第 18 卷 第 5 期　　控 制 与 决 策　　2003 年 9 月
Vol. 18 No. 5　　Control and Decision　　Sept. 2003

文章编号: 1001-0920(2003)05-0517-05

非线性 DEDS 的周期时间配置与凝着色图

陈 文 德
(中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100080)

摘　要: 对于用极大极小函数描述的非线性离散事件动态系统(DEDS), 提出一种凝着色图方法。用该方法证明了不同周期时间的数目等于凝点的数目。在此基础上给出了能用状态反馈(独立)配置周期时间的充要条件, 解决了与传统线性控制系统极点配置问题完全对应的问题。将该结果应用于线性 DEDS, 得到了配置域及缩短的周期时间。

关键词: 离散事件动态系统; 非线性; 凝着色图; 极点配置
中图分类号: O231. 2　　　**文献标识码**: A

Cycle time assignment of nonlinear discrete event dynamic systems and coloring condensation graph

CHEN Wen-de
(Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: For nonlinear discrete event dynamic systems (DEDS) described by max-min function, a coloring condensation graph method is presented. This method proves that the number of different cycle times equals the number of condensation points. A sufficient and necessary condition that cycle time can be assigned independently by state feedback is given, which solves the problem corresponding to the pole assignment problem in traditional linear control systems. This result is also used in linear DEDS to obtain assigned region and decreased cycle times.

Key words: Discrete event dynamic systems; Nonlinear; Coloring condensation graph; Pole assignment

1 引　　言

数字电路中两个时间信号经过“与”门逻辑电路时相当于作极大运算, 经过“或”门逻辑电路时相当于作极小运算, 因而极大极小函数描述的非线性 DEDS 可用于数字电路的时间分析。近年来, 在大规模数字集成电路应用的推动下, 极大代数上非线性 DEDS 的理论正在开拓。Gunawardena 等[1～3]对此进行了系列研究, 证明了深刻的对偶定理; 文献[4, 5]研究了非线性 DEDS 的能达能观性与周期时间合并配置。本文研究的极点配置(周期时间配置)问题, 既是传统线性控制系统中一个基本、重要、很有应用价值的问题, 也是文献[6]的核心之一。文献[4]的周期时间配置, 仅能将 n 个周期时间合并成一个来配置, 而不能与一般的多个极点的极点配置问题对应。本文则研究与极点配置完全对应但却困难的周期时间配置问题。

继文献[5]提出非线性 DEDS 对应的着色图新概念后, 本文进一步提出凝着色图新概念, 从而得到非线性 DEDS 的标准序, 揭示出周期时间的块状规律; 在此基础上, 针对周期时间配置问题, 给出合理的提法, 并得到了周期时间能配置的充要条件。将所得结果应用于线性 DEDS, 得到了与文献[7]相同的充要条件。但本文的周期时间比文献[7]的周期更复杂(但更实用), 因而配置域增加了约束限制。

收稿日期: 2002-06-03; **修回日期**: 2002-10-28。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69874040)。
作者简介: 陈文德(1941—), 男, 江苏苏州人, 研究员, 从事离散事件动态系统、离散数学等研究。

对于对偶系统, 得到了平行结果。对于具有更广泛用途的线性DEDS, 可在其对偶非线性系统中用极小型反馈控制来缩短 w 个周期时间, 解决了文献[7]未解决的问题。

2 凝着色图与标准序

令 R 表示实数域, $a \vee b =: \max(a, b)$, $a \wedge b =: \min(a, b)$, $D =: (R \cup \{+\infty\}, \wedge, +)$ 称为极大代数。本文研究文献[4]提出的非自治非线性DEDS

$$x(k+1) = F(x(k)) \vee B u(k)$$
$$y(k) = C x(k)$$

其中: 极大极小函数[1]为 $R^n \to R^n$ 的函数; $F(x) = \bigwedge_{r \in I}(A(r)x)$, $A(r) \in D^{n \times n}$, $A(r)(r \in I)$ 为 $F(x)$ 的所有单极大射影[1]; $B \in D^{n \times q}$, $C \in D^{p \times n}$, $x(k) \in R^n$, $u(k) \in R^q$, $y(k) \in R^p$; 矩阵运算均为 D 上矩阵运算。以上系统简记为 S 或 (F, B, C)。本文沿用文献[5]关于 F 与 S 的着色图 $G(F)$ 和 $G(S)$ 的定义, 不再赘述。

