

文章编号: 1001-0920(2003)05-0531-04

非匹配不确定 M M O 线性系统的终端滑模控制

鲍 晟, 冯 勇, 郑雪梅

(哈尔滨工业大学 电气工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 提出一种用于非匹配不确定 M M O 线性系统的终端滑模控制方法。设计了特殊的终端滑模切换面和相应的控制策略, 使得系统在有限时间内收敛到终端滑模面, 在系统到达终端滑模面后保证系统的状态保持在终端滑模面上, 并在有限时间内收敛到平衡点附近的邻域内。建立了该邻域的范围与系统的非匹配不确定性的范围以及终端滑模参数之间的数学关系, 用于系统设计与分析。仿真结果验证了所提出方法的有效性和分析的正确性。

关键词: 终端滑模; 有限时间收敛; 匹配条件

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Terminal sliding mode control of M M O linear systems with unmatched uncertainties

BAO Sheng, FENG Yong, ZHENG Xuemei

(Department of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: A terminal sliding mode manifold and control methodology are proposed for M M O linear systems with unmatched uncertainties. The system states are guaranteed to reach the sliding mode manifold in finite time, and converge to the neighborhood of the equilibrium point in finite time once they are on the sliding mode manifold. The mathematical relationship between the neighborhood of the equilibrium point and the range of the unmatched uncertainties and parameters of sliding mode is formulated, which can be used for the system design and analysis. Simulation results validate the design and the analysis.

Key words: Terminal sliding mode; Finite time convergence; Matched conditions

1 引 言

不确定系统一直是控制领域的研究热点。当系统不确定性满足匹配条件时, 通常可以设计合适的控制器, 使得系统渐近稳定, 同时保证系统对满足匹配条件的不确定性具有鲁棒性甚至不变性; 而系统不确定性不满足匹配条件时, 控制系统的设计则变得极为困难。对于实际系统, 系统的不确定性很难全部满足匹配条件。近年来, 人们对非匹配不确定系统的控制作了大量研究, 如文献[1]提出的 H 控制,

文献[2]提出的变结构控制等。

滑模变结构系统对系统的内部参数变化和外部扰动具有强鲁棒性, 因而滑模变结构控制为不确定系统的控制提供了一种可行的鲁棒综合方法。但是当不确定性不满足匹配条件时, 系统的不变性便不再存在, 系统状态最多只能保持有界^[5]。

本文提出一种终端滑模控制方法, 用于非匹配不确定 M M O 线性系统。通过设计特殊的终端滑模切换面和相应的控制策略, 使得系统在有限时间内

收稿日期: 2002-05-08; 修回日期: 2002-08-25。

作者简介: 鲍晟(1975—), 女, 湖北十堰人, 博士生, 从事变结构控制、鲁棒控制等研究; 冯勇(1962—), 男, 江苏南京人, 教授, 博士生导师, 从事变结构控制、鲁棒控制等研究。

收敛到终端滑模面上。当系统到达终端滑模面后,可以保证系统的状态保持在终端滑模面上,并在有限时间内收敛到平衡点附近的邻域内。本文建立了该邻域的范围与系统的非匹配不确定性的范围以及终端滑模参数之间的数学关系,用于系统设计与分析。对所提出的方法进行计算机仿真,其结果验证了所提出方法的有效性和分析的正确性。

2 非匹配不确定M MO 线性系统的终端滑模控制

2.1 非匹配不确定M MO 线性系统

考虑如下不确定M MO 线性系统

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + f_u \quad (1a)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u + f_m \quad (1b)$$

