

文章编号: 1001-0920(2003)05-0527-04

典型模糊控制器的模糊规则函数与极限结构分析

周 畅, 朱德森, 陈绵云

(华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 讨论一般模糊控制器的解析形式。在以数值示例分析原有模糊规则解析描述的基础上, 提出模糊规则函数(FRF)的概念, 并证明了模糊规则函数的连续性和无穷性是控制器的极限结构定理的充要条件, 统一了模糊控制器的极限结构及其函数逼近能力。这使得设计模糊控制器时, 不必担心由于提高逼近精度而影响到已有的控制规则。

关键词: 模糊控制器; 模糊规则函数; 极限结构; 函数逼近器

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Analysis of the fuzzy rule function and limiting structure of typical fuzzy controllers

ZHOU Chang, ZHU De-sen, CHEN Mian-yun

(Department of Control Science and Engineering, Huazhong

University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Based on the general analytical form of fuzzy controllers and the analysis of a numerical example, the concept of fuzzy rule function (FRF) is proposed, which improves the expression of fuzzy rules. Continuity and infinity of FRFs are proven to be a necessary and sufficient condition for limiting structure theory. FRF unifies the limiting structure and approximation properties of typical fuzzy controllers. The fuzzy control rules are not affected by improving the precision of approximation when designing a fuzzy controller.

Key words: Fuzzy controller; Fuzzy rule function; Limiting structure; Function approximator

1 引 言

模糊控制器的极限结构理论, 是研究模糊空间的划分无穷精细或规则数目增加到无穷大时, 对控制性能的影响。文献[1]首先以一般模糊控制器解析结构分析为基础, 讨论了它的极限结构。模糊控制器可实现基于规则的人的语言控制, 无需了解被控系统的数学模型。作为一种强非线性控制器, 对其解析结构进行分析可以很好地帮助人们理解它的工作机理及其与传统控制器(例如 PD 控制器)的关系。目

前, 对模糊控制器的解析结构分析已取得了很大进展^[1~4], 并讨论了相应的极限结构。它们^[3,4]主要考虑了线性规则的情况, 只有部分^[1,2]考虑了非线性规则的情况。但是这些结果都假设推理规则在前件与后件的映射关系上与模糊空间的划分无关, 事实上这并不够合理, 尤其对于自学习模糊控制器可动态调整模糊规则的情况。

2 典型模糊控制器

设模糊控制器有 r 个输入变量 $x_i, i \in I_x = \{1,$

收稿日期: 2002-06-03; 修回日期: 2002-09-04。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79970025)。

作者简介: 周畅(1975—), 男, 湖南长沙人, 博士生, 从事一般系统论、模糊系统建模与控制等研究; 朱德森(1941—), 女, 湖北武汉人, 教授, 博士生导师, 从事计算机集成控制、网络控制和数字图像处理等研究。

2, ..., r}, 一个输出变量 y 。不失一般性, 假设 $-1 < x_i < 1$, 且对每个输入变量都定义 $N = 2J + 1 - 3$ 个正规模糊子集, 记为 $A_j^i, -J < j < J$ 。其中: J 个对应负的 x_i, J 个对应正的 x_i , 一个对应处于零点附近的 x_i 。 A_j^i 满足均分分布, 即相邻模糊子集的中心点的距离为

$$S = 1/J \tag{1}$$

A_j^i 的中心点为 jS 。类似地, 有 $-1 < y < 1$, 并定义 $2M + 1 - 3$ 个正规模糊子集, 记为 $B_m, -M < m < M$, 其中: m 个表示正的 y, m 个表示负的 y , 一个表示零, B_m 满足均分分布, 相邻模糊子集的中心距为

$$V = 1/M \tag{2}$$

中心点为 mV 。

定义 1 设 $[a, d] \subset U$ 且 $a < d, a < b < c < d$, 若连续函数 $A(x) = (x, a, b, c, d)$ 满足: $x \in [a, b)$ 时, $A(x)$ 单调递增; $x \in [b, c]$ 时, $A(x) = 1$; $x \in (c, d]$ 时, $A(x)$ 单调递减; $x \in U \setminus [a, d]$ 时, $A(x) = 0$ 。则称其为伪梯形函数。

基本假设: 输入空间的模糊子集 A_j^i 的隶属函数为伪梯形函数:

$$\begin{aligned} 1) \quad & A_j^i(x_i) = (x_i, -1, -1, \\ & \quad \quad \quad -1, (-J + 1)S) \\ & A_j^i(x_i) = (x_i, (J - 1)S, 1, 1, 1) \\ 2) \quad & A_j^i(x_i) = (x_i, (j - 1)S, jS - \delta_{ji}, \\ & \quad \quad \quad jS + \delta_{ji}, (j + 1)S) \\ & \delta_{ji} = 0, -J < j < J \end{aligned}$$