定义1 在 $G(F)$ 的 n 个点的集 U 上定义一个关系 R, 当且仅当从 i 到 j 及从 j 到 i 都有各种颜色的路时 $(i \neq j)$, $ij \in R$; 并规定: 不论 i 到 i 是否有各色路, 均有 $ii \in R$。易验证 R 是一个等价关系, 由集合论知识, U 存在一个划分: $U_1, U_2, \cdots, U_w$。把 U_t 内的各点凝成一个点, 记为 X_t, $1 \leq t \leq w$。当 $G(F)$ 或 $G(S)$ 内各弧的起、终点相应变动时, 得到的图称为 F 或 S 的凝着色图, 记为 $G^*(F)$ 或 $G^*(S)$。上述各图中若两点间有 $r \in I$ 各色弧, 则称为有白色弧。

引理1 $G^*(S)$ 中存在一个 X_t 的下标 t 的编号次序, 使得白色弧 X_tX_s 不存在, 其中 $1 \leq s < t \leq w$。

证明 在 $G^*(S)$ 中取一个凝点 X_t, 若存在第2个凝点到它有白色弧, 则继续观察第2个凝点; 若存在第3个凝点到它有白色弧, 则继续观察第3个凝点; …。由于凝着色图中无白色弧首尾相接形成长大于1的白色回路(否则回路上各点可凝成一个点), 而总共仅有 w 个凝点, 所以最多观察 w 次, 便可找到一个凝点。其他凝点到它均无白色弧, 记为 X_1。类似地在剩下的 $w-1$ 个凝点中可找到一个凝点, 其他 $w-2$ 个凝点到它均无白色弧, 记为 X_2。这样一直找下去, 直到找到最后一个凝点, 记为 X_w。□

上述 $G^*(S)$ 的编号次序称为标准序。在选定标准序后, 对 $G(S)$ 中集 U 的 n 个点重新编号: 先对 X_1 内点从1开始由小到大编号, 再对 X_2 内点由小到大编号, …, 直到对 X_w 内点由小到大编号至 n。这实际上是对 $G(S)$ 中 n 个点的原编号进行置换。按文献[8], 定义极小元矩阵 $A = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = \bigwedge_{r \in I} a_{ij}(r)$。注意到无白色弧就是 A 中相应子块内元全为 $-\infty$, 于是易得如下系统:

系统1 系统 S 对应的 A 可用置换阵 P 化成标准形 PAP^{-1}, 即

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \cdots & \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{w1} & A_{w2} & \cdots & A_w \end{bmatrix}$$

定义2 若 $\lim_{k \to \infty} F^k(x)/k$ 对某个 x 存在, 则称它为周期时间(向量), 也称为广义特征值, 记为 $\chi(F) = [\mu_1(F), \cdots, \mu_n(F)]^T$。它表示DEDS中事件发生的平均速度。

文献[1]指出: F 有对偶表示, 即

$$F(x) = \bigwedge_{r \in I}(A(r)x) = \bigvee_{j \in J}(A'(j)x)$$

其中: $A'(j)$ 为极小代数 $E =: (R \cup \{+\infty\}, \wedge, +)$ 上 n 阶方阵, $A'(j)(j \in J)$ 为 $F(x)$ 的所有单极小射影[1], $A'(j)x$ 为 E 上矩阵运算。

引理2(对偶定理) $\chi(F)$ 总存在, 且有

$$\chi(F) = \bigwedge_{r \in I} \chi(A(r)) = \bigvee_{j \in J} \chi(A'(j))$$

定理1 当 i, j 属于 $G^*(S)$ 的同一凝点时, 有 $\mu_i(F) = \mu_j(F)$。

证明 由文献[4]引理2知, 对每个 $r \in I$, 有

$$\mu_j(A(r)) = \bigvee W(\mu) \tag{1}$$

其中: μ 为 $G(A(r))$ 中到点 j 有路的回路, $W(\mu)$ 为 μ 的均重(即回路重/回路长)。因为 j 到 i 有 r 色路, 所以 $\mu_j(A(r)) \leq \mu_i(A(r))$。又因 i 到 j 有 r 色路, 所以 $\mu_j(A(r)) \geq \mu_i(A(r))$。于是对每个 $r \in I$, 有 $\mu_j(A(r)) = \mu_i(A(r))$。应用引理2即得 $\mu_i(F) = \mu_j(F)$。□