式中: $x_1 \in R^{n-m}$ 和 $x_2 \in R^m$ 为系统状态变量; $A_{11} \in R^{(n-m) \times (n-m)}$, $A_{12} \in R^{(n-m) \times m}$, $A_{21} \in R^{m \times (n-m)}$, $A_{22} \in R^{m \times m}$, $B_2 \in R^{m \times m}$, (A_{11}, A_{12}) 可控, B_2 非奇异, 且 $n-m > m$; $R(B_2)$ 表示 B_2 的值域空间; 函数 $f_u \in R(B_2)$ 和 $f_m \in R(B_2)$ 分别表示非匹配和匹配的不确定性且有界, 满足不等式

$$\|f_u\| \leq k_1, \quad \|f_m\| \leq k_0 \quad (2)$$

注意: 可控的M MO 线性系统均可线性变换为系统(1)的标准形式^[3]。

2.2 M MO 线性系统的终端滑模控制

本文研究M MO 线性系统(1)的调节控制问题。首先根据文献[3], 将终端滑模(TSM)设计为

$$s = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_1^{q/p} \quad (3)$$

式中: $C_1 \in R^{m \times (n-m)}$, $C_2 \in R^{m \times m}$ 和 $C_3 \in R^{m \times (n-m)}$ 均为终端滑模的设计参数矩阵, 且 C_2 满秩, $\text{rank}(C_2) = m$; p 和 q 均为奇数, 且满足条件

$$q < p < 2q \quad (4)$$

向量 $x_1^{q/p}$ 定义为

$$x_1^{q/p} = [x_1^{q/p}, x_2^{q/p}, \dots, x_{n-m}^{q/p}]^T$$

对于终端滑模(3), 本文提出如下控制策略

$$u = u_l + u_n \quad (5)$$

$$u_l = - (C_2B_2)^{-1} [(C_1A_{11} + C_2A_{21})x_1 + (C_1A_{12} + C_2A_{22})x_2 + (q/p)C_3\text{diag}(x_1^{q/p-1})(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) + \Phi s^r] \quad (6)$$

$$u_n = - (C_2B_2)^{-1} \rho_1 \frac{s}{s} \quad (7)$$

式中: $\text{diag}(x_1^{q/p-1}) = \text{diag}(x_1^{q/p-1}, \dots, x_{n-m}^{q/p-1})$; $s_i^r = [s_1^r, s_2^r, \dots, s_m^r]^T$; $\Phi = \text{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $\varphi_i > 0, i = 1, \dots, m$; ρ_1 为正数, 其计算将在后面说明; r 为设计

常数, 满足 $r = z_1/z_2, z_1$ 和 z_2 均为奇数, 且 $z_1 < z_2$, 即有 $0 < r < 1$ 。

为了证明M MO 线性系统(1)的状态在有限时间内收敛, 根据文献[4], 首先引入如下引理:

引理 1 假设连续正定函数 $V(t)$ 满足微分不等式

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha V^\eta(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (8)$$

式中 $\alpha > 0$ 和 $0 < \eta < 1$ 均为常数。则 $V(t)$ 满足不等式

$$V^{1-\eta}(t) \leq V^{1-\eta}(0) - \alpha(1-\eta)t \quad (9)$$

且有

$$V(t) = 0, \quad \forall t \geq t_r \quad (10)$$

有限时间 t_r 为

$$t_r = V^{1-\eta}(0)/\alpha(1-\eta) \quad (11)$$

为了证明在控制策略(5)~(7)作用下, 系统(1)将在有限时间内到达滑模面 $s = 0$, 现给出如下定理:

定理 1 对于非匹配不确定M MO 线性系统(1), 如果将终端滑模设计为式(3)的形式, 控制器设计为式(5)~(7)的形式, 且控制器设计参数 ρ_1 满足

$$\rho_1 \geq k_1 [C_1 + (q/p)C_3 \times \text{diag}(x_1^{q/p-1})] + k_0 C_2 \quad (12)$$

则系统(1)将在有限时间内到达滑模面 $s = 0$ 。

证明 首先对TSM 超曲面(3)求导, 并将控制(5)~(7)代入, 有

$$\begin{aligned} \dot{s} &= C_1\dot{x}_1 + C_2\dot{x}_2 + (q/p)C_3\text{diag}(x_1^{q/p-1})\dot{x}_1 \\ &= \Phi s^r - \rho_1 s/s + [C_1 + (q/p)C_3\text{diag}(x_1^{q/p-1})]f_u + C_2f_m \end{aligned}$$

