

文章编号: 1001-0920(2004)01-0065-04

实验中的筛形吸引域在噪声影响下的可观察性

谭宁^{1,2}, 徐健学¹, 康艳梅¹, 陈永红¹

(1. 西安交通大学 建筑工程与力学学院, 陕西 西安 710049; 2 北京大学 物理学院, 北京 100871)

摘要: 实际系统中的噪声使得同步混沌吸引子成为具有一定生存时间的准稳态吸引子. 以二维耦合映射混沌同步系统为例, 经解析分析发现, 在给定系统实验时间长度的条件下, 只有当生存时间大于二倍的实验时间长度时, 准稳态同步混沌吸引子的筛形域才可定性观察到. 利用耦合斜帐篷映射系统进行了数值验证.

关键词: 混沌同步; 混沌控制; 筛形吸引域; 噪声

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A

Observability of riddled basins in experiments under the influence of noise

TAN Ning^{1,2}, XU Jian-xue¹, KANG Yan-mei¹, CHEN Yong-hong¹

(1. School of Architectural Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2 School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China Correspondent: TAN Ning, E-mail: tan-ning123@sina.com)

Abstract A two-dimensional coupled map is discussed and it is analytically found that the riddled basins of the metastable attractor only can be observed qualitatively when the average lifetime of the metastable attractor is longer than the double of time length of experiments. And the numerical calculations on coupled skew tent map also sustain this analysis.

Key words: chaotic synchronization; chaotic controlling; riddled basins; noise

1 引言

人们提出了多种混沌控制和混沌同步的方法^[1-4]. 近年来, 为研究混沌同步状态的稳定性, 一类特殊的吸引域——筛形域受到了人们的关注. 筛形域具有正勒贝格测度且不包含开集^[5], 在不同的参数下体现出局部筛形和全局筛形的性质^[6]. 因此, 具有筛形吸引域的同步混沌吸引子将丧失结构稳定性, 并且从筛形吸引域出发的轨道最终将变得不可确定. 值得注意的是, 筛形吸引域不仅存在于理论研究, 而且存在于实际应用^[7,8]. 噪声对筛形域的影响也受到了重视^[9,10].

本文主要研究筛形域在噪声作用下的可观察

性. 噪声使得混沌同步吸引子 A 成为具有一定生存时间 τ 的准稳态吸引子 A , 通过解析分析发现: 在给定系统实验时间长度 T 的条件下, 只有当 τ 与 T 满足一定的关系时 ($\tau > 2T$), A 的筛形吸引域才可定性观察到. 筛形吸引域的出现造成了对目标控制的失败, 目前尚无消除这种现象的有效方法. 本文结果对于在实验中观察筛形吸引域及进一步研究具有重要价值.

2 准稳态吸引子 A 平均生存时间的计算

考虑基础映射为 $x_{j+1} = f(x_j)$ 的耦合混沌同步系统

收稿日期: 2002-09-09; 修回日期: 2003-01-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172067); 国家重点基金资助项目(30030040).

作者简介: 谭宁(1977—), 女, 河南鹿邑人, 博士生, 从事非线性动力学、复杂系统的研究; 徐健学(1933—), 男, 江苏南京人, 教授, 博士生导师, 从事振动控制、非线性动力学等研究.

$$F_{\epsilon}(x, y): \begin{cases} x_{j+1} = f(x_j) + \epsilon(y_j - x_j) + D_0 \xi_{1j}, \\ y_{j+1} = f(y_j) + \epsilon(x_j - y_j) + D_0 \xi_{2j} \end{cases} \quad (1)$$

其中 ξ_1 和 ξ_2 是均值为零、强度为 D_0 ($0 < D_0 \ll 1$) 的高斯白噪声 令

$$\delta = y - x, \xi = \xi_2 - \xi_1,$$

可得

$$\delta_{j+1} = [f(x_j + \delta_j) - f(x_j)] - 2\epsilon\delta_j + D_0 \xi_j$$

如果 $\lim_{j \rightarrow \infty} |\delta_j| = 0$, 则系统(1) 将达到混沌同步状态 当 $D_0 > 0$ 时, δ 成为随机变量, 原无噪声时的同步混沌吸引子 A 成为在横截方向上具有一定厚度的瞬态混沌 A . 考虑轨道在 A 附近停留较长时间的情况 把 $f(x_j + \delta_j)$ 在 x_j 处作泰勒展开, 并忽略 δ_j 的高阶项, 得到 $\delta_{j+1} = (f(x_j) - 2\epsilon)\delta_j + D_0 \xi_j$. 文献 [10, 11] 中令 $z = \ln |\delta|$, 并将噪声的影响考虑到 FPK 方程的反射边界条件中, 得到 $z_{j+1} = z_j + \ln |f(x_j) - 2\epsilon|$ 则关于 z 的漂移系数 U 和扩散系数 D , 可表示为

$$U = \ln |f(x_j) - 2\epsilon|, \quad (2)$$

$$D = \frac{1}{2} (\ln |f(x_j) - 2\epsilon| - \ln |f(x_j) - 2\epsilon|)^2. \quad (3)$$

