第 19 卷 第 1 期
Vol. 19 No. 1

控 制 与 决 策
Control and Decision

2004 年 1 月
Jan. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)01-0114-03

不确定时滞系统的鲁棒绝对稳定性研究

高金凤, 俞 立
(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032)

摘 要: 基于 Lyapunov 稳定性理论, 采用线性矩阵不等式处理方法, 研究具有参数不确定性的时滞系统鲁棒绝对稳定性问题. 导出了用线性矩阵不等式系统可行性描述的系统鲁棒绝对稳定的滞后依赖型条件, 据此可计算出最大的允许时滞界. 通过求解一组线性矩阵不等式, 给出使得闭环系统鲁棒绝对稳定的无记忆状态反馈控制律设计方法.

关键词: 线性矩阵不等式; 绝对稳定性; 鲁棒性; 状态反馈; 不确定性
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

On the robust absolute stability of uncertain time-delay systems

GAO Jin-feng, YU Li
(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China. Correspondent: GAO Jin-feng, E-mail: gaojf163@163.com)

Abstract: The problem of robust absolute stability is studied for a class of uncertain time-delay systems based on Lyapunov stability theory. A delay-dependent sufficient condition for the robust absolute stability is derived and is expressed as the feasibility problem of a certain linear matrix inequality system. And a maximum delay bound is obtained by solving a corresponding convex optimization problem. Furthermore, a procedure of designing memoryless state feedback controllers is presented such that the closed-loop uncertain systems are robustly absolutely stable.

Key words: LMI; absolute stability; robustness; state feedback; uncertainty

1 引 言

关于时滞系统的分析和综合问题, 在过去几十年中得到了广泛的研究, 并取得了一系列研究成果. 近年来, 针对具有滞后状态 Lurie 系统的绝对稳定性问题的研究, 也取得了一定的进展[1~5]. 特别是文献[5], 通过引进一个改进的矩阵不等式, 导出了具有更小保守性的时滞系统的绝对稳定性条件, 并据此给出使得闭环系统绝对稳定的状态反馈控制器设计方法, 但没有考虑模型的参数不确定性. 在实际系统中, 模型参数不确定性是不可避免的. 本文的目的是将文献[5]的结论推广到具有参数不确定性的系统.

2 问题描述与准备知识

考虑图 1 所示的反馈关联系统 Σ, 系统 G 的状态空间模型可描述为

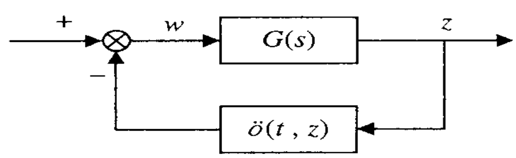

图 1 反馈关联系统 Σ

收稿日期: 2002-08-12; **修回日期**: 2002-10-10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60274034); 教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划项目.
作者简介: 高金凤(1978—), 女, 安徽巢湖人, 硕士, 从事不确定系统、鲁棒控制等研究; 俞立(1961—), 男, 浙江杭州人, 教授, 博士, 从事鲁棒控制、时滞系统等研究.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (A_d + \\ \qquad \Delta A_d(t))x(t-d) + D_2 w(t), \\ z(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 是系统的状态向量, $w(t) \in R^m$ 是输入信号, $z(t) \in R^m$ 是输出信号; A, A_d, C, D_2 是已知的具有适当维数的实常数矩阵; $d > 0$ 是滞后时间常数; ΔA 和 ΔA_d 是不确定矩阵, 表示模型中的参数不确定性, 假定它们是范数有界的, 且有如下形式:

$$\Delta A(t) = D_1 F(t) E_a, \Delta A_d(t) = D_1 F(t) E_d.$$

式中: $F(t) \in R^{i \times j}$ 是满足 $F^T(t)F(t) \le I$ 的未知矩阵; D_1, E_a, E_d 是已知的常数矩阵, 反映了参数不确定性的结构 系统的反馈关联具有如下形式:

$$w(t) = -\varphi(t, z(t)). \tag{2}$$

式中 $\varphi(t,z)$: $[0,\infty) \times R^m \to R^m$ 是属于扇形区域 $[V_1, V_2]$ 的非线性函数, 即 $\varphi(t,z)$ 是满足

$$[\varphi(t,z) - V_1 z]^T [\varphi(t,z) - V_2 z] \le 0,$$
$$\forall t \ge 0, \forall z \in R^m. \tag{3}$$