定义Lyapunov 函数 $V(t) = 0.5s^T s$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s^T \dot{s} \\ &= s^T \Phi s^r - \rho_1 s^T s/s + s^T [C_1 + (q/p)C_3\text{diag}(x_1^{q/p-1})]f_u + s^T C_2 f_m \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} s^T \Phi s^r &= \sum_{i=1}^m \varphi_i s_i^{r+1} \\ \min_i (\varphi_i) \left[\left(\sum_{i=1}^m s_i^2 \right)^{(r+1)/2} \right] &= \min_i (\varphi_i) s^{r+1} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \min_i (\varphi_i) s^{r+1} - \rho_1 s^T s/s + s^T [C_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (q/p) C_3 & \text{diag}(x_1^{q/p-1}) \\ s & C_2 & f_m \end{bmatrix} f_u + \\ & - \min_i(\mathcal{Q}) s^{r+1} - s(\rho_1 - k_1 [C_1 + \\ & (q/p) C_3 \text{diag}(x_1^{q/p-1})] - k_0 C_2) \end{aligned}$$

由式(12)有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & - \min_i(\mathcal{Q}) s^{r+1} = \\ & - \min_i(\mathcal{Q}) (2V)^{(r+1)/2} = -\alpha_i V^{\eta_1} \end{aligned}$$

式中: $\alpha_i = 2^{(r+1)/2} \min_i(\mathcal{Q}) > 0$, $\eta_1 = (r+1)/2 < 1$ 。
由引理 1 可知, M MO 系统(1) 的状态将在有限时间 t_{r1} 内到达 TSM 超曲面(3)。

有限时间 t_{r1} 为

$$t_{r1} = \frac{V^{1-\eta_1}(0)}{\alpha_i(1-\eta_1)} \quad (13)$$

当系统处于滑模上时, 系统的动态性能将由滑模确定。当 M MO 线性系统(1) 处于滑模(3) 时, 系统的状态方程降为 $(n-m)$ 阶。此时, 由终端滑模(3) 有

$$x_2 = -C_2^{-1}(C_1 x_1 + C_3 x_1^{q/p}) \quad (14)$$

将式(14) 代入(1a), 得到 M MO 线性系统在滑模上的状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 & = (A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1)x_1 - \\ & A_{12}C_2^{-1}C_3x_1^{q/p} + f_u \end{aligned} \quad (15)$$

显然, 当 $f_u = 0$ 时, 系统(15) 的平衡点为原点。

下面的定理指出, 在终端滑模上的不确定 M MO 线性系统, 其系统状态将在有限时间内收敛到原点附近的邻域内。

定理 2 对于系统(15), 如果设计终端滑模的参数矩阵, 使其满足

$$\begin{cases} A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1 = -Q_1 \\ A_{12}C_2^{-1}C_3 = \Lambda \end{cases} \quad (16)$$

式中: $Q_1 \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ 为正定矩阵; $\Lambda \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ 为对角阵, 且 $\Lambda_i > 0$ 。则系统状态将在有限时间内收敛到原点附近的邻域 Ω 和 Ω 内。 Ω 和 Ω 定义为

$$\Omega = \{x_1 \quad x_1 \quad k_1/\lambda_{\min}(Q_1)\} \quad (17)$$

$$\Omega = \{x_2 \quad x_2 \quad C_2^{-1}C_1 \quad x_1 + C_3 \quad x_1^{q/p}\} \quad (18)$$

式中 $\lambda_{\min}(Q_1)$ 表示 Q_1 的最小特征值。

证明 对于系统(15), 考虑 Lyapunov 函数 $V(t) = 0.5x_1^T x_1$ 。注意到

$$x_1^T \Lambda x_1^{q/p} = \sum_{i=1}^{n-m} \Lambda_i x_i^{q/p+1}$$

$$\begin{aligned} & \min_i(\Lambda_i) \left[\sum_{i=1}^{n-m} x_i^2 \right]^{(q/p+1)/2} = \\ & \min_i(\Lambda_i) x_1^{q/p+1} \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & - \lambda_{\min}(Q_1) x_1^2 - \min_i(\Lambda_i) x_1^{q/p+1} + \\ & x_1 f_u \\ & - \alpha_e V^{\eta_2} - x_1 [\lambda_{\min}(Q_1) x_1 - k_1] \end{aligned}$$