联想同步混沌吸引子 A 的横截 Lyapunov 指数, 其表达式为

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \left(\prod_{j=0}^{N-1} |f(x_j) - 2\epsilon| \right) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \ln |f(x_j) - 2\epsilon| \quad (4)$$

可见 U 刻画了 A 的横截 Lyapunov 指数 λ , 而 D 则刻画了在每一时刻得到的横截 Lyapunov 指数关于 λ 的偏差

当 $\lambda > 0$ 时, A 将失去结构稳定性, 因此只有在 $\lambda < 0$ (即 $U < 0$) 时, 讨论一条轨道在瞬态混沌 A 附近的演化时间才有意义

设随机变量 $\ln |f(x_j) - 2\epsilon| - \ln |f(x_j) - 2\epsilon|$ 服从高斯分布, 可得到关于 z 的 FPK 方程 其中 $p(z, t | z_0, t_0)$ 表示转移概率密度, 即

$$\frac{\partial p(z, t | z_0, 0)}{\partial t} = -U \frac{\partial p(z, t | z_0, 0)}{\partial z} + D \frac{\partial^2 p(z, t | z_0, 0)}{\partial z^2}. \quad (5)$$

设耦合系统(1) 的稳态吸引子处于 $|\delta| = +$ 的方向上, 定义 $|\delta_1| < |\delta_0| < |\delta_h|$ 且 $|\delta_1| \ll |\delta_h|$, 则 $z_1 < z_0 < z_{th}, z_1 \ll z_{th}$ 其中: $|\delta_0|$ 为初始值, $|\delta_h|$

为阈值 一旦 δ 到达 $|\delta_h|$, 轨道将离开 A 而趋向稳态吸引子. 于是得到关于 FPK 方程的初始条件和边界条件:

初始条件

$$p(z, z_0, 0) = \begin{cases} 1, z = z_0, \\ 0, z < z_0; \end{cases}$$

吸收条件

$$p(z_{th}, z_0, t) = 0;$$

反射条件

$$J(z_1, t) = -U p + D \frac{dp}{dz} = 0$$

由物理意义得到 $z_1 = \ln D_0$

根据 FPK 方程理论^[11], 求得从 δ_0 出发的轨道在 A 附近的平均演化时间

$$\tau = \frac{1}{D} \int_{z_0}^{z_{th}} e^{-\frac{U}{D}(u-z_1)} du \int_{z_1}^u e^{\frac{U}{D}(v-z_1)} dv = \frac{D}{U^2} \left| \frac{\delta_1}{\delta_h} \right|^{\frac{U}{D}} \left(1 - \left| \frac{\delta_1}{\delta_h} \right|^{\frac{U}{D}} \right) - \frac{1}{U} \ln \left| \frac{\delta_1}{\delta_h} \right| \quad (6)$$

由 $U < 0, |\delta_1| \ll |\delta_h|, |\delta_0| < |\delta_h|$, τ 可近似地表示为

$$\tau \approx -\frac{1}{U} \left| \frac{\delta_1}{\delta_h} \right|^{\frac{U}{D}} \ln \left| \frac{\delta_0}{\delta_h} \right| \quad (7)$$

可见 τ 是 $|\delta_0|$ 的减函数, 随着 $|\delta_0| \rightarrow |\delta_h|$, τ

$$0, \text{ 因而 } \tau_{\max} = \left| \frac{D_0}{\delta_h} \right|^{\frac{U}{D}} \ln \left| \frac{\delta_h}{D_0} \right|^{\frac{1}{U}}.$$

3 噪声对 A 筛形吸引域可观察性的影响

当 A 的生存时间 τ_{\max} 足够长时, 在实际中是有应用价值的, 文献[12] 称之为实践意义下的吸引子; 假定在实际应用中, 对系统要求的演化时间长度为 T (T 为一大正数), 当 $\tau_{\max} > T$ 时, 认为 A 是实际意义下的吸引子; 当 $\tau_{\max} < T$ 时, A 在实际应用中没有价值 本文主要讨论 $\tau_{\max} > T$ 的情况