输出空间的模糊子集 B_m 的隶属函数形状相同, 且均关于中心点对称。

控制器共有 N^r 条语言规则覆盖了整个输入空间, 每条规则都具有如下形式

$$\begin{aligned} & \text{If } x_i \text{ is } A_{j_1}^i \text{ and } \dots \text{ and } x_r \text{ is } A_{j_r}^r \\ & \text{Then } y \text{ is } B_m \end{aligned} \tag{3}$$

其中 m 由任意具有整数输出的非线性或线性函数 f 决定, 即

$$m = f(j_1, j_2, \dots, j_r, J) \tag{4}$$

即有 $M = \lceil f \rceil = \sup |f|, -M < m < M$, 称 f 为模糊规则函数 (FRF)。

定义 2 模糊控制器满足基本假设, 当各输入变量恰好分别为其某个模糊子集的中心点时, 对应只有一条控制规则 R 被激活, 则称此时的输入(出)为规则 R 的满激活跃度输入(出)。

注 1 规则 R 的满激活跃度输入(出)指的是控制器的清晰输入(出), 其输入输出关系描述了模糊控

制器的控制规则中确定的部分, 如式 (3) 表示的规则满激活跃度输入为 $(j_1S, j_2S, \dots, j_rS)$, 满激活跃度输出为 mV 。

模糊逻辑与由任意 T-模实现, 例如: Zadeh and (min)。如果多条规则产生相同的模糊输出, 则用模糊逻辑或将它们连接起来。逻辑或可由任意 S-模实现, 例如: Zadeh or(max)。模糊逻辑推理可以采用任意推理算法, 例如: Mamdani 或 Mizumoto 推理算法。解模糊采用具有代表性的重心法 (COG), 由基本假设可知, 模糊控制器的清晰输出为

$$K_y y = K \frac{w(B_m)mV}{w(B_m)} \tag{5}$$

其中: K_y 为输出比例因子; $w(B_m)$ 表示模糊输出为 B_m 时的推理结果, 即规则的激活跃度。本文称满足以上条件的模糊控制器为典型模糊控制器。现在广泛使用的绝大部分模糊控制器都满足上述条件, 所以本文讨论的是一般化的情况。

3 模糊规则函数

模糊控制器能得到广泛的应用, 是因为它能实现基于语言的控制规则, 也就是能够充分利用专家的经验, 实现对复杂不确定系统的控制。而控制语句或专家经验是通过模糊规则描述的, 即模糊规则构成了一个模糊控制器的核心。模糊规则函数可以说是模糊规则的解析表示, 设计模糊控制规则的过程实际上就是设计模糊规则函数的过程, 设计的优劣直接影响模糊控制器的性能。

此前, 模糊规则函数的概念尚没有被明确地提出来, 虽然有不少文献^[1-4] 讨论了模糊规则的解析表述式, 例如线性规则 $m = j_i$ 。但与本文不同, 它们只考虑了规则前件的模糊数的标号 j_i , 而未考虑模糊数的数目 J , 即

$$m = f(j_1, j_2, \dots, j_r) \tag{6}$$

实际上这是不全面的。模糊系统已被证明具有万能函数逼近器的性质^[5,6], 即可以任意精度一致逼近紧致集上的任意连续非线性函数。这是模糊系统能得到很好应用的理论基础, 它使得模糊系统用作模型辨识时, 能够逼近任意连续的非线性动态模型; 用作控制器时, 能够使得闭环系统动态响应逼近任意连续的非线性控制曲线。然而, 式 (6) 并不能很好地说明这一性质。下面的数值例子将说明 J 对控制器性能的影响。

例 1 单输入单输出模糊控制器要求实现图 1

曲线 所示的分段线性输入输出关系,分段点满足 $x = -1$ 时, $y = -1$; $x = 0$ 时, $y = 1/2$; $x = 1$ 时, $y = 1$ 。