任意非线性函数, V_1 和 V_2 是已知的实矩阵, 且 $V = V_2 - V_1$ 是对称正定矩阵

定义 1　如果对任意允许的不确定性和属于扇形区域 $[V_1, V_2]$ 的任意非线性函数 $\varphi(t,z)$, 反馈关联系统 Σ 都是渐近稳定的, 则系统 Σ 在扇形区域 $[V_1, V_2]$ 内是鲁棒绝对稳定的

定义 1 将时滞系统的绝对稳定性概念推广到具有参数不确定性的时滞系统 在本文定理的证明中, 将用到以下引理:

引理 1[5]　考虑系统(1), 如果存在对称正定矩阵 P, 对称矩阵 Q, X, Z 和矩阵 Y, 使得对所有允许的不确定性, 以下矩阵不等式组成立:

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \ge 0, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} M & P\bar{A}_d - Y & PD_2 - C^T(V_2 - V_1)^T & d\bar{A}^T Z \\ * & -Q & 0 & d\bar{A}_d^T Z \\ * & * & -2I & dD_2^T Z \\ * & * & * & -dZ \end{bmatrix} < 0. \tag{5}$$

则系统 Σ 在扇形区域 $[V_1, V_2]$ 内是鲁棒绝对稳定的 其中

$$M = P(A - D_2V_1C) + (A - D_2V_1C)^T P + dX + Y + Y^T + Q + PD_1FE_a + E_a^T F^T D_1^T P,$$
$$\bar{A} = A - D_2V_1C + D_1FE_a,$$
$$\bar{A}_d = A_d + D_1FE_d.$$

* 表示由矩阵的对称性得到的矩阵块

3　主要结果

定理 1　考虑系统(1), 如果存在对称正定矩阵 P, 对称矩阵 Q, X, Z 和矩阵 Y, 以及常数 $\epsilon > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \ge 0, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & PD_1 \\ * & -Q + \epsilon E_d^T E_d & 0 & dA_d^T Z & 0 \\ * & * & -2I & dD_2^T Z & 0 \\ * & * & * & -dZ & dZD_1 \\ * & * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

同时成立, 则系统(1) 在扇形区域 $[V_1, V_2]$ 内是鲁棒绝对稳定的 其中

$$M_1 = P(A - D_2V_1C) + (A - D_2V_1C)^T P + Y + Y^T + dX + Q,$$
$$\Phi_1 = M_1 = \epsilon E_a^T E_a,$$
$$\Phi_2 = PA_d - Y + \epsilon E_a^T E_d,$$
$$\Phi_3 = PD_2 - C^T V^T,$$
$$\Phi_4 = d(A - D_2V_1C)^T Z.$$

证明　将 $\bar{A} = A - D_2V_1C + D_1F(t)E_a$ 和 $\bar{A}_d = A_d + D_1F(t)E_d$ 代入式(5), 并记

$$\Omega = \begin{bmatrix} M_1 & PA_d - Y & \Phi_3 & \Phi_4 \\ * & -Q & 0 & dA_d^T Z \\ * & * & -2I & dD_2^T Z \\ * & * & * & -dZ \end{bmatrix}. \tag{7}$$

采用文献[6]中定理 1 的处理方法, 则矩阵不等式(5) 可写成关于不确定性矩阵 F 的二次不等式 根据矩阵的 Schur 补性质, 可知其等价于不等式(6). 由引理 1 可得到定理 1 的结论 □

对于给定的滞后时间 d, 矩阵不等式(4) 和(6) 可应用求解线性矩阵不等式可行性问题的有效方法, 求解该线性矩阵不等式系统 进而可应用定理 1 求出使得系统(1) 保持鲁棒绝对稳定的最大允许滞后时间 d^*. d^* 可通过求解如下优化问题而得到

$$\max_{\epsilon, P, Q, X, Y, Z} d,$$
$$\text{s.t.} \quad P > 0, (4), (6). \tag{8}$$

