prince Hall, 1997.