式中: $\alpha_e = 2^{(q/p+1)/2} \min_i(\Lambda_i) > 0$, $\eta_2 = (q/p+1)/2 < 1$ 。当系统状态 x_1 满足 $x_1 > k_1/\lambda_{\min}(Q_1)$ 时, 有

$$\dot{V}(t) < -\alpha_e V^{\eta_2}, \quad \forall x_1 > \frac{k_1}{\lambda_{\min}(Q_1)}$$

即系统(15) 的状态 x_1 将在有限时间 t_{r2} 内收敛到平衡点附近的邻域

$$\Omega = \left\{ x_1 \quad x_1 \quad \frac{k_1}{\lambda_{\min}(Q_1)} \right\}$$

有限时间 t_{r2} 为

$$t_{r2} = \frac{V^{1-\eta_2}(0)}{\alpha_e(1-\eta_2)} \quad (19)$$

由式(14), x_2 也收敛到一个与 x_1 相关的区域 Ω 内, 即

$$\Omega = \{x_2 \quad x_2 \quad C_2^{-1}C_1 \quad x_1 + C_3 \quad x_1^{q/p}\}$$

由定理 1 和定理 2 可知, 对于任意初始状态, 系统(1) 的状态 x_1 和 x_2 将在有限时间 $t_r = t_{r1} + t_{r2}$ 内(见式(13) 和(19)) 分别到达系统平衡点附近的邻域 Ω 和 Ω 内(见式(17) 和(18))。

3 仿真实例

上面已提出了非匹配不确定 M MO 线性系统的终端滑模控制的设计方法, 证明了对任意初始状态, 系统(1) 将在有限时间 $t_r = t_{r1} + t_{r2}$ 内到达系统平衡点附近的邻域 Ω 和 Ω 内, 建立了该邻域的范围与系统的非匹配不确定性的范围以及终端滑模参数之间的数学关系, 用于系统设计与分析。下面对所提出的方法进行计算机仿真, 验证所提出方法的有效性和分析的正确性。

考虑如下三阶线性系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} f_{u1} \\ f_{m1} \\ f_{m2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