容易看出, 该问题是具有线性矩阵不等式约束的广义特征值问题, 故可应用 LMI 工具箱中的求解器 gevp, 得到该问题的全局最优解

下面应用鲁棒绝对稳定性问题的分析结果进行控制器的综合 为此, 考虑带有控制输入的不确定时滞系统

$$
\begin{cases}
\mathring{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + \\
\qquad (A_d + \Delta A_d(t))x(t-d) + \\
\qquad D_2 w(t) + Bu(t), \\
z(t) = Cx(t).
\end{cases}
\tag{9}
$$

目的是设计状态反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$, 使得如下闭环系统

$$
\begin{cases}
\mathring{x}(t) = (A + \Delta A + BK)x(t) + \\
\qquad (A_d + \Delta A_d)x(t-d) + D_2 w(t), \\
z(t) = Cx(t).
\end{cases}
\tag{10}
$$

对属于扇形区域$[V_1, V_2]$的任意非线性函数$\varphi(t, z)$是鲁棒绝对稳定的 称具有这样性质的控制律为系统(9) 的鲁棒绝对稳定化控制律

定理 2 对于系统(9) 和给定的扇形区域$[V_1, V_2]$, 如果存在对称正定矩阵$\hat{P}$, 对称矩阵$\hat{Q}$, $\hat{X}$, $\hat{Z}$ 和矩阵$\hat{W}$, $\hat{Y}$ 以及常数 $\lambda > 0$, 使得矩阵不等式组成立:

$$
\begin{bmatrix}
\Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & \hat{P}E_a^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & -\hat{Q} & 0 & d\hat{P}A_d^{\mathrm{T}} & \hat{P}E_d^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & * & -2I & dD_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & * & -d\hat{Z} & 0 & d\lambda D_1 \\
* & * & * & 0 & -\lambda I & 0 \\
* & * & * & d\lambda D_1^{\mathrm{T}} & 0 & -\lambda I
\end{bmatrix} < 0,
\tag{11}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\hat{X} & \hat{Y} \\
\hat{Y}^{\mathrm{T}} & \hat{P}\hat{Z}^{-1}\hat{P}
\end{bmatrix} \geq 0.
\tag{12}
$$

则 $u(t) = \hat{W}\hat{P}^{-1}x(t)$ 是系统(9) 的一个鲁棒绝对稳定化控制律 其中

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= M_2 + \lambda D_1 D_1^{\mathrm{T}}, \\
\Gamma_2 &= A_d\hat{P} - \hat{Y}, \\
\Gamma_3 &= D_2 - \hat{P}C^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}, \\
\Gamma_4 &= d[\hat{P}(A - D_2V_1C)^{\mathrm{T}} + \\
&\qquad \hat{W}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \lambda D_1D_1^{\mathrm{T}}], \\
M_2 &= (A - D_2V_1C)\hat{P} + B\hat{W} + \\
&\qquad \hat{P}(A - D_2V_1C)^{\mathrm{T}} + \hat{W}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \\
&\qquad \hat{Y} + \hat{Y}^{\mathrm{T}} + d\hat{X} + \hat{Q}.
\end{aligned}
$$

证明 考虑闭环系统(10), 证明过程类似于定理 1. 但在处理不确定性矩阵时, 令 $\lambda = \epsilon^{-1}$, 即关于不确定性矩阵F 的二次不等式中的ϵ由λ^{-1}来代替. 根据矩阵的Schur 补性质和引理 1, 如果存在对称正定矩阵P, 对称矩阵Q, X, Z 和矩阵Y, 以及常数$\lambda > 0$, 使得矩阵不等式(4) 和下式成立:

$$
\begin{bmatrix}
M_3 + \lambda PD_1D_1^{\mathrm{T}}P & PA_d - Y & PD_2 - C^{\mathrm{T}}(V_2 - V_1)^{\mathrm{T}} & d(A + BK - D_2V_1C)^{\mathrm{T}}Z + \lambda dPD_1D_1^{\mathrm{T}}Z & E_a^{\mathrm{T}} \\
* & -Q & 0 & dA_d^{\mathrm{T}}Z & E_d^{\mathrm{T}} \\
* & * & -2I & dD_2^{\mathrm{T}}Z & 0 \\
* & * & * & -dZ + \lambda d^2ZD_1D_1^{\mathrm{T}}Z & 0 \\
* & * & * & 0 & -\lambda I
\end{bmatrix} < 0.
\tag{13}
$$