设系统(1) 的同步混沌吸引子 A 在一定的耦合参数区间具有筛形吸引域 下面考虑噪声对筛形吸引域的影响

在噪声的作用下, 如果 $\tau_{\max} > T$, 则 A 将成为准稳态吸引子 A . 考虑 A 的邻域 $S_E(A)$ ($D_0 < E \ll \delta_h$) 及从 $S_E(A)$ 出发的轨道 $Q(\delta_0, t)$ ($D_0 < |\delta_0| < E$), $Q(\delta_0, t)$ 在 A 附近的演化时间记为 τ_{δ_0} , 在 $\tau_{\max} > T$ 的条件下, 如果任意的 τ_{δ_0} 都大于 T , 则 A 的筛形吸引域与 A 的筛形吸引域定性相同; 如果从某一正测度子集 Θ ($\Theta \subseteq S_E(A)$) 出发, 轨道的 $\tau_{\delta_0} < T$, 则 A 的筛形吸引域的局域性质在噪声影响下将得不到保留

由 $\tau_{\max} > T$ 可得

$$-\frac{1}{U} \left| \frac{D_0}{\delta_h} \right|^\mu > T \ln^{-1} \left| \frac{\delta_h}{D_0} \right| > 0 \quad (8)$$

此时, 设 $Q(\delta_0, t)$ 在 A 附近的平均演化时间 $\tau_{\delta_0} > T$, 然后寻找使该假设成立的条件. 由于

$$\begin{aligned} \tau_{\delta_0} &= -\frac{1}{U} \left| \frac{D_0}{\delta_h} \right|^\mu \ln \left| \frac{\delta_h}{\delta_0} \right| = \\ &= -\frac{1}{U} \ln \left(\left| \frac{\delta_h}{D_0} \right| \left| \frac{D_0}{\delta_0} \right| \right) \left| \frac{D_0}{\delta_h} \right|^\mu = \\ &= \tau_{\max} + \ln \left| \frac{D_0}{\delta_0} \right| \left(-\frac{1}{U} \left| \frac{D_0}{\delta_h} \right|^\mu \right) < \\ &= \tau_{\max} + T \ln \left| \frac{D_0}{\delta_0} \right| \ln^{-1} \left| \frac{\delta_h}{D_0} \right|, \end{aligned}$$

既已假设 $\tau_{\delta_0} > T$, 则应有

$$T < \tau_{\max} + T \ln \left| \frac{D_0}{\delta_0} \right| \ln^{-1} \left| \frac{\delta_h}{D_0} \right| \quad (9)$$

因此得到

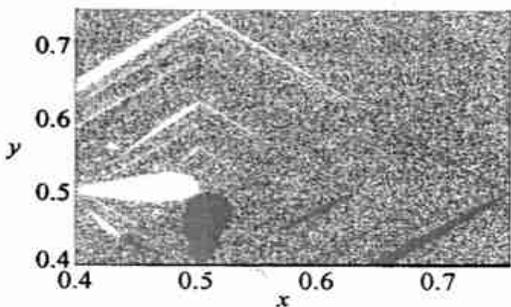
$$|\delta_0| < D_0 \left| \frac{\delta_h}{D_0} \right|^{\frac{\tau_{\max}}{T} - 1}. \quad (10)$$

根据 $D_0 < |\delta_0| < E, D_0 < E \ll |\delta_h|$ 的前提,

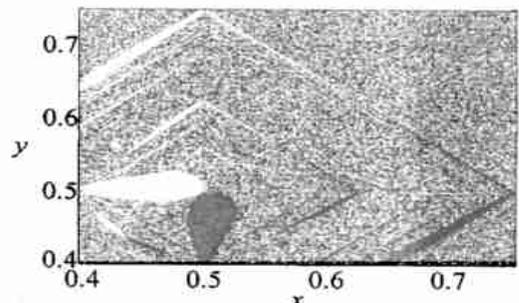
如果 $D_0 \left| \frac{\delta_h}{D_0} \right|^{\frac{\tau_{\max}}{T} - 1} > |\delta_h|$, 即 $\tau_{\max} > 2T$, 则从 $S_E(A)$ 任一点出发的轨道在 A 附近的平均演化时间都大于 T , 表明筛形吸引域的局域性质在邻域

$S_E(A)$ 中得到定性保留. 如果 $D_0 < D_0 \left| \frac{\delta_h}{D_0} \right|^{\frac{\tau_{\max}}{T} - 1} < E < |\delta_h|$, 即 $T < \tau_{\max} < 2T$, 则在 $S_E(A)$ 中存在一个正测度的子集 Θ , 从 Θ 出发的轨道在 (δ_0, δ_h) 区域中的演化时间都小于 T . 这意味着筛形吸引域的局域性质丧失, A 的筛形吸引域不再存在.