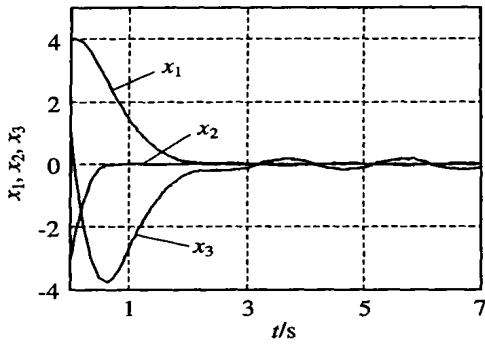


图 1 系统状态 x_1, x_2 和 x_3

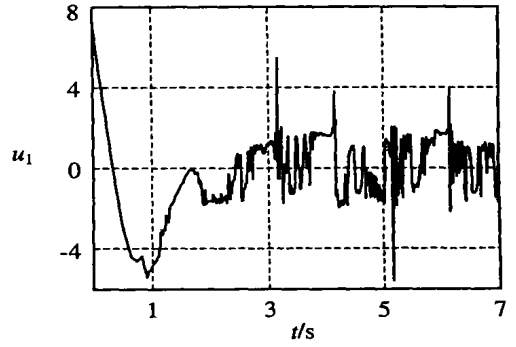


图 2 系统控制输入 u_1

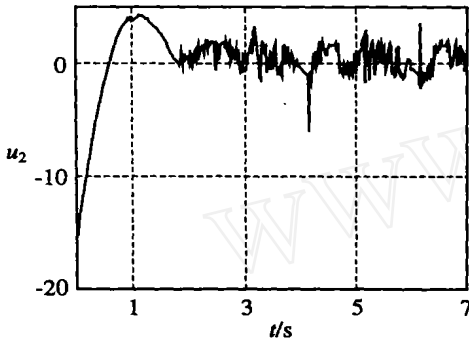


图 3 系统控制输入 u_2

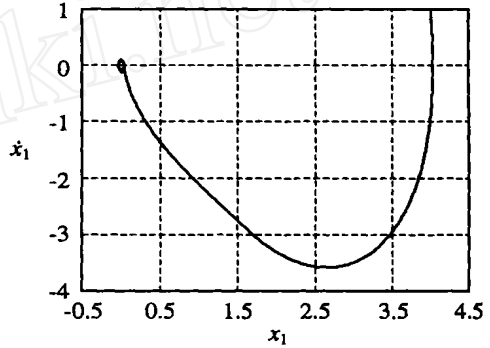


图 4 x_1 及其导数的相图

系统的初始值为 $x_1(0) = 4, x_2(0) = 1, x_3(0) = -3$ 。假设系统不满足匹配条件和满足匹配条件的不确定性分别为

$$f_u = 0.2 \sin \pi t$$

$$f_m = \begin{bmatrix} f_{m1} \\ f_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \sin 2\pi t \\ 0.5 \cos 2\pi t \end{bmatrix}$$

根据式(2), 有 $k_1 = 0.2, k_0 = 0.5$ 。终端滑模选取

$$s = C_1 x_1 + C_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + C_3 x_1^{3/5}$$

由定理 2, 根据式(16), 选取 $Q_1 = 1, \Lambda = 1$, 计算得到滑模设计参数矩阵 C_1, C_2 和 C_3 为

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由定理 1, 按式(5)~(7)设计控制策略, 设计参数取为 $\Phi = \text{diag}(5, 5), r = 3/5$ 。计算机仿真结果如图 1~图 4 所示。图 1 所示的系统状态在有限时间内收敛到平衡点附近的邻域内。另外, 根据式(17)和(18), 可求得系统状态收敛到的范围为 x_1

$k_1/\lambda_{\min}(Q_1) = 0.2, x_2 \leq C_2^{-1}C_1 x_1 + C_3 x_1^{q/p} < 0.6$ 。由图 1 可见, 仿真结果与理论分析相吻合; 图 2 和图 3 分别为控制信号 u_1 和 u_2 ; 图 4 为系统状态 x_1 及其导数的相图。

从仿真结果可见, 本文提出的终端滑模控制器可以保证系统的状态保持在终端滑模上面, 并在有限时间内收敛到平衡点附近的邻域内。该邻域的范围与理论分析的结果相吻合, 验证了所提出方法的有效性和分析的正确性。

4 结 语

本文提出一种用于非匹配不确定 MIMO 线性系统的终端滑模控制方法, 设计了特殊的终端滑模切换面和相应的控制策略, 保证了系统在有限时间内收敛到终端滑模面上, 在系统到达终端滑模面后保证系统的状态保持在终端滑模面上, 并在有限时间内收敛到平衡点附近的邻域内。本文建立了该邻域的范围与系统的非匹配不确定性的范围以及终端滑模参数之间的数学关系, 用于系统的设计与分析。仿真结果验证了所提出方法的有效性和分析的正确性。

参考文献 (References):

[1] 李辉, 谢剑英. 不满足匹配条件的非确定性系统的鲁棒滑模控制[J]. 自动化学报, 2001, 27(2): 252-257.
(Li H, Xie J Y. Robust SMC of uncertain time-varying systems dissatisfying matching condition[J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 27(2): 252-257.)

