

文章编号: 1001-0920(2004)01-0102-03

## 机械臂最优运动规划问题的混合求解

连广宇, 孙增圻

(清华大学 计算机科学与技术系, 北京 100084)

**摘 要:** 提出一种基于 GA 和 SQP 求解机械臂最优运动规划问题的混合算法. 首先采用 B 样条函数逼近关节运动轨迹, 将最优控制问题转化为有约束的非线性规划问题, 然后引入基于种群的 GA 算法, 给出全局最优解的初始估计; 最后利用序列二次规划 (SQP) 得到高精度全局最优解. 仿真结果表明该方法优于单纯的 GA 或 SQP 方法.

**关键词:** 运动规划; 遗传算法; 序列二次规划; B 样条函数

中图分类号: TP271

文献标识码: A

## Hybrid algorithm for optimal motion planning of robot arms

LIAN Guang-yu, SUN Zeng-qi

(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: LIAN Guang-yu, E-mail: lianguangyu@tsinghua.org.cn)

**Abstract:** A hybrid optimization algorithm integrating GA and SQP is presented to address the motion planning problem of robot arms. With the joint trajectories approximated using B-spline function, the motion planning is transformed into a constrained non-linear programming problem. A group-based GA is then introduced to solve the optimization problem so as to achieve an initial estimation of the global extremum. Based on the estimation, a SQP optimizer is employed to search the accurate optimal solution with rapid convergent rate. Simulation verifies the advantages of using such hybrid method compared with using GA or SQP technique separately.

**Key words:** motion planning; genetic algorithm; sequential quadratic programming; B-spline function

### 1 引 言

给定机械臂的始末位姿, 规划一条满足约束条件的关节运动轨迹, 使某一性能指标达到最优, 称为最优运动规划问题. 文献[1]基于极大值原理, 采用数值方法求解最优运动规划问题. 文献[2, 3]以离散关节力矩或关节加速度为优化变量, 采用数学规划方法求解最优关节轨迹. 文献[4]用 B 样条函数逼近关节轨迹, 用数学规划求解样条函数最优控制点序列, 得到近似最优解. 上述方法的缺点是只能得到局部最优解. 为此, 文献[5]以离散关节加速度为优化变量, 提出基于 GA 和 ES 的近似最优规划方法. 其缺点是解的精度依赖于离散步距, 过小的步距会

引起维数灾问题.

GA 与数学规划各有优势与不足. GA 对适应值函数解析性质要求低, 依概率收敛于全局最优解, 但解的精度受限于基因编码方式及随机搜索特性, 难以得到精确最优解, 并且存在算法早熟问题. 数学规划方法收敛性好, 解的质量高, 但要求目标函数和约束有良好的解析性质, 且最优解对初值敏感. 结合 GA 的全局性和数学规划的快速精确性, 可望提高优化问题的求解性能.

本文以机械臂最优运动规划问题为例, 提出一种基于 GA 和序列二次规划 (SQP) 的混合优化算法. 首先用 B 样条函数逼近优化变量, 将最优控制

收稿日期: 2002-07-04; 修回日期: 2002-11-27.

**作者简介:** 连广宇(1969—), 男, 山西忻州人, 高级工程师, 从事智能机器人等研究; 孙增圻(1943—), 男, 江苏靖江人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、智能机器人等研究.

问题转化为有约束的非线性规划问题,然后采用 GA 初步定位全局最优解,最后用 SQP 求出精确最优值.仿真结果表明,该混合算法能有效地加快收敛速度,提高求解精度.

## 2 问题描述

下面以最小时间规划问题为例,介绍本文所提出的算法.已知机械臂的动力学方程为

$$M(\mathbf{H})\ddot{\mathbf{H}} + \mathbf{h}(\mathbf{H}, \dot{\mathbf{H}}) + \mathbf{g}(\mathbf{H}) = \mathbf{S} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{H}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^n$  分别为关节位移和力矩,  $M(\mathbf{H})$  为机械臂惯性矩阵,  $\mathbf{h}(\mathbf{H}, \dot{\mathbf{H}})$  为哥氏力、离心力和摩擦力项,  $\mathbf{g}(\mathbf{H})$  为重力项, 它们分别为具有适当维数的矩阵或向量. 关节位移、速度、加速度及力矩需分别满足约束条件