则闭环系统(10) 鲁棒绝对稳定 其中

$$
\begin{aligned}
M_3 = P(A &+ BK - D_2V_1C) + \\
&(A + BK - D_2V_1C)^{\mathrm{T}}P + \\
&Y + Y^{\mathrm{T}} + dX + Q.
\end{aligned}
$$

对式(13) 左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, I, Z^{-1}, I\}$, 对式(4) 左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\}$, 并记 $\hat{P} = P^{-1}$, $\hat{W} = KP^{-1}$, $\hat{Q} = P^{-1}QP^{-1}$, $\hat{Y} = P^{-1}YP^{-1}$, $\hat{X} = P^{-1}XP^{-1}$, $\hat{Z} = Z^{-1}$. 再次利用矩阵的Schur 补性质, 可推出由式(4) 和(13) 导出的结果分别等价于式(12) 和(11). □

不等式(12) 不是线性的, 故无法利用现有的LMI工具箱对此问题直接进行求解 若令$\hat{P} = \hat{Z}$, 则可得如下推论:

推论 1 对于系统(9) 和给定的扇形区域$[V_1, V_2]$, 如果存在对称正定矩阵$\hat{P}$, 对称矩阵$\hat{Q}$, $\hat{X}$ 和矩阵$\hat{W}$, $\hat{Y}$ 以及正数 λ, 使得如下矩阵不等式组成立:

$$
\begin{bmatrix}
M_2 + \lambda D_1D_1^{\mathrm{T}} & A_d\hat{P} - \hat{Y} & D_2 - \hat{P}C^{\mathrm{T}}(V_2 - V_1)^{\mathrm{T}} & d[\hat{P}(A - D_2V_1C)^{\mathrm{T}} + \hat{W}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \lambda D_1D_1^{\mathrm{T}}] & \hat{P}E_a^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & -\hat{Q} & 0 & d\hat{P}A_d^{\mathrm{T}} & \hat{P}E_d^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & * & -2I & dD_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\
* & * & * & -d\hat{P} & 0 & d\lambda D_1 \\
* & * & * & 0 & -\lambda I & 0 \\
* & * & * & d\lambda D_1^{\mathrm{T}} & 0 & -\lambda I
\end{bmatrix} < 0,
\tag{14}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\hat{X} & \hat{Y} \\
\hat{Y}^{\mathrm{T}} & \hat{P}
\end{bmatrix} \geq 0.
\tag{15}
$$

其中M_2如定理 2 所定义, 则 $u(t) = \hat{W}\hat{P}^{-1}x(t)$ 是系统(9) 的一个鲁棒绝对稳定化控制律

如果该线性矩阵不等式系统有解, 则可用它的任意一个可行解构造出系统(9) 的一个鲁棒绝对稳定化控制律 但该推论所得结果具有一定的保守性, 它是在假设 $\hat{P} = \hat{Z}$ 的前提下, 以结果的保守性换取求解计算的方便性和有效性 (下转第 119 页)

$$V_u = M(qDH + \vec{\lambda}),$$
$$H = [H_{h_1} \quad \cdots \quad H_{h_S}]^T,$$
$$\vec{\lambda} = \lambda[1 \quad \cdots \quad 1]^T_{N\times 1}, V_{cl} = qMDP,$$
$$P = [c(k+h_1) \quad \cdots \quad c(k+h_S)]^T,$$
$$V_{ck} = qMDK, K = [\alpha^{h_1} \quad \cdots \quad \alpha^{h_S}]^T.$$

3　数值仿真

针对一个二阶系统

$$G_m(s) = \frac{1}{10s^2 + 10s + 2},$$

实际被控对象为

$$G_p(s) = \frac{0.6}{8s^2 + 5s + 1},$$

跟踪幅值为 0.5 的阶跃设定值. 当 $k > 100$ 时, 存在外部干扰 $d(k) = 0.5$.