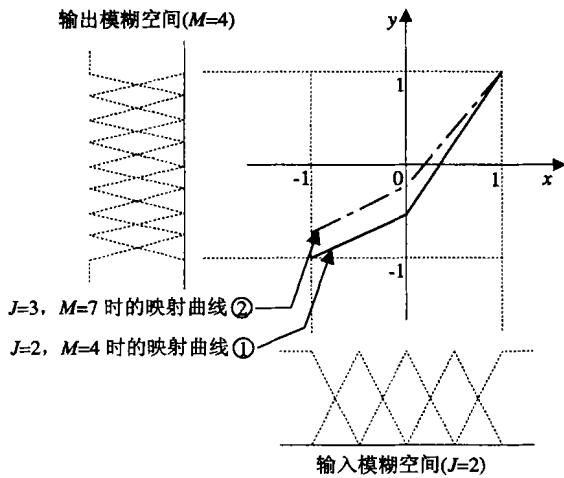


图 1 模糊规则函数变化对控制器输入输出性能的影响

本文在输入空间定义 5 个模糊子集, 输出空间定义 9 个模糊子集, 其隶属函数如图 1 所示。若按式 (6) 设计控制规则, 则有

$$m = f(j) = \begin{cases} j - 2, & -2 \leq j \leq 0 \\ 3j - 2, & 0 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

$$m \in [-M, M], \quad J = 2, \quad M = 4 \quad (7)$$

模糊系统的函数逼近性质说明, 模糊空间划分得越精细, 其逼近精度越高。当取 $J = 3$ 时, 由式 (7) 知 $M = \sup |f(j)| = 7$, 但此时由式 (7) 定义的模糊规则导致控制器输入输出曲线为图 1 的曲线 2。其中: $x = 0$ 时, $y = 2/7$; $x = 1$ 时, $y = 5/7$, 这说明模糊空间划分得精细, 逼近性能反而下降, 只有更改规则函数 f 才能再次达到高的逼近精度。这也是文献 [1] 中定理 5 的一个数值特例, 它说明 f 至少应该是一个与 J 对应的函数簇 $\{f_J\}$ 。如果按式 (4) 设计控制规则, 则有

$$m = f(j) = \begin{cases} j - J, & -J \leq j \leq 0 \\ 3j - J, & 0 \leq j \leq J \end{cases}$$

$$m \in [-M, M], \quad J = 2, \quad M = 4 \quad (8)$$

当更精细地划分模糊空间时, 即增加 J 能在保持式 (8) 的情况下提高控制器的逼近精度, 当 J 趋于无穷大时, 逼近精度趋于无穷小。这说明形如式 (4) 的模糊规则函数具有描述模糊规则以及反映模糊空间划分精细程度的能力, 它能够保持全局统一的解析形式, 即增加模糊规则时不影响已有规则的满激活度输入输出关系, 从而适应模糊空间划分的动态调整, 是一种更加合理的定义形式。下面给出模糊规则函数及

其两个基本性质的定义。

定义 3 形如式 (4) 的函数如果满足: 1) 输入为整数时, 输出亦为整数, 2) 模糊规则的增加 (即 J 的增加) 不影响已有规则的满激活度输入输出关系, 则称之为模糊规则函数 (FRF), 或简称为规则函数。

定义 4 对任意给定的 J , 如果 $\Delta_j = \max_i |j_i - j_i| \leq 1$, 有

$$\Delta f = |f(j_1, j_2, \dots, j_r, J) - f(j_1, j_2, \dots, j_r, J)| \leq \theta \quad (9)$$

其中 θ 为与 J 无关的正常数, 则称 f 为连续模糊规则函数。

定义 5 如果 $J \rightarrow \infty$, 有 $M = f(j_1, j_2, \dots, j_r, J) \rightarrow \infty$, 则称 f 为无穷大模糊规则函数。

注 2 模糊规则函数的连续性质和无穷大性质是容易满足的。

例 2 设

$$f(j_1, j_2, \dots, j_r, J) = \sum_{i=1}^r a_i(j_1/J, j_2/J, \dots, j_r/J) j_i + b(j_1/J, j_2/J, \dots, j_r/J) J \quad (10)$$

满足输入为整数时, 输出亦为整数, 其中 $a_i(\cdot)$ 和 $b(\cdot)$ 均为定义在 $[-1, 1]^r$ 上的非零 r 元函数, 且 $a_i(\cdot)$ 有界, $b(\cdot)$ 满足 Lipschitz 条件, 则该 f 是一类连续、无穷大的模糊规则函数。本文称其为分段线性模糊规则函数。

4 极限结构定理

定理 1 (极限结构定理) 典型模糊控制器的输出可分解为全局控制器输出与局部控制器输出之和, 当且仅当模糊规则函数是连续、无穷大的, 则模糊空间的划分足够精细时, 其局部控制器将消失。