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{H}} \leq \mathbf{H} \leq \overline{\mathbf{H}}, \underline{\dot{\mathbf{H}}} \leq \dot{\mathbf{H}} \leq \overline{\dot{\mathbf{H}}} \\ \underline{\ddot{\mathbf{H}}} \leq \ddot{\mathbf{H}} \leq \overline{\ddot{\mathbf{H}}} \end{cases} \quad (2)$$

$$\underline{\mathbf{S}} \leq \mathbf{S} \leq \overline{\mathbf{S}} \quad (3)$$

上述不等式两边为相应量的上下限. 设关节轨迹为  $\mathbf{H}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T$  为终点时刻. 边界条件为

$$\begin{cases} \mathbf{H}(0) = \underline{\mathbf{H}}, \mathbf{H}(T) = \overline{\mathbf{H}}; \\ \dot{\mathbf{H}}(0) = \underline{\dot{\mathbf{H}}}, \dot{\mathbf{H}}(T) = \overline{\dot{\mathbf{H}}}. \end{cases} \quad (4)$$

以关节位移为规划变量, 最小时间规划问题为: 求满足式(2)和(3)约束的轨迹  $\mathbf{H}(t)$ , 优化性能指标

$$J(\mathbf{H}, T) = \int_0^T dt = T. \quad (5)$$

## 3 关节轨迹参数化

用均匀三次 B 样条函数逼近  $t \in [0, T]$  上的关节运动轨迹  $\mathbf{H}(t)$ . 设 B 样条函数控制点集为

$$P = \{p_j \in \mathbb{R}^n, j = 0, \dots, m+1\}. \quad (6)$$

考虑式(4)的边界条件, 则式(6)控制点序列应满足

$$\begin{cases} p^0 = p^1 = p^2 = \underline{\mathbf{H}}, \\ p^{m-1} = p^m = p^{m+1} = \overline{\mathbf{H}}. \end{cases} \quad (7)$$

设样条曲线沿时间轴均匀划分为  $m+1$  个间隔, 即

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T.$$

由三次 B 样条的性质知, 在  $[t_0, t_1]$  及  $[t_m, t_{m+1}]$  内, 样条函数一阶导数为 0, 运动部分为  $[t_1, t_m]$ , 可取  $t_1 = 0$ ,  $t_m = T$ . 在时间段  $[t_i, t_{i+1}]$  上,  $\mathbf{H}(t)$  计算如下<sup>[6]</sup>:

$$\mathbf{H}(s) = N_{1,p_{i-1}} + N_{2,p_i} + N_{3,p_{i+1}} + N_{4,p_{i+2}}. \quad (8)$$

设  $t_{i+1} - t_i = \Delta$ ,  $s = (t - t_i)/\Delta$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ .  $N_j(t)$  为三次样条基函数, 其形式如下:

$$N_{1,4} = (-s^3 + 3s^2 - 3s + 1)/6,$$

$$N_{2,4} = (3s^3 - 6s^2 + 4)/6,$$

$$N_{3,4} = (-3s^3 + 3s^2 + 3s + 1)/6,$$

$$N_{4,4} = s^3/6.$$

由上式可得关节速度和加速度的表达式.

## 4 最优规划混合数值解

常规的间接或直接算法只能得到最优控制问题的局部极值, 因此需要引入全局寻优策略来改善解的质量.

本文结合 GA 和 SQP 的特点, 提出一种两步法的混合优化方法: 基于 GA 的全局极值初步定位和基于 SQP 的精确快速求解.

### 4.1 带约束的非线性规划

基于前述参数化关节轨迹, 可将最优控制问题转化为带约束的非线性优化问题, 规划变量由控制点集  $P$  及自由末端时间  $T$  组成. 根据式(7), 将始末各 3 个控制点从规划变量中去掉, 则规划变量为含有  $n(m-4) + 1$  个元素的参数集合, 即

$$\mathbf{x} = (p^1, \dots, p^{m-2}, \dots, p^3, \dots, p^{m-2}, T), \quad (9)$$

其中  $n$  为关节数目. 由于在式(7)条件下边界条件自动满足, 只需考虑式(2)和(3)约束. 由 B 样条函数的强凸包性<sup>[6]</sup>, 可得满足关节位移约束的条件

$$\underline{\mathbf{H}} \leq p_i \leq \overline{\mathbf{H}} \quad (10)$$

式(10)包含  $2n(m-4)$  个不等式约束. 由 B 样条函数的导数性质, 易得关节速度和加速度的约束条件

$$\underline{\dot{\mathbf{H}}} \leq (p_i - p_{i-1})/\Delta \leq \overline{\dot{\mathbf{H}}} \quad (11)$$

$$\underline{\ddot{\mathbf{H}}} \leq (p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1})/\Delta^2 \leq \overline{\ddot{\mathbf{H}}} \quad (12)$$