(下转第 539 页)

$$\mu_1 = \exp\left[-\left(\frac{x+2.1}{0.9}\right)^2\right]$$

$$\mu_2 = \exp\left[-\left(\frac{x}{0.9}\right)^2\right]$$

$$\mu_3 = \exp\left[-\left(\frac{x+2.1}{0.9}\right)^2\right]$$

这样, 模糊逻辑系统 $f(X(t) | \theta)$ 由 27 条规则构成, 系统输出的跟踪情况如图 1 所示。

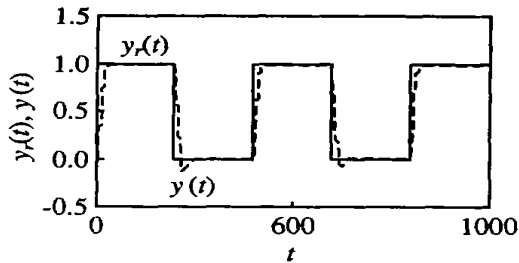


图 1 参考序列 $y_r(t)$ 和输出 $y(t)$

当 $t = 250$ 时, 假设系统参数发生了变化, 变为

$$(1 + 0.8048z^{-1})\Delta y(t) =$$

$$(0.2982 + 0.27z^{-1})\Delta u(t-1)$$

当 $t = 500$ 时, 假设系统参数又发生了变化, 变为

$$(1 + 0.4048z^{-1})\Delta y(t) =$$

$$(0.4982 + 0.4z^{-1})\Delta u(t-1)$$

此情况下系统输出的跟踪情况如图 2 所示。

从仿真结果可以看出, 本文方法不仅在系统参

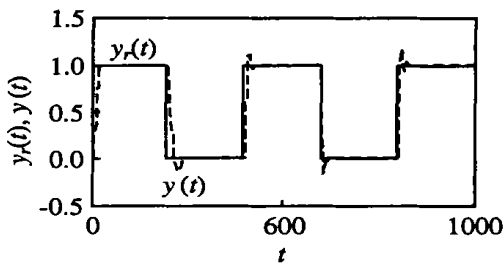


图 2 参考变化后参考序列 $y_r(t)$ 和输出 $y(t)$

数未知的情况下能很好地跟踪参考序列, 而且在参数发生变化后, 也具有较好的跟踪性能。

5 结 语

本文针对参数未知线性系统, 提出了直接自适应模糊广义预测控制方法。该方法的主要优点是不必预知系统参数, 因而为更好地解决含参数不确定性对象的广义预测控制问题提供了一种新方法, 同时避免了实时控制中 Diophantine 方程的求解和矩阵求逆。

参考文献(References):

- [1] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized predictive control [J] *Automatica*, 1987, 23(2): 137-160
- [2] Clarke D W, Mohtadi C. Properties of generalized predictive control [J] *Automatica*, 1989, 25(6): 859-875
- [3] 王伟. 广义预测控制理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1998 46-64
- [4] Wang L X. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems [J] *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1993, 1(2): 146-155
- [5] Goodwin G C, Sin K S. *Adaptive Filtering, Predictive and Control* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1984 50-57.
- [6] Spong M W, Thorp J S, Kleinwaks J M. Robust micro-processor control of robot manipulators [J] *Automatica*, 1987, 23(3): 373-379.
- [7] Gomma H W, Owens D H. Time varying weighting generalized predictive control with prediction to performance, stability and robustness [A]. *Proc IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Phoenix, Arizona, 1999 3706-3711.
- [8] Liu G P, Kadiramanathan V, Billings S. Predictive control for nonlinear systems using neural networks [J] *Int J Control*, 1998, 71(6): 1119-1132

(上接第 534 页)

- [2] 胡跃明, 刘永清. 非匹配条件下滑动模的鲁棒性 [J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 1995, 23(6): 36-41. (Hu Y M, Liu Y Q. On the robustness of sliding mode under unmatched conditions [J]. *J of South China University of Technology (Natural Science)*, 1995, 23(6): 36-41.)
- [3] Man Zhihong, Yu Xinghuo. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems [J]. *IEEE Trans on Cir-*

- cuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, 1997, 44(11): 1065-1070
- [4] Yu Tang. Terminal sliding mode control for rigid robots [J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 51-56
- [5] Christopher Edwards, Sarah K Spurgeon. *Sliding Mode Control Theory and Applications* [M]. London: Taylor & Francis Ltd, 1998 50-59.