由定理1, 仅需在 R^w 中研究 $\chi(F)$ 的 w 个不同分量。S 中取状态反馈 $u(k) = Kx(k)$ 后, S 成为 $(F \vee BK, C)$[4]。以下 $F \vee BK$ 的周期时间总指 $\chi(F \vee BK)$ 的 w 个不同分量构成的向量, 简记为 $[\mu_1, \cdots, \mu_w]^T$。相应地, 简记 $\mu_i(r) =: \mu_i(A(r) \vee BK)$, $1 \leq i \leq w$。

3 周期时间配置

文献[4]的周期时间配置对应于文献[6]的周期合并配置。为了与本文的周期时间配置相区别, 以下准确地称它为周期时间合并配置。它仅能将 n 个 μ_j 合并成一个来配置, 而不能与一般的多个极点的

极点配置问题完全对应。本文研究更难的与极点配置完全对应的周期时间配置问题。

定义 3　设向量集 $\Delta \in R^w$，当且仅当向量 $z \in \Delta$ 时，能找到 K，使 $F \vee BK$ 的周期时间为 z，则称 Δ 为系统 S 的(状态反馈下的周期时间) 配置域。若 Δ 包含一个 R^w 中的球心为 $M = [m_1, m_2, \cdots, m_w]$，半径为 N 的 w 维球，则称 Δ 为 w 维的。这里: N 为先取定的充分大的正常数; $m_1, m_2, \cdots, m_w$ 均为由 N 确定的充分大的正常数。若系统 S 的配置域 Δ 为 w 维，则称系统 S 的周期时间能用状态反馈配置。

定义 4　在 $G(S)$ 的点 $1, 2, \cdots, n$ 中取出 w 个，记为 $t(q)$，$1 \le q \le w$，画 w 条 $t(q)$ 到 $u_{j(q)}$ 的白色弧 $t(q)u_{j(q)}$，令白色弧 $t(q)u_{j(q)}$ 重为 k_q(即取 K 的第 $j(q)$ 行第 $t(q)$ 列的元为 k_q，$1 \le q \le w$，其他元均为 $-\infty$)。设 $u_{j(q)}$ 到 $t(q)$ 有 r 色路，取定 r 后，把所有 $u_{j(q)}$ 到 $t(q)$ 的 r 色路中最短路中的最重路记为 $R(q, r)$，记 $R(q, r)$ 的重和长分别为 $W(q, r)$ 和 $L(q, r)$。白色弧 $t(q)u_{j(q)}$ 与 $R(q, r)$ 形成一条新回路。令 $1 \le i \le w$，i 和 r 取定后，若新回路到凝点 X_i 中点有 r 色路，则记所有这类 q 的集合为 $Q(i, r)$。每个 $Q(i, r)$ 中取定一个元 $q^*(i, r)$，再对每个 i 取定 I 中一个元，记为 $r^*(i)$。设 q 与 i 间一一对应: $q^*(i, r^*(i)) = i, 1 \le i \le w$，令黑色不在色集 I 与白色中。在 $G^*(S)$ 中，对所有 i 和 r 画黑色弧 $X_q X_{q^*(i,r)}, q \in Q(i, r) \setminus q^*(i, r)$，并定义其重为 $\alpha_{qq^*} = L(q, r)L(q^*(i, r), r^*(q^*(i, r)))/L(q, r^*(q))L(q^*(i, r), r)$。再画黑色弧 $X_{q^*(i, r^*(i))} X_{q^*(i, r)}, r \ne r^*(i)$，并定义其重为 $\alpha_{q^*} = L(q^*(i, r), r^*(q^*(i, r)))/L(q^*(i, r), r)$ (注意: 两点间可能画出一条以上黑色弧)。所有黑色弧与 X_i 形成的图称为 S 的黑色图。$q^*(i, r)$，$r^*(i)$ 取法可不唯一，每种取法对应一个黑色图。对长为 c 的黑色回路的第 i 段弧，$X_{qi}X_{qi+1}$ 定义最轻弧的重为 $\alpha_i^* = \min\{\alpha_i\}$。这里 $\{\alpha_i\}$ 为所有黑色弧 $X_{qi}X_{qi+1}$ 的重 $\alpha_{qi, qi+1}$ 构成的集合。