上式含有  $2n(m-1) + 2nm$  个不等式约束. 式(3)的力矩约束用下述方法处理: 在  $[t_i, t_{i+1}]$  内均匀设置采样点, 并保证所有采样时刻约束成立. 设  $[t_i, t_{i+1}]$  分为  $l$  段, 每段长  $D = \Delta/(l+1)$ , 则约束条件为

$$\underline{\mathbf{S}} \leq \mathbf{S}(u^j) \leq \overline{\mathbf{S}} \quad (13)$$

其中:  $u^j = jD$ ,  $j = 0, \dots, l-1$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ . 力矩约束计算需用到式(1). 最小时间问题的目标函数为

$$J(\mathbf{x}) = T. \quad (14)$$

### 4.2 基于 GA 的全局寻优

对于非线性规划问题, 首先用浮点数编码的 GA 算法求解, 然后用罚函数方法处理不等式约束. 为克服早熟现象, 采用基于种群的 GA 算法<sup>[7]</sup>, 算法包含  $N$  个种群, 每个种群包含  $r$  个个体. 演化过程如下:

第 1 步: 随机生成  $N$  个种群;

第 2 步: 各种群独立演化  $S$  代, 记录平均适配值

$F_i, i = 1, 2, \dots, N;$

第 3 步: 种群复制: 用轮赌方式依概率复制种群, 平均适配值高的种群以较大概率保留下来;

第 4 步: 种群交叉: 在随机选定的第  $i$  个与第  $j$  个种群间进行部分个体交换;

第 5 步: 种群变异: 以某一小概率替换种群中随机抽取的个体;

第 6 步: 转第 2 步, 直到产生满意解为止.

上述算法中 GA 操作是在种群上进行的, 具备了分布式和移民式 GA 的优点, 提高了搜索性能. 尽管如此, GA 的随机搜索特性决定了算法只能得到全局最优解的初步估计.

### 4.3 基于 SQP 的局部优化

SQP 通过逐次求解一系列二次规划问题, 对原优化问题的 Kuhn-Tucker 点进行求解. GA 的全局极值初步估计为 SQP 提供了优良的初始解, 可快速得到精确的全局最优值. SQP 的计算步骤如下:

第 1 步: 将 GA 算法给出的最优解作为初始解点;

第 2 步: 用 BFGS 法估计 Lagrange 函数的 Hess 矩阵;

第 3 步: 求解 QP 问题, 得到当前搜索方向;

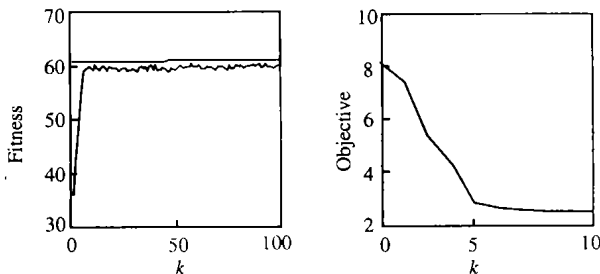
第 4 步: 由一维搜索得到最佳步长, 并得到新解点;

第 5 步: 转第 2 步, 直至得到满意解为止.

## 5 仿真算例

考虑二连杆机械臂的最小时间规划问题. 边界条件:  $H(0) = [0, -P/6], H(T) = [P, P/6], \dot{H}(0) = 0, \dot{H}(T) = 0$ . 关节速度约束:  $[-2, 2] \text{rad/s}$ , 加速度约束:  $[-5, 5] \text{rad/s}^2$ , 力矩约束:  $[-50, 50] \text{N}\cdot\text{m}$ ,  $m = 10, l = 10$ .

GA 迭代 100 次, 最优估计值  $x^0$  的收敛过程如



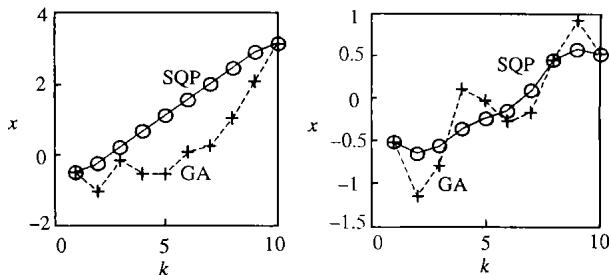
(a) GA 的收敛过程 (b) SQP 的收敛过程

图 1 混合算法的收敛过程

图 1(a) 所示; 以  $x^0$  为初值的 SQP 算法收敛过程如图 1(b) 所示.

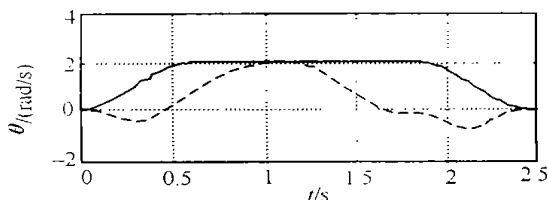
随机给定初值, 单独采用 SQP 的收敛速度从几十次到几百次不等, 不适当的初值会导致收敛缓慢甚至算法失败, 且所得解一般为局部极值. 以  $x^0$  为初值的 SQP 算法一般在 10 次迭代内即可收敛.