结合 τ_{δ_0} 是 $|\delta_0|$ 的减函数的特性, 随着 $|\delta_0|$ 减小, 有 $\tau_{\delta_0} > T$. 因此从筛形吸引域的全局结构看, 呈现出系统稳态吸引子的吸引域不断侵蚀 A 的筛形吸引域的状态, 但在 $\tau_{\max} > 2T$ 时, A 的筛形吸引域可以定性观察到.



(a) $a=0.5, \epsilon=1.05, D_0=1.0e-4, T=200$



(b) $a=0.5, \epsilon=1.05, D_0=1.0e-4, T=300$

图 2 $D_0 = 1.0e-4, T$ 不同时的吸引域

4 数值例证

本文利用基础映射为帐篷映射

$$x_{j+1} = \begin{cases} x_j/a, & 0 \leq x_j \leq a, \\ \frac{1-x_j}{1-a}, & a < x_j \leq 1, \end{cases} \quad 0 < a < 1.$$

二维耦合混沌同步系统进行数值实验. 该系统的同步混沌吸引子的吸引域是筛形吸引域^[13,14], 可得到 U 和 D 的解析表达式

$$U = a \ln \left| \frac{1}{a} - 2\epsilon \right| + (1-a) \times \ln \left| -\frac{1}{1-a} - 2\epsilon \right|, \quad (11)$$

$$D = \frac{1}{2} \left(a \left(\ln \left| \frac{1}{a} - 2\epsilon \right| - U \right)^2 + (1-a) \left(\ln \left| -\frac{1}{1-a} - 2\epsilon \right| - U \right)^2 \right). \quad (12)$$

图 1 给出了当 $a=0.5, \epsilon=-1.05$ 时数值实验和解析计算得到的瞬态混沌的平均生存时间 τ_{\max} , 二者近似得很好. 此时, 系统存在 A 和两个关于不变子空间 $x=y$ 对称的无穷远吸引子 $(+, -)$ 和 $(-, +)$. 图 2 和图 3 分别为在不同的 D_0 及 T 时所作吸引域图形 (其中: 黑点表示筛形吸引域, 灰点表示吸引到 $(+, -)$ 的点, 白点表示吸引到 $(-, +)$ 的点). 当 $\tau_{\max} > 2T$ 时, 可

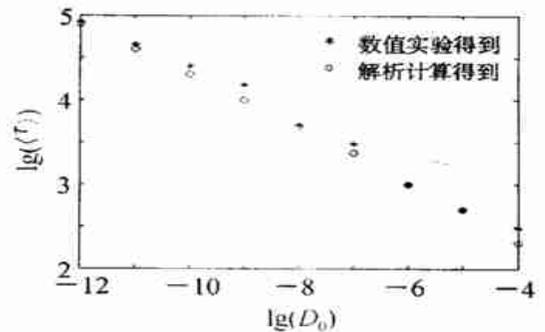
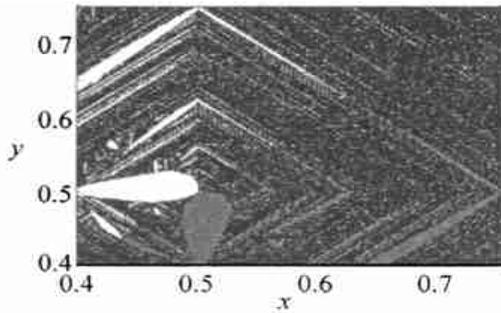
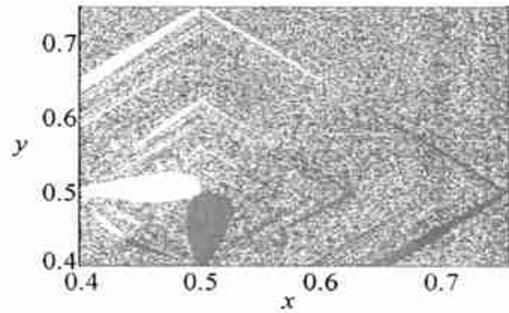