将上述状态反馈 K 引入 S，对应于在 $G^*(S)$ 中画出一组从 X_i 点到 u_j 的白色弧。若这组白色弧不形成含多于一个凝点的白色回路，则称 K 为不合并凝点。

定理 2　系统 S 的周期时间能用状态反馈配置的充要条件是: 存在定义 4 中的 $\{k_q \mid 1 \le q \le w\}$，使得以下 3 个条件全满足:

1) 对所有 $r \in I$，$1 \le i \le w$，$Q(i, r) \ne$ 空集，且 K 不合并凝点;

2) 存在 $q^*(i, r)$，$r^*(i)$ 的一种取法，使得 $q^*(i, r^*(i)) = i, 1 \le i \le w$;

3) 在 2) 中取法对应的黑色图中无黑色回路，或有长为 c 的黑色回路时，满足以下 2 个条件之一:

① $\prod_{i=1}^{c} \alpha_i^* > 1$;

② 当 $c = \alpha_1 = 1$ 时，$W(q^*(i, r), r) \ge W(q^*(i, r), r^*(q^*(i, r)))$。这里 $c = 1$ 的黑色自回路记为 $X_i X_i$，r 取遍满足 $i = q^*(i, r)$，$\alpha_1 = 1$ 的所有 r。

证明　必要性: 设存在某个 K，使得配置域 Δ 为 w 维的。记该 K 的第 $j(q)$ 行第 $t(q)$ 列的元为 k_q，$1 \le q \le w$，其他元均为 $-\infty$。$t(q)u_{j(q)}$ 与 $R(q, r)$ 形成新回路的均重为

$$(W(q, r) + k_q)/L(q, r) = : f_r(k_q) \tag{2}$$

这里不把 $u_{j(q)}$ 看作回路上的点，故回路长为 $L(q, r)$。设 k_q 足够大，由于 $R(q, r)$ 是最短路中的最重路，易知式(2) 是白色弧 $t(q)u_{j(q)}$ 形成的 $r(q)$ 色各新回路中的最重均重。由引理 2 与式(1) 可知

$$\mu_i = \bigwedge_{r \in I} \mu_i(r) = \bigwedge_{r \in I} \bigvee_{q \in Q(i, r)} f_r(k_q) \\ 1 \le i \le w \tag{3}$$

因仅对充分大 k_q 进行研究，故式(3) 中 $\vee$ 运算时不含 k_q 的项已删去。反设有一个 $Q(i, r) =$ 空集，则当 k_q 充分大时，式(3) 中 $\mu_i(r) =$ 已删去的项，值不随 k_q 变化，但 $\mu_i \le \mu_i(r)$。所以定义 5 中的 m_i 不能充分大，Δ 不是 w 维的，矛盾。

多变量 k_q(记为 k, $1 \le q \le w$) 的非线性函数为

$$\bigwedge_{r \in I} \bigvee_{q \in Q(i, r)} f_r(k_q) = : H \tag{4}$$

对每个 k 值可取到一个线性函数 $f_{r^*(i)}(k_{q^*(i, r^*(i))})$ 的值，这里

$$f_r(k_q) \le f_r(k_{q^*(i, r)}) \tag{5}$$
$$q \in Q(i, r) \setminus q^*(i, r), \quad r \in I$$
$$f_{r^*(i)}(k_{q^*(i, r^*(i))}) \le f_r(k_{q^*(i, r)})$$
$$r \in I \setminus r^*(i) \tag{6}$$

满足 $f_r(k_q) \le f_r(k_{q^*(i, r)})$ 的 k，在 $D^{w'}$ 中两个变量的线性函数 $f_r(k_q) = f_r(k_{q^*(i, r)})$ 形成的超平面的一侧。因此，H 在式(5) 和(6) 对应的超平面族构成的区域中为线性函数 $f_{r^*(i)}(k_{q^*(i, r^*(i))})$，$H$ 是 $D^{w'}$ 上分区线性函数，区域数有限。于是在式(3) 的 w 个分区的交的每个区域中(用 $1 \le i \le w$ 的 w 组式(5) 和(6) 描写)，式(3) 为线性式，即

$$\mu_i = f_{r^*(i)}(k_{q^*(i, r^*(i))}), \quad 1 \le i \le w \tag{7}$$

由式(2)，每个区域中式(7) 的 $k_{q^*(i, r^*(i))}$ 的数目 $\le w$，又因配置域 Δ 为 w 维，所以至少存在一个区域

T, 其中式(7) 含 $k_{q^*(i,r^*(i))}$ 的数目 $= w$。以后只要这 w 个 k_q, 而其他 $w' - w$ 个 k_q 取为 $-\infty$。这样修改后即得式(3), 类似可证 $Q(i,r) \neq$ 空集。