证明 不失一般性, 假设 $p \leq x_i \leq (p_i + 1)S$, $-J \leq p_i \leq J, i = 1, \dots, r$, 由基本假设知最多只有 $A_{p_i}^i(x_i) > 0, A_{p_i+1}^i(x_i) > 0$, 因此对所有的输入变量, 最多只有 2^r 条规则被激活, 即最多产生 2^r 个模糊输出。考虑到可能需要逻辑或来合并相同的模糊输出规则, 本文设最终得到 q 个不同的模糊输出为

$$B_{m_1}, B_{m_2}, \dots, B_{m_q}, \quad 1 \leq q \leq 2M + 1$$

$$-M \leq m_1, m_2, \dots, m_q \leq M \quad (11)$$

由式 (2) 和 (5), 易得控制器的输出为

$$K_y y = y_G + y_L \quad (12)$$

$$y_G = m \zeta \frac{K_x}{M}$$

$$y_L = \frac{K_y}{M} \frac{\prod_{h=1}^q w(B_{m_h})(m_h - m_\zeta)}{\prod_{h=1}^q w(B_{m_k})}$$

ζ 为 $[1, q]$ 上的任意整数。因 m_h 属于模糊规则函数的值域,故 J 给定时, m_ζ 只与 p_i 有关,而与输入变量相对于模糊子集中心点的距离无关,称 y_G 为全局控制器输出;相反, y_L 只与输入变量相对于对应模糊子集中心点的距离有关,称之为局部控制器输出。

由于模糊规则函数是无穷的,故有

$$\lim_J |y_L| = \lim_M \frac{K_y}{M} \frac{\prod_{h=1}^q w(B_{m_h}) |m_h - m_\zeta|}{\prod_{h=1}^q w(B_{m_k})} = \frac{K_y \prod_{h=1}^q w(B_{m_h}) \lim_M \frac{|m_h - m_\zeta|}{M}}{\prod_{h=1}^q w(B_{m_k})} \quad (13)$$

又由于模糊规则函数是连续的,且其参数满足连续性条件,故存在 θ 使得

$$\lim_M \frac{|m_h - m_\zeta|}{M} = \lim_M \frac{\theta}{M} = 0 \quad (14)$$

由式(13)和(14),得

$$\lim_J y_L = \lim_J y_L = 0 \quad (15)$$

$$\lim_N K_y y = \lim_J K_y y = \lim_J y_G + \lim_J y_L =$$

$$\lim_J y_G = K_y \lim_M \frac{m_\zeta}{M} = 0 \quad (16)$$

反之亦然。

定理2 具有连续、无穷大的规则函数的典型模糊控制器能以任意精度一致逼近紧致集上的任意连续的 r 输入单输出非线性函数。

证明 文献[5]以规则补袂覆盖逼近函数的思想证明了模糊系统的函数逼近性。模糊规则函数的定义保证了增加模糊规则时,原有规则补袂的质心不变;连续性保证了可以紧密地或连续地放置规则补袂;无穷大性保证了可以放置任意多个规则补袂。因此,可由文献[5]中的逼近定理证明知定理2成立。

典型模糊控制器的极限结构定理,说明了模糊控制器可以分解为全局控制器与局部控制器之和。当模糊规则数目增大到无穷时,它能以任意高的精度逼近理想的控制输出曲线,但此时局部控制器的性能将消失。模糊空间的无穷划分在实际应用中不可能实现,也没有必要实现。极限结构定理和统一的模糊规则函数形式可以帮助人们在设计控制器时,能够在细化控制规则过程中,对控制机理有清晰的认识,同时既保持原有的控制规则的解析式的有效性,又尽量提高控制精度。

5 结语

本文提出了模糊规则函数,明确了对模糊控制器规则集的解析表述应该考虑的两个因素:模糊规则和模糊空间划分精细程度,统一了模糊控制器的极限结构和函数逼近能力。这既是对文献[1]的扩展,也是对模糊控制理论的充实和发展,有利于人们把握模糊控制器的内在本质和控制器的优化设计。基于模糊规则函数的模糊控制器的设计和整定,将是今后进一步的研究方向。

参考文献(References):

- [1] Ying H. General analytical structure of typical fuzzy controllers and their limiting structure theorems[J]. *Automatica*, 1993, 29(4): 1139-1143
- [2] Ying H. Analytical structure of the typical fuzzy controllers employing trapezoidal input fuzzy sets and non-linear control rules[J]. *Information Sciences*, 1999, 116(2-4): 177-203
- [3] Buckley J J, Ying H. Fuzzy controller theory: Limiting theorems for linear fuzzy control rules[J]. *Automatica*, 1989, 25(3): 469-472
- [4] 张乃尧. 典型模糊控制器的结构分析[J]. *模糊系统与数学*, 1997, 11(2): 10-21
(Zhang N Y. Structure analysis of typical fuzzy controller[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1997, 11(2): 10-21.)
- [5] Kosko B. Fuzzy system as universal approximators[J]. *IEEE Trans on Computers*, 1994, 43(11): 1329-1333
- [6] Ying H, Chen G R. Necessary conditions for some typical fuzzy systems as universal approximators[J]. *Automatica*, 1997, 33(7): 333-338