图 1 由公式计算和数值实验得到的 τ_{\max} 的比较

(a) $a=0.5, \epsilon=1.05, D_0=1.0e-10, T=500$ (b) $a=0.5, \epsilon=1.05, D_0=1.0e-10, T=1500$ 图3 $D_0 = 1.0e-10, T$ 不同时的吸引域

观察到A 的筛形吸引域, 定性性质与原无噪声时的筛形吸引域相同; 当 $\tau_{\max} < 2T$ 时, A 的筛形吸引域消失, 取而代之的是 $(+, -)$, $(-, +)$ 的吸引域互为筛形的结构, 类似于文献[9]

5 结 语

实际系统中的噪声是不可避免的, 使得同步混沌吸引子A 成为具有一定生存时间 τ 的准稳态吸引子A . 以二维耦合映射混沌同步系统为例, 经解析分析发现, 在给定系统实验时间长度 T 的条件下, 只有当 $\tau > 2T$ 时, A 的筛形域才可定性观察到; 当 $\tau < 2T$ 时, A 的筛形域将消失. 本文利用耦合斜帐篷映射系统进行了数值验证, 所得结果对于在实验中观察筛形吸引域及进一步研究具有重要价值

参考文献(References):

- [1] Pecora L M, Carroll T M. Synchronization in chaotic systems[J] *Phys Rev Lett*, 1990, 64(8): 821-825
- [2] 卢俊国, 魏荣, 汪小帆, 等. 连续混沌系统控制与同步的自适应方法[J]. 控制与决策, 2002, 12(1): 114-116
(Lu Junguo, Wei Rong, Wang Xiaofan, et al. Adaptive approach to controlling and synchronizing continuous-time chaotic systems [J] *Control and Decision*, 2002, 12(1): 114-116)
- [3] 齐冬莲, 魏金岭, 赵光宙. 基于系统辨识的自适应混沌同步控制研究[J]. 控制与决策, 2001, 16(1): 120-122
(Qi Donglian, Wei Jinling, Zhao Guangzhou. Control of adaptive chaotic synchronization based on system identification[J] *Control and Decision*, 2001, 16(1): 120-122)
- [4] 陈从颜, 宋文忠. 混沌同步的变结构控制[J]. 控制与决策, 2001, 16(6): 937-939.
(Chen Congyan, Song Wenzhong. Switching manifold

approach to chaos synchronization [J] *Control and Decision*, 2001, 16(6): 937-939)

- [5] Alexander J C, Yorke J A, Zhiping Y. Riddled basin [J] *Int J of Bif & Chaos*, 1992, 2(4): 795
- [6] Kapitaniak T, Maistrenko Y, Stefanski A. Bifurcation from locally to globally riddled basins[J] *Phys Rev E*, 1998, 57(6): 6253
- [7] Pegna G, Marracu R, Tonelli R. Experimental definition of the basin of attraction for Chua's circuit [J] *Int J of Bif & Chaos*, 2000, 10(5): 959-970
- [8] Heagy J F, Carroll T L, Pecora L M. Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems[J] *Phys Rev Lett*, 1994, 73(26): 3528-3531
- [9] Lai Yingcheng. Scaling laws for noise-induced temporal riddling in chaotic systems[J] *Phys Rev E*, 1997, 56(4): 3897-3908
- [10] Cenys A, Ulbikas J. Diffusional model for noisy on-off intermittency [J] *Int J of Bif & Chaos*, 1999, 9(2): 355-359
- [11] 加德纳 C W. 汪凯仁, 徐家鹤, 李洪芳译. 随机方法手册 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1991. 135-164
- [12] Kapitaniak T, Brindly J. Practical stability of chaotic attractors[J] *Chaos Solitons and Fractals*, 1998, 9(1/2): 43-50
- [13] 谭宁, 陈永红, 徐健学. 耦合帐篷映射同步系统的筛形吸引域[J]. 物理学报, 2000, 49(7): 1215-1220
(Tan Ning, Chen Yonghong, Xu Jianxue. Riddled basin in chaotic synchronization system: Linear coupled standard tent maps[J] *Acta Physica Sinic*, 2000, 49(7): 1215-1220)
- [14] Tan Ning, Xu Jianxue, Chen Yonghong. The isolated critical value phenomenon in local-global riddling bifurcation[J] *Chinese Physics*, 2002, 11(7): 670-677.