反设 K 形成一条新白色回路含两个凝点 X_i 和 X_j, 由定义 3, X_i 和 X_j 可凝成一点, 由定理 1, $\mu_i = \mu_j$, 故 Δ 不是 w 维的, 矛盾。于是条件 1) 满足。这样修改后再定义式(5) 和(6)。修改后的区域 T 的式(7) 中可重记 $k_{q^*(i,r^*(i))}$ 为 k_i, 即这个区域 T 对应于 $q^*(i,r), r^*(i)$ 的一种取法(用式(5) 和(6) 定义), 使得

$$q^*(i, r^*(i)) = i, \quad 1 \leq i \leq w \tag{8}$$

于是条件 2) 满足。

下面说明一条黑色弧对应一条直线。注意到由式(5) 和(6) 中, 一个不等式可对应地按定义 4 定义一条黑色弧, 所以从区域 T 可对应得到一个黑色图, 到 X_i 中点有 r 色路的 r 色回路(回路均重记为 W) 为两类: 一类不含白色弧, 回路均重 W 与 k_{q^*} 无关, 因而由 k_{q^*} 足够大后知 $f_r(k_{q^*(i,r)}) > W$; 另一类含白色弧, 其中含重 k_q 的白色弧的回路可找到一条 $X_q X_{q^*(i,r)}$ 黑色弧, 由约束(5) 知 $f_r(k_{q^*(i,r)}) \geq f_r(k_q) = W$。于是由式(1) 得

$$\mu_i(r) = \bigvee_{q \in Q(i,r)} f_r(k_q) = f_r(k_{q^*(i,r)}) \tag{9}$$

当 $r \neq r^*(i)$ 时, 对于黑色弧 $X_i X_{q^*(i,r)}$, 由式(6), (8) 和(9) 知

$$f_{r^*(i)}(k_i) = f_{r^*(i)}(k_{q^*(i,r^*(i))}) \leq f_r(k_{q^*(i,r)}) = \mu_i(r)$$

于是应用引理 2, 由式(8) 和(9) 得

$$\mu_i = \bigwedge_{r \in I} \mu_i(r) = f_{r^*(i)}(k_i), \quad 1 \leq i \leq w \tag{10}$$

由式(10) 和(2) 可导出

$$k_i = L(i, r^*(i))\mu_i - W(i, r^*(i)), \quad 1 \leq i \leq w \tag{11}$$

这里 i 也可改成 q。将式(11) 代入(6), 再用式(2), (8) 和(10) 得

$$\mu_i \leq \mu_{q^*(i,r)} L(q^*(i,r), r^*(q^*(i,r))) / L(q^*(i,r), r) + (W(q^*(i,r), r) - W(q^*(i,r), r^*(q^*(i,r)))) / L(q^*(i,r), r) =: \alpha_{iq^*}\mu_{q^*(i,r)} + \beta_{iq^*} \tag{12}$$

把式(11) 代入(5), 类似得

$$L(q, r^*(q))\mu_q / L(q, r) + (W(q, r) - W(q, r^*(q))) / L(q, r) \leq L(q^*(i,r), r^*(q^*(i,r)))\mu_{q^*(i,r)} / L(q^*(i,r), r) + (W(q^*(i,r), r) - W(q^*(i,r), r^*(q^*(i,r)))) / L(q^*(i,r), r)$$

于是得

$$\mu_q \leq \mu_{q^*(i,r)} L(q,r) L(q^*(i,r), r^*(q^*(i,r))) / L(q, r^*(q)) L(q^*(i,r), r) + \beta_{qq^*} =: \alpha_{qq^*}\mu_{q^*(i,r)} + \beta_{qq^*} \tag{13}$$

这里 β_{qq^*} 是类似于 β_{iq^*} 的常数。因 $\alpha_{iq^*} > 0$, $\alpha_{qq^*} > 0$, 所以满足式(12)(满足式(13) 时类似) 的平面点 $[\mu_i, \mu_{q^*(i,r)}]^{\mathrm{T}}$, 在 R^2(水平坐标轴为 $(0, \mu_{q^*(i,r)})$) 中直线 $\mu_i = \alpha_{iq^*}\mu_{q^*(i,r)} + \beta_{iq^*}$ 的右下侧, 故 $\mu_i, \mu_{q^*(i,r)}$ 可取充分大。