初始值  $x_0$  到最优值  $x^*$  的收敛情况如图 2 所示; 关节最优轨迹如图 3 所示. 全部约束条件都得到满足.

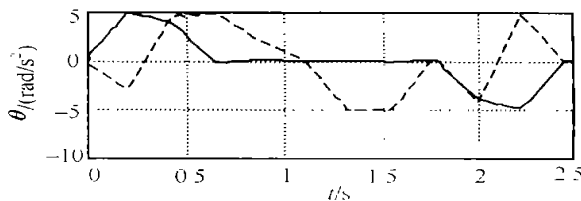


(a) joint1 (b) joint2

图 2 初始值到最优值的收敛情况



(a) 最优关节速度



(b) 最优关节加速度

图 3 最优关节速度与加速度

## 6 结论

本文针对机械臂最优运动规划问题, 提出一种结合 GA 和 SQP 的混合优化算法. 通过对关节轨迹的 B 样条逼近, 把最优控制问题转化为有约束的非线性规划问题, 利用 GA 的全局寻优能力和 SQP 的快速收敛性, 得到较好的优化结果. 与采用单纯的 GA 或 SQP 方法相比, 该方法具有明显的优势. 由于问题描述的一般性, 本文方法也适用于一般形式的最优控制问题.

(下转第 107 页)



(a) Ambe 原始图像

(b) 圆盘法重建的图像

(c) 普通法重建的图像

图 2 Amber 图像

的全部是  $8 \times 8$  的小块图像, 恢复的图像质量良好; 普通分形方法编码有 1 592 块用的是  $4 \times 4$  的小块, 但图像右脸靠近耳朵部分与源图像有一定的差别。

## 6 结 论

本文采用正方形外接圆盘的方法代替文献[2]提出的分形压缩编码方法. 该方法可调整外圆盘的大小, 而不增加多少计算量. 实验结果表明, 使用这种压缩编码方法比内圆方法有更高的 PSNR, 从而提高了图像的重建质量。

## 参考文献(References):

- [1] Jacquin A E. Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations [J]. IEEE Trans on Image Processing, 1992, 1(1):18-30.
- [2] Popeseu D C, Dimca A, Hong Y. A nonlinear model for fractal image coding[J]. IEEE Trans on Image Processing, 1997, 6(3):373-382.
- [3] Jacobs E W, Fisher Y, Boss R D. Image compression: A study of the iterated transform method[J]. Signal

Processing, 1992, 29(2):127-142.

- [4] Christopher J W, Blake F B. On the performance of fractal compression with clustering[J]. IEEE Trans on Image Processing, 1996, 5(3): 522-526.
- [5] Chang H T, Kuo C J. Iteration-free fractal image coding based on efficient domain pool design [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2000, 9(3): 329-339.
- [6] Truong T K, Jeng J H, Reed I S, et al. A fast encoding algorithm for fractal image compression using the DCT inner product [J]. IEEE Trans on Image Processing, 1999, 9(4): 529-535.
- [7] Hamzaoui R, Saupe D. Combining fractal image compression and vector quantization[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2000, 9(2): 134-142.
- [8] Wohberg B, Jager G D. A review of the fractal image coding literature [J]. IEEE Trans on Image Processing, 1999, 8(12): 1716-1729.

(上接第 104 页)

## 参考文献(References):

- [1] Geering H P, Guzzella L, Hepner S A R, et al. Time optimal motions of robots in assembly tasks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1986, 31(6): 512-518.
- [2] Dissanayake M W M, Goh C J, Phentien N. Time optimal trajectories for robotic manipulators [J]. Robotica, 1991, 9(2): 131-138.
- [3] Saramago S F P, Junior V S. Optimization of the trajectory planning of robot manipulators taking into account the dynamic of the system[J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(7): 883-894.
- [4] Saramago S F P, Junior V S. Optimal trajectory

planning of robot manipulators in the presence of moving obstacles [J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35(8): 1079-1094.

- [5] Lee Young Dae, Lee Beom Hee, Kim Han Gyoo. An evolutionary approach for time optimal trajectory planning of a robotic manipulator [J]. Information Sciences, 1999, 113(3/4): 245-260.
- [6] 孙家广, 杨长贵. 计算机图形学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996. 284-294.
- [7] 孙增圻, 张再兴, 邓志东. 智能控制理论与技术[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997. 357-361.