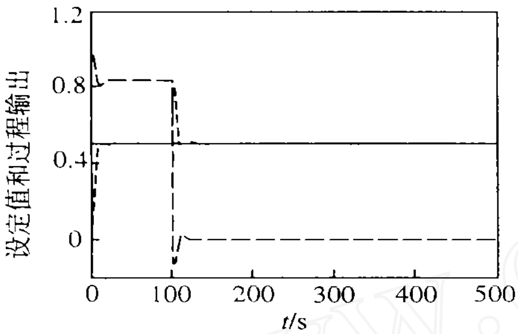

图 1　本文预测函数控制方法的仿真曲线

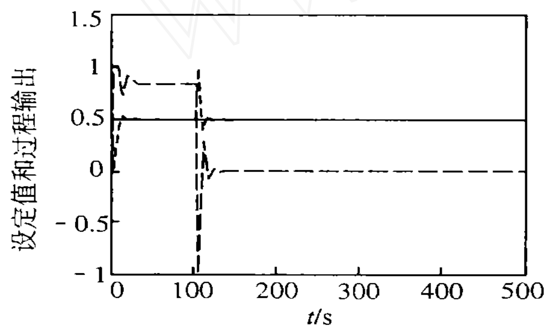

图 2　原有预测函数控制方法的仿真曲线

采用本文的预测函数控制方法, 其仿真结果如图 1 所示; 而用原有基于状态方程的预测函数控制方法[1], 其仿真结果如图 2 所示. 其中: 实线表示设定值 c, 点线表示过程输出 y. 比较两图可以看出, 本文预测函数控制方法没有超调, 具有更好的鲁棒性, 跟踪快速, 抑制干扰能力强.

4　结　　论

本文基于灰色系统模型建立了预测函数控制算法. 通过数值仿真表明, 该算法不仅比一般基于状态方程的算法[1]更优, 即鲁棒性好、跟踪快速和抑制干扰能力强, 而且建模简单, 可描述系统的不确定性和不完全性, 因此具有更广泛的应用范围.

参考文献(References):

[1] Richalet J. Predictive functional control: Application to fast and accurate robots[A]. *Proc 10th IFAC World Congress*[C]. Munich, 1987. 431-434.

[2] Didier C S. Computer aided design of weapon system guidance and control with predictive functional control technique[A]. *AGARD Conf: Software for Guidance of Control*[C]. Greece, 1991. 725-730.

[3] 潘红华, 苏宏业, 胡剑波, 等. 预测函数控制及其在导弹控制系统设计中的应用[J]. 火力与指挥控制, 2000, 25(1): 56-59.
(Pan Hong-hua, Su Hong-ye, Hu Jian-bo, et al. Predictive functional control and its application in missile control system[J]. *Fire Control and Command Control*, 2000, 25(1): 56-59.)

[4] 邓聚龙. 灰色控制系统[M]. 武汉: 华中工学院出版社, 1987. 293-302.

[5] 罗开元, 高峰, 胡利蕊. 灰色广义预测控制算法及仿真研究[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(2): 207-210.
(Luo Kai-yuan, Gao Feng, Hu Li-rui. Grey general predictive control and simulation study[J]. *Control Theory and Applications*, 2002, 19(2): 207-210.)

(上接第 116 页)

参考文献(References):

[1] Somolines A. Stability of Lurie-type functional equations[J]. *J of Differential Equations*, 1977, 26(2): 191-199.

[2] Gan Z, Ge W, Zhao S, et al. Robust absolute stability of general Lurie type nonlinear control systems[J]. *Mathematics Applications*, 1999, 12(1): 121-124.

[3] Nian Xiao-hong. Delay dependent conditions for absolute stability of Lurie type control systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(4): 564-566.

[4] Nian Xiao-hong, Wang Tian-cheng. Robust absolute stability criteria of Lurie control systems via LMI[J]. *J of Changsha Railway University*, 2000, 18(4): 74-79.

[5] Yu Li. On the absolute stability of a class of time-delay systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(5): 781-784.

[6] Yu Li. Optimal guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems[J]. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(5): 639-642.