现反设条件 3) 不满足: 有长为 $c > 1$ 的黑色回路时, $\prod_{i=1}^{c} \alpha_i^* \leq 1$。于是至少有一条最轻弧构成的长为 c 的黑色回路, 其弧重 α_i 满足 $\prod_{i=1}^{c} \alpha_i \leq 1$。这条黑色回路上任两点 X_i 与 X_q 之间有两条反向路, 将其中一条长为 b 的路的第 i 段弧记为 $X_{qi}X_{qi+1}$, 并将式(12) 或(13) 记为 $\mu_{qi} \leq \alpha_i\mu_{qi+1} + \beta_i$, $1 \leq i \leq b$, 经迭代得

$$\mu_i \leq \prod_{i=1}^{b} \alpha_i\mu_q + \beta \tag{14}$$

从另一条路也可类似导出参数 α_i, β_i 及 $\mu_{qi} \leq \alpha_i\mu_{qi+1} + \beta_i$, $e =: b + 1 \leq i \leq c$。经迭代得

$$\mu_q \leq \prod_{i=e}^{c} \alpha_i\mu_i + \beta \tag{15}$$

当 $\prod_{i=1}^{c} \alpha_i < 1$ 时, 满足式(14) 和(15) 二约束的平面点 $[\mu_i, \mu_q]^{\mathrm{T}}$ 在 R^2 中二直线 $\mu_1 = \prod_{i=1}^{b} \alpha_i\mu_q + \beta$ 和 $\mu_q = \prod_{i=e}^{c} \alpha_i\mu_i + \beta$ 所夹左下区域中, 故 μ_i 和 μ_q 不可取充分大。配置域 Δ 的维数降低了 2 维, 矛盾。当 $\prod_{i=1}^{c} \alpha_i = 1$ 时, 直线 $\mu_i = \prod_{i=1}^{b} \alpha_i\mu_q + \beta$ 与直线 $\mu_q = \prod_{i=e}^{c} \alpha_i\mu_i + \beta'$ 平行或重合。平行线所夹区域有固定宽度 d, 而分区数目有限, 有限个宽度累加仍为固定数, 小于先取定的充分大的正常数 N (半径), 所以配置域 Δ 的维数降低了 1 维。重合时有 $\mu_i = \prod_{i=1}^{b} \alpha_i\mu_q + \beta$, 配置域 Δ 的维数降低了 1 维, 矛盾。再反设: 有长为 $c = 1$ 的黑色自回路时, $\alpha_1^* < 1$。于是至少有一条最轻弧, 其弧重 $\alpha_1 < 1$。对于点 X_i, 有 $\mu_i \leq \alpha_1\mu_i + \beta_1$, 由 $\alpha_1 < 1$, μ_i 不

可取充分大, 故配置域Δ的维数降低了1维, 矛盾。再反设当长为 $c=1$ 的黑色自回路时, $\alpha_1=1$, 但定理2条件3)-②不满足, 由式(12)知 $\beta_1<0$, 故 μ_i 不可取任何数, 于是配置域Δ的维数降低了1维, 矛盾。综上所述, 条件3)满足。

充分性的证明较易, 略去。□

4　线性系统与对偶系统

将定理2应用于线性系统, 可得如下定理:

定理3　线性系统 S 的周期时间能用状态反馈配置的充要条件是: 存在一个标准序, 使得在 $G^*(S)$ 中:

1) 恰有 w 条弧 u_iX_i, $1\le i\le w$;

2) 没有弧 u_iX_j, $1\le j<i\le w$。

证明　1) 充分性: 线性系统的 $G^*(S)$ 的 I 中仅有的一色设为棕色。设条件1)中 u_i 到 X_i 中点 $t(q)$ 有弧, 画 w 条从 $t(q)$ 到 u_i 的弧, 重为 k_q。由标准序与条件2)易知定理2条件1)满足。可取 $q^*(i,r)=i$, 即定理2条件2)满足。易知定义6的黑色弧就是棕色弧。由单色凝图无回路知, 定理2条件3)满足。

2) 必要性: 因存在 $\{k_q \mid 1\le q\le w\}$, 使得定理2条件1)满足, 故每个 k_q 通过其形成的新回路必对应一弧 u_iX_j。这些 X_j 必两两不同, 否则两个 k_i 在一个强连通支内, 仅一个 k_i 起作用, Δ降1维; 这些 u_i 也必两两不同, 否则 K 合并了凝点, 与定理2条件1)矛盾。于是改 X_j 下标 j 为 i 后, 条件1)满足。因 u_i 与 X_i 可进而凝成一点, 这一新凝图总可有标准序, 而 u_i 与 X_i 凝成一点, 故在新标准序下条件2)满足。□

附记1　对于线性DEDS, 由充分性证明中 k_q 的取法易知 $L(i,r)=1$, 故式(13)中 $\alpha_{qq^*}=1$。由于 $W(q,r)-W(q,r^*(q))=0$ 等原因, 式(13)中 $\beta_{qq^*}=0$。于是约束(13)为 $\mu_q\le\mu_{q^*(i,r)}$。文献[7]中线性DEDS周期能用状态反馈配置的充要条件与定理3条件相同, 本文的周期时间比文献[7]的周期(A 的不可约阵的特征值)更复杂困难, 但更实用, 因而配置域Δ增加了约束(13)中 $\mu_q\le\mu_{q^*(i,r)}$ 的限制。

基于 F 的对偶表示, 文献[4]引入了对偶系统

$$x(k+1)=F(x(k))\wedge Bu(k)$$
$$y(k)=Cx(k)$$

其中极大极小函数 $F(x)=\bigvee_{j\in J}(A'(j)x)$, $B\in E^{n\times q}$, $C\in E^{p\times n}$, $x(k)\in R^n$, $u(k)\in R^q$, $y(k)\in R^p$, 矩阵运算均为 E 上矩阵运算。以上系统简记为 S' 或 (F', B, C)。将定义5中 $m_1, m_2, \cdots, m_w$ 由正常数改为负常数, ∨改为∧, 即得系统 S' 的周期时间能用状态反馈配置的定义。再在定义4, 定理1和定理2证明中, 将 $r, w, -\infty$, 最短路, 最重路, ∧, ∨, ≤, 充分大等, 分别改为 $j, w', +\infty$, 最长路, 最轻路, ∨, ∧, ≥, 充分小等, 便可得 S' 各定义, 并对 S' 同样证得引理1, 定理1～定理3, 详略。

极大代数在制造系统、计算机网、通信网、交通系统等方面具有广泛的用途。当线性DEDS的阶数 >1 时, 其对偶系统必然是非线性的, S' 的定理3给出了用 $\wedge BK$ 型的反馈控制来缩短 w 个周期时间的方法。这是在更高层次的非线性框架下, 解决了文献[7]未解决的问题。

5　结　　论

本文提出了凝着图新方法, 并用它得到了能用状态反馈使周期时间配置域为 w 维的充要条件。这种配置与极点配置完全对应, 它使 w 个周期时间能互相独立地配置, 从而发挥了配置的最大潜力。上述充要条件及其证明比较复杂, 但对配置域的计算十分有用。

参考文献(References):

[1] Gunawardena J. Min-max functions[J]. *J Discrete Event Dynamic Systems*, 1994, 4(3): 377-406.

[2] Gunawardena J. *Idempotency*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

[3] Gaubert S, Gunawardena J. The duality theorem for min-max functions[J]. *Comptes Rendus Acad Sciences*, 1998, 26(3): 43-48.

[4] Chen W D, Cycle time assignment of nonlinear DEDS[J]. *Systems Science and Mathematical Sciences*, 2000, 13(2): 213-218.

[5] Chen W D, Tao Y G. Observabilities and reachabilities of nonlinear DEDS and coloring graphs[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2001, 46(1): 642-644.

[6] 陈文德, 齐向东. 离散事件动态系统——极大代数方法[M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[7] 陈文德, 齐向东. 离散事件动态系统的周期配置[J]. 中国科学(A), 1993, 23(1): 1-7.
(Chen W D, Qi X D. Cycle assignment of DEDS[J]. *Science in China*(A), 1993, 23(1): 1-7.)

[8] 陶跃钢, 陈文德. 非线性DEDS的能观性与极小元矩阵[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(10): 53-57.
(Tao Y G, Chen W D. Observabilities of nonlinear DEDS and min-elements matrix[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2000, 20(10): 53-57.)